DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

LEMNISCATA BERNOUILLANA.

DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

LEMNISCATA BERNOUILLANA,

Inhoud

1. Bierens de Haan, David. Dissertatio mathematica de lemniscata Bernouillana.
2. ——— Over eenige gevallen bij de theorie van onstadige (discontinuë) functiën, waar men te onderscheiden heeft, of het oneindige van een' even' of oneven', een geheele of gebroken vorm zij.
3. ——— Over eenige nieuwe herleidingsformulen bij de theorie der bepaalde integralen.
4. ——— Tweede ontwerp eener naamlijst van logarithmentafels, met de opgave van den tijd, de plaats en de grootte, alsmede van het aantal decimalen, alles zoo verre bekend.
5. ——— Over het differentieeren van eenige elliptische integralen naar den modulus of eene functie daarvan.
6. ——— Een aanhangsel tot de tafels van onbepaalde integralen.

SCH,

RUM DECRETO,

EGIIS,

DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

LEMNISCATA BERNOUILLANA,

QUAM,

FAVENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

ANTONII HENRICI VAN DER BOON MESCH,

MATH. MAG. PHIL. NAT. DOCT. ET PROF. ORD.,

NEC NON

AMPLISSIMI SENATUS ACADEMICI CONSENSU

ET

NOBILISSIMAE FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU MAGISTERII ET DOCTORATUS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA,

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO AC SOLEMNI EXAMINI SUBMITTET

DAVID BIERENS DE HAAN,

AMSTELODAMENSIS,

AD DIEM XV MAJI, ANNI MDCCCXLVII, HORA II.

IN AUDITORIO MAJORI.

AMSTELODAMI,

APUD C. G. SULPKE.

MDCCCXLVII.

„Speculationes mathematicae, si ad earum utilitatem respicimus, ad duas classes reduci debere „videntur . . . .

„ . . . . Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae, etsi cum nullo insigni „commodo sint conjunctae, tamen ita sunt comparatae, ut ad fines analyseos promovendos, viresque „ingenii nostri acuendas occasionem praebeant."

L. Euler., Observationes de comparatione arcuum curvarum rectificabilium in *Nov. Comment. Petrop.*, *Tom.* VI., *Pag.* 58.

EX OFFICINA TYPOGRAPHICA BAKELS & KRÖBER.

PATRI

OPTIMO, CARISSIMO,

HASCE STUDIORUM PRIMITIAS
D. D. D.
AUCTOR.

INTROITUS.

Curvas inter secundo altioris gradus, Lemniscatam Bernouillanam excellere ob diversas nec non elegantiores proprietates jam olim constabat: ita ut viri celeberrimi JACOBUS BERNOUILLI, COMES FAGNANO, (cf. opus ejus, cui titulus Produzzioni mathematiche, Tom. II, pag. 771 sq) EULER, MAC LAURIN, alii ei operam darent. Nec minorem hisce temporibus famam assecuta est, quamvis, geometriae campo adeo extenso, mathematicorum ingenia, ut opinor, magis in limites dilatandos, minus in speciales applicationes intensa sint. Lemniscatae Bernouillanae arcuum divisio ac multiplicatio enim non tantum cum integralium singularium ut et cum functionum theoria nexum habet, quo illustrissimi LIBRI, LIOUVILLE, caeteri ad hujus limites expandendos usi sunt, sed etiam hujus curvae rectificatio, cum theoria gravissima functionum ellip-

ticarum arcte conjuncta quum sit, ansam praebuisse videtur ad disquisitiones illas eruditas virorum celeberrimorum J. ALFRED SERRET et MICHAEL ROBERTS de repraesentatione geometrica functionum illarum ellipticarum. Ex quibus Lemniscatae Bernouillanae connectio cum pluribus curvarum classibus patuit, quarum nonnullae etiam aliunde cognitae erant; inter quas autem et *Cassinoides* enitescunt, pluribus elegantissimis proprietatibus gaudentes, quarum quidem Lemniscata Bernouillana est ea species, quae ab SERRET *parabolica* vocatur, id est, locus geometricus punctorum, quorum ad duo puncta fixa distantiarum rectangulus constanter quadrato, in horum punctorum dimidia distantia constructo, aequalis sit. Quo respectu nuper a doct. VECHTMANN in Diss. inaug. Phil. de curvis Lemniscatis (ut *Cassinoides* nominat ille auctor) Gött. 1843, generalia quaedam de Lemniscata Bernouillana adnotata sunt. — Sed inter plures quoque alios modus exstat, quo hancce curvam oriri animo proponere possumus, quemque, et ob generationis simplicitatem, et ob adjumenta in expositione, una cum priori fundamentum hujus opusculi eligere, argumenti indoli congruum mihi visum est. Locus etenim geometricus est centri Hyperbolae aequilaterae projectionis in ejus curvae tangentes. Quo respectu igitur pertinet ad novam curvarum classem generalem, quae a vir. clar. STEINER, WOLFF, aliis sub nomine germanico *Fusspunctencurven* nuper elaborata est.

Porro diversis modis tum ex Hyperbola aequilatera, tum ex circulo, tum alio modo generatur Lemniscata Bernouillana, ita ut a geometrico expositione non prorsus indigna existimeretur. Nec quidem in Mechanicis momento prorsus caret, ut suo loco expondturi sumus. Quodad hujus curvae in Physicis praestantiam tantum moneamus, in lucis polarisatae transitu per crystallorum biaxium lamellas oriri imagines coloratas, cassinoidum diversas species, et Lemniscatam Bernouillanam ergo inter eas, exacte referentes.

Non prorsus supervacaneum igitur mihi videtur ea, quae de hac curva sparsim commemorata, et ex aliarum curvarum connexarum proprietatibus deducta inveni, colligere, quo consilio imprimis usus sum iis, quae a viris celeberrimis jamjam laudatis, ut et a LEGENDRE, MAGNUS,

Ossian Bonnet, aliisque in lucem prolata sunt. Quae vero geometricus illustris Italicus Tortolini imprimis de Lemniscatae Bernouillanae rectificatione in Diario Giornale Arcadico 1844 publici juris fecit, mihi perlegere non licuit, ob hujus Diarii in Bibliothecis absentiam.

Varia monita passim sparsa sub unum conspectum conjungendo, nonnullaque addendo, quae mihi obvia essent, me aliquid ad Lemniscatae Bernouillanae theoriam promovendam, quantum vires meae exiguae siverunt, praestitisse, vix sperare ausim. Utinam saltem ad vires ingenii acuendas profecissent haecce meae primitiae!

Priusquam autem ad expositionem transeamus, pauca praemittenda sunt de Lemniscatae Bernouillanae inventione.

Jacobus Bernouilli Basiliensis, celeberrimus ille saeculi decimi septimi mathematicus, de constructione Isochronae Paracentricae, seu curva accessus et recessus aequabilis agens, quo scopo curvam algebraicam quaerit, rectificationis formula

$$\int \frac{a^2 \partial u}{\sqrt{(a^4 - u^4)}}$$

gaudentem, sic loquitur (cf. Acta Erud. Lips. Sept. 1694, pag. 336 et Jac. Bernouilli Opera, Tom. I, N°. 60, pag. 609)

» Talem ex voto sese sistit curva quatuor dimensionum, quae hac aequatione
» exprimitur
» $$xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)},$$
» quaeque circum axem [$2a$] constituta formam refert jacentis notae octonarii ∞, seu
» complicatae in nodum fasciae, sive Lemnisci (Λημνίσκος), *d'un noeud de ruban*
» Gallis."

et paullo post eam vocat ille auctor (Opera, pag. 611)

» nostram LEMNISCATAM"

dum in Actis Erud. Lips. Dec. 1695, pag. 543 et Operibus, Tom. I, N°. 66, pag. 648, quum de articulo supra laudato mentionem facit, addit

» quam LEMNISCATAM voco."

Inde patet, curvae et inventionem et denominationem illustrissimo illi auctori tribuendam esse. (cf. praeterea Opera, Tom. II, N°. 103, Art. 2, pag. 1001, et N°. 103, Art. 28, pag. 1118, ubi ea utitur auctor ad conoidis Horologii constructionem.)

DE LEMNISCATA BERNOUILLANA.

§ 1.

DE AEQUATIONE.

1. Expositionem inchoemus ponendo duo theoremata, quae, ut in introitu diximus, maxime idonea videntur, quae fundamentalia habeantur.

2. **THEOREMA I.** Lemniscata Bernouillana locus geometricus est projectionis centri Hyperbolae Aequilaterae in tangentes.

Aequatio Hyperbolae aequilaterae, si centrum pro coordinatarum rectangularium origine, et axin majorem, $2a$ aequalem, pro axi abscissarum accipiamus, est

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

unde aequatio tangentis in puncto, cujus coordinatae sunt x_1, y_1, secundum methodum satis cognitam evadit

$$x x_1 - y y_1 = a^2 \quad \text{vel} \quad y = \frac{x_1}{y^1}\, x - \frac{a^2}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Coordinatae pedis perpendiculi, e centro in tangentem demissi, quae x_2 et y_2 sint, ope praeceptorum Geometriae Analyticae invenientur

$$x_2 = \frac{\dfrac{a^2}{y_1} \cdot \dfrac{x_1}{y_1}}{1 + \dfrac{x_1{}^2}{y_1{}^2}} \qquad y_2 = \frac{-\dfrac{a^2}{y_1}}{1 + \dfrac{x_1{}^2}{y_1{}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

unde

$$x_2 = -\frac{x_1}{y_1} y_2 \;,\; \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_2}{y_2} \quad \text{vel } y_2 = \frac{-\dfrac{a^2}{y_1}}{1 + \dfrac{x_2^{\,2}}{y_2^{\,2}}} \text{ et } y_1 = -\frac{a^2\ y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \quad \ldots \ldots (d)$$

et ope (c)

$$x_1 = \frac{a^2\ x_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \quad \ldots \ldots (e)$$

quibus valoribus in (a) substitutis, quae aequatio pro x_1 et y_1 valet, prodit x_2 inter et y_2 aequatio

$$\frac{a^4\ x_2^{\,2}}{(x_2^{\,2} + y_2^{\,2})^2} - \frac{a^4\ y_2^{\,2}}{(x_2^{\,2} + y_2^{\,2})^2} = a^2 \text{ vel } \qquad (x_2^{\,2} + y_2^{\,2})^2 = a^2\,(x_2^{\,2} - y_2^{\,2}) \quad \ldots (A)$$

quae Lemniscatae Bernouillanae est aequatio, in qua a vocatur hujus curvae *semi-axis*, dum centrum Hyperbolae aequilaterae, i. e. origo coordinatarum, a nonnullis *nodus*, ab aliis vero Lemniscatae *centrum* vocatur, quo posteriori nomine in futurum utemur.

3. **THEOREMA II.** In Lemniscatae Bernouillanae axi, duo puncta, a centro ab utraque parte, quantitate $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ distantia, ea proprietate gaudent, ut productum inter distantias cujuscumque Lemniscatae puncti ad utrumque punctum constans sit, idque $\frac{1}{2}a^2$ aequale.

Pro puncto, cujus coordinatae sunt x_1, y_1, hae distantiae sunt

$$\sqrt{\{(a\sqrt{\tfrac{1}{2}} - x_1)^2 + y_1^{\,2}\}} \qquad \text{et } \sqrt{\{(a\sqrt{\tfrac{1}{2}} + x_1)^2 + y_1^{\,2}\}}$$

igitur earum productum si P vocamus, erit

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\{(a\sqrt{\tfrac{1}{2}} - x_1)^2 + y_1^{\,2}\}\,\{(a\sqrt{\tfrac{1}{2}} + x_1)^2 + y_1^{\,2}\}} \\ &= \sqrt{\{(\tfrac{1}{2}a^2 + x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) - a x_1\sqrt{2}\}\,\{(\tfrac{1}{2}a^2 + x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) + a x_1\sqrt{2}\}} \\ &= \sqrt{\{(\tfrac{1}{2}a^2 + x_1^{\,2} + y_1^{\,2})^2 - 2a^2 x_1^{\,2}\}} \\ &= \sqrt{\{(x_1^{\,2} + y_1^{\,2})^2 + a^2(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) + \tfrac{1}{4}a^4 - 2a^2 x_1^{\,2}\}} \end{aligned}$$

vel ob (A)

$$P = \sqrt{\{a^2(x_1^{\,2} - y_1^{\,2}) + a^2(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) + \tfrac{1}{4}a^4 - 2a^2 x_1^{\,2}\}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4} = \tfrac{1}{2}a^2$$

4. Quae puncta ob generalem hancce proprietatem *focos* nuncupamus, earumque ad centrum distantiam $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ vel e *excentricitatem*, ita ut in sectionibus conicis. — Ex horum parametrorum acceptis valoribus, duo sequantur theoremata, nempe

THEOREMA III. Lemniscatae excentricitas e dimidio Hyperbolae aequilaterae, ad eam pertinentis, excentricitatis E aequalis est.

Est enim $E = a\sqrt{2} = 2 \,.\, a\sqrt{\frac{1}{2}} = 2e$.

THEOREMA IV. Axis Lemniscatae et Hyperbolae aequilaterae communis in duobus Hyperbolae verticibus, et focis Hyperbolae ac Lemniscatae, in eadem quodad centrum regione sitis, harmonice secatur.

Est enim in Figura 1, $OA = OB = a$, $OF = OF' = e$; $OE = OE' = E = 2e$

$$BF = a + e, \quad BE = a + 2e \quad AF = a - e, \quad AE = 2e - a$$

unde

$$BF \times AE = AF \times BE \quad \text{vel} \quad (a + e)\,(2e - a) = (a - e)\,(a + 2e)$$

identica fit, Q. E. I.

5. Transeamus ad Lemniscatae Bernouillanae aequationem

$$\left.\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= a^2(x^2 - y^2)\\ &= 2e^2(x^2 - y^2)\end{aligned}\right\}(A)$$

ad duos axes rectangulares pertinentem, perscrutandam.

Si eam solvamus, valores x et y invenimus

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 2y^2 \pm a\sqrt{(a^2 - 8y^2)}}{2}} = \pm\sqrt{\left\{e^2 - y^2 \pm e\sqrt{(e^2 - 4y^2)}\right\}}, \quad \ldots\ldots (1)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a^2 - 2x^2 + a\sqrt{(a^2 + 8x^2)}}{2}} = \pm\sqrt{\left\{-e^2 - x^2 + e\sqrt{(e^2 + 4x^2)}\right\}} \quad \ldots (2)$$

ubi in valore y sub signo radicis signorum duplicium positivum tantum adhibuimus, ne y imaginarium evaderet.

Ex potestatibus secundis tantum variabilium x et y in aequatione (A) existentibus, concludimus Lemniscatam Bernouillanam versus utrumque coordinatarum axin symmetricam esse.

6. Ex aequatione (1) elucet cuique valori y quatuor valores x respondere, quorum duo signo tantum a duobus caeteris differunt, nisi sit

$$8y^2 = a^2 \quad \text{vel} \quad y = \tfrac{1}{4}a\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

quum duo tantum valores x exstant, iique signo contrario praediti, et y maximum valorem accipit.

Ex aequatione (2) contra vidimus pro quoque valore x duo tantum et semper valores y existere.

Pro $y = 0$ ex (1) invenitur $x = \pm\sqrt{\frac{a^2 \pm a^2}{2}}$ igitur $x = 0$ vel $= \pm a$, id est curva axem abscissarum secat bis in centro nec non in duobus punctis a centro quantitate $\pm a$ distantibus, quae *vertices* nuncupamus.

Porro ex (1) et (2) elucet, nec x nec y umquam infinitum fieri posse.

Pro $x = 0$ ex (2) sequitur $y = \pm 0$, id est, curva axem ordinatarum in centro bis transit, quod jam invenimus.

Apparet igitur Lemniscatam curvam esse tertii sive lineam quarti ordinis, ex duobus lemniscis continuis, in centro confluentibus, consistentem, versus utrumque axin symmetricam, hisce axibus igitur in quatuor partes aequales dividi, quas inde *quadrantes* vocabimus.

7. Pro polarium coordinatarum r et φ origine curvae centrum, et axin curvae pro axi polari assumamus, ita ut sit

$$x = r \, Cos \, \varphi \qquad y = r \, Sin \, \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

Hisce valoribus in (A) substitutis, habemus

$$r^4 = a^2 r^2 \, Cos \, 2\varphi$$

vel

$$\left.\begin{aligned} r^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad r^2 &= a^2 \, Cos \, 2\varphi \\ &= 2e^2 \, Cos \, 2\varphi \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Prior aequatio docet, ambos curvae ramos in centro coire, ut jam vidimus, et altera aequatio est requisita.

Docet ea, pro $\varphi > 45°$, r^2 negativum et igitur r imaginarium fore. Ergo curvae uterque lemniscus inscriptus est lineis duabus, quae cum axi angulum $\pm 45°$ faciunt, quasque *Tangentes centrales* vocabimus, cujus nominis ratio n° 16 dabitur.

Idem quoque, sed minus eleganter, ex aequatione (A) deduci potest; y^2 enim semper minus quam x^2 esse debet, ne $(x^2 + y^2)^2$ negativum fiat: unde sequitur $y:x$, id est tangentem anguli polaris semper unitati minorem, angulumque ipsum minorem quam 45° esse: porro si (A) ponamus sub forma

$$x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right),$$

deducimus pro $x = 0$ esse $1 - \dfrac{y^2}{x^2} = 0$, $\dfrac{y}{x} = \pm 1$, id est angulus tangentem inter et axin pro centro est $\pm 45°$.

Evidens est, duarum illarum tangentium centralium alteram in alteram perpendicularem esse. Caeteroquin et ex hac aequatione (B) curvae symmetria elucet.

8. Quando, axi polari eodem manente, originem in verticum unum ponamus, et tunc coordinatas polares r_1 et φ_1 vocemus, erit

$$a - x = r_1 \, Cos \, \varphi_1 \text{ et } y = r_1 \, Sin \, \varphi_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

Quorum valorum substitutione, ex (A) eruimus

$$r_1^{\,4} - 4ar_1^{\,3} \, Cos \, \varphi_1 + (3 + 2 \, Cos^2 \varphi_1) \, a^2 r_1^{\,2} - 2a^3 r_1 \, Cos \, \varphi_1 = 0$$

vel

$$r_1 = 0 \text{ et } r_1^{\,3} - 4ar_1^{\,2} \, Cos \, \varphi_1 + (3 + 2 \, Cos^2 \varphi_1) \, a^2 r_1 - 2a^3 \, Cos \, \varphi_1 = 0 \qquad \text{(C)}$$

Prima aequatio necessario exinde sequitur, quod unus curvae ramorum per originem coordinatarum polarium transit: altera est aequatio generalis.

9. Quum, pro eodem axi polari, polum in alterum focorum transferamus, quo casu coordinatae polares sint r_2 et φ_2, ubi φ_2 sumemus ab ea axis parte, quae centrum continet, habemus

$$e - x = r_2 \, Cos\, \varphi_2 \quad \text{et} \quad y = r_2 \, Sin\, \varphi_2 \;, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

quibus valoribus in (A) substitutis, obtinemus

$$\left.\begin{aligned} &r_2{}^4 - 2 a r_2{}^3 \, Cos\, \varphi_2 \sqrt{2} + 2 a^2 r_2{}^2 = \tfrac{1}{4} a^4 \;, \\ &\text{vel} \\ &r_2{}^4 - 4 e r_2{}^3 \, Cos\, \varphi_2 + 4 e^2 r_2{}^2 = e^4 \;. \end{aligned}\right\} (D)$$

10. Tangentes centrales si pro coordinatarum rectangularium x_1 et y_1 axibus assumamus, relatio x et y inter et x_1 et y_1 est

$$x \sqrt{2} = x_1 + y_1 \quad , \quad y \sqrt{2} = x_1 - y_1 \;, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (i)$$

quorum in (A) substitutione habemus

$$\left.\begin{aligned} (x_1{}^2 + y_1{}^2)^2 &= 2 a^2 x_1 y_1 \\ &= 4 e^2 x_1 y_1 \;, \end{aligned}\right\} (E)$$

vel etiam ob radium vectorem hîc eundem, qui in systemate (B)

$$x_1 y_1 = \left(\frac{r^2}{2e}\right)^2 . \quad \ldots \ldots \ldots \quad (E')$$

11. Si tangentem centralem unum pro axi polari, et centrum pro origine coordinatarum polarium r et φ_3 accipiamus, fit

$$x_1 = r \, Cos\, \varphi_3 \quad \text{et} \quad y_1 = r \, Sin\, \varphi_3 \;, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (k)$$

quibus valoribus ex (E) eruimus

$$r^4 = a^2 r^2 \, Sin\, 2 \varphi_3$$

vel

$$\left.\begin{aligned} r^2 = 0 \quad \text{et} \quad r^2 &= a^2 \, Sin\, 2 \varphi_3 \\ &= 2 e^2 \, Sin\, 2 \varphi_3 \;, \end{aligned}\right\} (F)$$

ubi r idem est ac in systemate (B), ex qua aequatione haecce statim devolvitur, si in memoriam revocemus, ex figura

$$\varphi_3 = 45^\circ - \varphi \;, \quad \text{ergo} \quad 2 \varphi_3 = 90^\circ - 2 \varphi$$

esse. Caeterum vix opus est monere, aequationem $r^2 = 0$ nos nihil docere, nisi curvam bis transire per polum.

12. Quando axem unumque tangentem centralem pro axibus coordinatarum obliquangularum x_2 et y_2 sumamus, ita ut harum axium regiones positivae angulum 45° includant, habemus

$$y_2 \sqrt{\tfrac{1}{2}} = y \quad \text{et} \quad x_2 + y_2 \sqrt{\tfrac{1}{2}} = x \;, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (l)$$

unde, substitutione horum valorum in (A), prodit

$$(x_2{}^2 + y_2{}^2 + x_2 y_2 \sqrt{2})^2 = a^2 \cdot x_2 (x_2 + y_2 \sqrt{2}) \;, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (G)$$

vel, quia hîc rursus habemus $r^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 + x_2 y_2 \sqrt{2}$,

$$\left.\begin{aligned} r^4 &= a^2 x_2 (x_2 + y_2 \sqrt{2}) \\ &= a^2 (x_2{}^2 + x_2 y_2 \sqrt{2} + y_2{}^2) - a^2 y_2{}^2 \\ &= a^2 (r^2 - y_2{}^2) \, , \end{aligned}\right\} \text{(G')}$$

unde

$$a^2 y_2{}^2 = r^2 (a^2 - r^2) \, ,$$
$$a y_2 = r \sqrt{(a^2 - r^2)} \, .$$

13. Si in (A), loco x vel y, r utamur, erit

$$\left.\begin{aligned} r^4 &= a^2 (x^2 - y^2) \\ &= a^2 (r^2 - 2y^2) \\ &= a^2 (2x^2 - r^2) \, , \end{aligned}\right\} \text{(H)}$$

unde aequationes mixtae

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a^2 r^2 + r^4}{2a^2}} = \frac{r}{a} \sqrt{\frac{a^2 + r^2}{2}} \\ &= \frac{r}{2e} \sqrt{(2e^2 + r^2)} \, , \\ y &= \sqrt{\frac{a^2 r^2 - r^4}{2a^2}} = \frac{r}{a} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{2}} \\ &= \frac{r}{2e} \sqrt{(2e^2 - r^2)} \, . \end{aligned}\right\} \text{(H')}$$

14. Quae aequationes denique r^2 eliminando ope aequationis (B) dabunt

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{Cos\, 2\varphi} \, . \, a \sqrt{\frac{1 + Cos\, 2\varphi}{2}} = a\, Cos\, \varphi \sqrt{Cos\, 2\varphi} \, , \\ y &= \sqrt{Cos\, 2\varphi} \, . \, a \sqrt{\frac{1 - Cos\, 2\varphi}{2}} = a\, Sin\, \varphi \sqrt{Cos\, 2\varphi} \, . \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

15. Quia in aequationibus (B), (C), (D), φ functio est $r : a$, sequitur

THEOREMA V. Omnes Lemniscatae Bernouillanae sunt curvae similes, tum quodad centrum, quum quodad utrumque focum, nec non ad utrumque verticem.

§ 2.

DE TANGENTE, NORMALI, SUBTANGENTE AC SUBNORMALI.

16. Inquiramus primum in puncta Lemniscatae singularia secundum methodum a cl. P. N. Ekman in Disquisitione de punctis singularibus, Par. 1842, expositam, et ad hunc scopum aequationem (A) ita scribamus

$$\begin{aligned} u &= (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0 \end{aligned}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x\,, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 + 2a^2y\,, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2, \\ &\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24x, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 8y, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 8x\,, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 24y\,, \\ &\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} = 8\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3} = 0\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24. \end{aligned}\right\}(4)$$

Quae aequationes pro centro, ubi $x=0$, $y=0$, dabunt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +2a^2, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Igitur (cf. op. laud. Pag. 21, N°. 23) centrum est *punctum duplex*, et habemus aequationem

$$2a^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 0 - 2a^2 = 0, \text{ unde } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

igitur (cf. o . laud. pag. 21, N°. 25) ambo rami decussant se invicem in centro. Caeteroquin exinde nomen, *tangentes centrales*, quod n°. 7 proposuimus, satis responsatum videtur.

Porro habemus aequationes

$$0 + 3\left(-2a^2 \frac{\partial y}{\partial x} + 0\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{unde } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

$$0 + 4\left(2a^2 \frac{\partial y}{\partial x} + 0\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 0 + 0 + 24\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + 0 + 6.8\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 0 + 24 = 0$$

quae posterior aequatio ope (5) dat

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -12 : \frac{\partial y}{\partial x} = \mp 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

igitur in centro *inflexionem simplicem* habent ambo Lemniscatae rami, ob signum duplex (cf. op. laud. pag. 22, N°. 25).

17. Ex aequationibus (4) colligitur (op. cit. pag. 4)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x}{4x^2y + 4y^3 + 2a^2y} = -\frac{2(x^2+y^2) - a^2}{2(x^2+y^2) + a^2} \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{a^2 - 2r^2}{a^2 + 2r^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{e^2 - r^2}{e^2 + r^2} \cdot \frac{x}{y} ,\end{aligned}\right\} (7)$$

vel multiplicando fractionis denominatorem nec non numeratorem factore $(x^2 + y^2)$, ratione habita aequationis (A), prodit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a^2(x^2 - y^2) - a^2(x^2 + y^2)}{2a^2(x^2 - y^2) + a^2(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2} \cdot \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

18. Itidem habemus (cf. loc. cit.)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$= -\frac{(4x^2 + 12y^2 + 2a^2)\left(\frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 16xy\,\frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2} \cdot \frac{x}{y} + (12x^2 + 4y^2 - 2a^2)}{4x^2y + 4y^3 + 2a^2y} ,$$

qua fractione reducta et aequationis (A) ratione habita, invenimus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -3(x^2 - y^2)\left\{\frac{x^2 + y^2}{(3x^2 - y^2)\,y}\right\}^3 , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

vel, quia ex (A) sequitur

$$3x^2 - y^2 = \frac{e^2 + r^2}{e^2} r^2 \ , \quad 3y^2 - x^2 = \frac{e^2 - r^2}{e^2} r^2 \ , \quad x^2 - y^2 = \frac{r^4}{2e^2} \ , \ldots (10)$$

erit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-3e^4 r^4}{2(e^2 + r^2)^3 y^3} \ldots (11)$$

19. Pro $y = 0$ et $x = \pm a$, deducimus ex (8), $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, id est, in verticibus curvam axi sub angulo recto secari. (cf. op. laud. N°. 22, pag. 20.)

Supra jam vidimus (cf. form. (3)) y maximum fore $\frac{1}{2}e$ aequale, unde ex (A) $x = \frac{1}{2}e\sqrt{3}$; hinc $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, id est, tangens in eo curvae puncto axi parallela est. (cf. op. cit. N°. 21, pag. 17.)

20. Ex aequatione (8) sequitur, secundum Geometriae Analyticae satis notas formulas, pro aequatione *tangentis* in puncto dato, cujus coordinatae sint x_1 et y_1,

$$y - y_1 = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \text{ vel } y = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} x + \frac{x_1^4 - y_1^4}{(3x_1^2 - y_1^2) y_1} , \ . \ (12)$$

pro aequatione *normalis* ejusdem puncti

$$x - x_1 + \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \frac{x_1}{y_1} (y - y_1) = 0 \text{ vel } x + \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} y = 2x_1 \frac{x_1^2 + y_1^2}{3x_1^2 - y_1^2}; \ . \ (13)$$

pro longitudine tangentis T

$$T = \frac{y_1 \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2}\right)^2 \frac{x_1^2}{y_1^2}\right\}}}{\frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{3y_1^2 - x_1^2} , \ldots (14)$$

pro longitudine normalis N

$$N = T \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{3x_1^2 - y_1^2} , \ldots (15)$$

pro longitudine subtangentis S_t

$$S_t = y_1 : \left(\frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}\right) = \frac{3x_1^2 - y_1^2}{3y_1^2 - x_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{x_1} , \ldots (16)$$

et pro longitudine subnormalis S_n

$$S_n = y_1 \cdot \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \frac{x_1}{y_1} = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} x_1 \ldots (17)$$

Denique angulum, quem normalis cum axi facit, denotemus per ν; erit ex (7)

$$Tang\,\nu = -\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{r^2+e^2}{r^2-e^2}\,\frac{y}{x} = \frac{2e^2\,Cos\,2\varphi+e^2}{2e^2\,Cos\,2\varphi-e^2}\,Tang\,\varphi = \frac{Cos\,2\varphi+2\,Cos^2\varphi}{Cos\,2\varphi-2\,Sin^2\varphi}\,Tang\,\varphi$$

$$= \frac{Sin\,\varphi\,Cos\,2\varphi+2\,Cos^2\varphi\,Sin\,\varphi}{Cos\,2\varphi\,Cos\,\varphi-2\,Sin^2\varphi\,Cos\,\varphi} = \frac{Sin\,\varphi\,Cos\,2\varphi+Cos\,\varphi\,Sin\,2\varphi}{Cos\,2\varphi\,Cos\,\varphi-Sin\,\varphi\,Sin\,2\varphi} = \frac{Sin\,3\varphi}{Cos\,3\varphi} = Tang\,3\,\varphi\,, \quad (18)$$

unde $\nu = 3\varphi$.

21. Transeamus ad systema coordinatarum polarium

$$r^2 = a^2\ Cos\ 2\,\varphi \quad \text{(B)}$$

unde

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\,\frac{a^2\,Sin\,2\varphi}{r} \quad (19)$$

Angulo radium vectorem inter et normalem per α denotato, habemus

$$Tang\,\alpha = -\,\frac{\partial r}{r\,\partial\varphi} = \frac{a^2\,Sin\,2\,\varphi}{r^2} = \frac{a^2\,Sin\,2\,\varphi}{a^2\,Cos\,2\,\varphi} = Tang\,2\,\varphi,\ \text{unde}\ \alpha = 2\,\varphi \quad (20)$$

Porro pro longitudine subtangentis polaris ${}^{\varphi}S_t$, quam in perpendiculo e centro in radium vectorem erecto, inde a centro usque ad intersectionem cum tangente numeramus, (Vid. Fig. 2)

$${}^{\varphi}S_t = r : \frac{\partial r}{r\,\partial\varphi} = r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{-r^3}{a^2\,Sin\,2\,\varphi} = \frac{-r}{Tang\,2\,\varphi} = \frac{-r^3}{\sqrt{(a^4-r^4)}} = \frac{-a\sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{Tang\,2\,\varphi}\,, \quad (21)$$

pro longitudine tangentis polaris ${}^{\varphi}T$

$${}^{\varphi}T = \sqrt{(r^2+{}^{\varphi}S_t^2)} = \sqrt{\left(a^2 Cos\,2\,\varphi + a^2\frac{Cos\,2\,\varphi}{Tang^2\,2\,\varphi}\right)} = \frac{a\sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{Sin\,2\,\varphi} = \frac{a^2\,r}{\sqrt{(a^4-r^4)}} = \frac{r}{Sin\,2\varphi}, \quad (22)$$

pro longitudine subnormalis polaris ${}^{\varphi}S_n$

$${}^{\varphi}S_n = r\,\frac{\partial r}{r\,\partial\varphi} = \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \frac{-a^2\,Sin\,2\,\varphi}{r} = \frac{-\sqrt{(a^4-r^4)}}{r} = \frac{-a\,Sin\,2\,\varphi}{\sqrt{Cos\,2\,\varphi}}\,, \quad (23)$$

et pro longitudine normalis polaris ${}^{\varphi}N$

$${}^{\varphi}N = \sqrt{(r^2+{}^{\varphi}S_n^2)} = \sqrt{\left(a^2 Cos\,2\,\varphi + \frac{a^2\,Sin^2\,2\,\varphi}{Cos\,2\,\varphi}\right)} = \frac{a}{\sqrt{Cos\,2\,\varphi}} = \frac{a^2}{r} \quad (24)$$

22. In coordinatarum polarium systemate

$$r^3 - 4\,a\,r^2\,Cos\,\varphi + (3+2\,Cos^2\,\varphi)\,a^2\,r - 2\,a^3\,Cos\,\varphi = 0 \quad \text{(C)}$$

habemus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial\varphi} &= -\,2\,a\,Sin\,\varphi\,\frac{2\,r^2-2\,a\,r\,Cos\,\varphi+a^2}{3\,r^2-8\,a\,r\,Cos\,\varphi+(3+2\,Cos^2\,\varphi)\,a^2} \\ &= -\,a\,r\,Sin\,\varphi\,\frac{2\,r^2-2\,a\,r\,Cos\,\varphi+a^2}{r^3-2\,a\,r^2\,Cos\,\varphi+a^3\,Cos\,\varphi}\,; \end{aligned}\right\} (25)$$

qui vero pro lineis numeri praecedentis valores complicatiores dat, quam ut ullius usus essent.

23. Quod idem valet in coordinatarum polarium systemate

$$r^4 - 4\,e\,r^3\,Cos\,\varphi + 4\,e^2\,r^2 = e^4 \quad \ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

ubi fit

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = - \frac{e\,r^2\,Sin\,\varphi}{r^2 - 3\,e\,r\,Cos\,\varphi + 2\,e^2} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

24. Siquidem tangentes polares pro coordinatarum rectangularium axibus sumamus, ut in systemate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\,a^2\,x\,y\,, \quad \ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

erit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{2\,(x^2 + y^2)\,x - a^2\,y}{2\,(x^2 + y^2)\,y - a^2\,x} = - \frac{3\,x^2 - y^2}{3\,y^2 - x^2} \cdot \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

unde colligimus aequationem *tangentis*

$$y - y_1 = - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} (x - x_1), \text{ vel } y = - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}\,x + 2\,y_1\,\frac{x_1{}^2 + y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2}\,, \quad (28)$$

aequationem *normalis*

$$(x - x_1) - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} (y - y_1) = 0, \text{ vel } x - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}\,x = \frac{x_1{}^4 - y_1{}^4}{(3\,y_1{}^2 - x_1{}^2)\,x_1}\,; \quad (29)$$

et porro pro longitudine tangentis T'

$$T' = \frac{y_1 \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2}\right)^2 \frac{y_1{}^2}{x_1{}^2}\right\}}}{\frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}} = \frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}\,, \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

pro longitudine normalis N'

$$N' = T'\,\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2}\,, \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

pro longitudine subtangentis S_t'

$$S_t' = y_1 : - \left(\frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}\right) = - \frac{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2}{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}\,x_1\,, \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

et pro longitudine subnormalis S'_n

$$S'_n = y_1 \cdot - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} = - \frac{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2}{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2} \cdot \frac{y_1{}^2}{x_1} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

25. Pro y maximo ex (27) venit $3\,x^2 - y^2 = 0$, $y^2 = 3\,x^2$, unde ope (E) $(4x^2)^4 = 4\,a^4\,x^2\,3\,x^2$, et $x = \frac{1}{2}\,a \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $y = \frac{1}{2}\,a \sqrt[4]{\frac{27}{4}}$.

Pro x maximo ex (27) sequitur $3y^2 - x^2 = 0$, $x^2 = 3y^2$, unde ope (E) $(4y^2)^4 = 4a^2y^2\,3y^2$ et $y = \frac{1}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $x = \frac{1}{2}a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$.
x et y igitur si quidque maximum fiat, valores inter se permutantur, unde etiam liquidum fit, pro utroque puncto esse

$$r^2 = \tfrac{1}{4}a^2\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}\right) = \tfrac{1}{4}a^2\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)(1+3) = a^2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,,\; r = a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}\;,$$

ubi r idem radius vector est, ac in systemate B.

Praeterea ex (30) et (32) colligimus pro x vel y maximo, valores y et x correspondentes curvae tangentes esse, unde

THEOREMA VI. Lemniscatae tangentes, tangentibus centralibus parallelae, cum hisce tangentibus centralibus quadratum efficiunt, curvae lemnisco circumscriptum, cujus latera sunt $\frac{1}{2}\,a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$. (vid. Fig. 3).

Quod etiam sequitur ex trianguli in C rectanguli angulis O et D ambobus semi-recto aequalibus, unde $CD = OC$. Quia porro quadrilateri anguli singuli recto aequales sunt, ipsum necesse quadratum fit.

26. Priusquam progredimur operae pretium est inventa applicare ad vertices ac ea puncta, ubi tangens axi vel tangenti centrali parallela est.
In vertice est:

$$y = 0\,,\ x = a\,,\ r = a\,,\ \varphi = 0\,,\ N = \tfrac{1}{3}a\,,\ T = S_t = S_n = 0\,,\ {}^{\varphi}N = a\,,\ {}^{\varphi}S_t = {}^{\varphi}T = \infty,\ {}^{\varphi}S_n = 0. \quad (34)$$

In puncto, ubi tangens axi parallela est, habemus

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}e\,,\ x = \frac{1}{2}e\sqrt{3}\,,\ r = e\,,\ \varphi = \frac{1}{2}\,Arc.\,Cos\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\,60° = 30°, \\ T = \infty\,,\ N = \frac{1}{2}e,\ S_t = \infty\,,\ S_n = 0\,,\ \alpha = 60°,\ {}^{\varphi}S_t = -\frac{1}{3}e\sqrt{3}\,,\ {}^{\varphi}T = \frac{2}{3}e\sqrt{3}, \\ {}^{\varphi}S_n = -e\sqrt{3},\ {}^{\varphi}N = 2e, \end{array}\right\} (35)$$

In puncto, ubi tangens tangenti centrali parallela est, fit

$$\left.\begin{array}{l} r = a\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\ \varphi = \frac{1}{2}\,Arc.\,Cos\,\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}.\,30° = 15°,\ x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,,\ y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \\ T = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,,\ N = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,,\ S_t = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,,\ S_n = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \\ {}^{\varphi}T = 2a\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\ {}^{\varphi}S_t = -a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\,,\ {}^{\varphi}S_n = \frac{1}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\,,\ {}^{\varphi}N = a\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\;. \end{array}\right\} (36)$$

27. Ex illis, quae hucusque exposuimus, theoremata sequuntur, attentione forsan non prorsus indigna, quorum primum a VECHTMANN in Diss. cit. pag. 21 suo modo deducitur.

THEOREMA VII. Angulus, quem normalis cujusvis Lemniscatae puncti cum axi efficit, triplo major est quam ille, quem radius vector ejusdem puncti cum axi includit. (cf. form. (18)).

THEOREMA VIII. Angulus cujusvis puncti normalem inter et radium vectorem duplo major est quam ille, quem axis cum eodem radio vectore facit. (cf. Theorema VII et form. (20)).

THEOREMA IX. Semi-axis Lemniscatae media proportionalis est tangentem polarem inter et subnormalem cujuscunque curvae puncti, quando centrum et axis curvae sunt polus et axis coordinatarum polarium. (cf. form. (22) et (23)).

THEOREMA X. Pro iisdem coordinatis, Lemniscatae semi-axis media proportionalis est radium vectorem inter et normalem cujusvis curvae puncti. (cf. form. (24)).

THEOREMA XI. Pars semi-axis, inde a centro usque ad ejus intersectionem cum cujusvis Lemniscatae puncti normali, est $P = r_1 \frac{Sin\, 2\, \varphi_1}{Sin\, 3\, \varphi_1}$ (cf. Theorem. VII et VIII).

28. Exposita quoque ducunt ad solutionem

PROBLEMATIS I. Ad aliquod Lemniscatae punctum tangens nec non normalis ducatur.

SOLUTIO 1. Ex Theoremate VII devolvitur et a VECHTMANN op. laud. pag. 21, proponitur. Per punctum datum enim si rectam ducamus, quae cum axi faciat angulum triplicem anguli, radium vectorem hujus puncti inter et axin contenti, linea illa normalis erit, lineaque ei in puncto dato perpendicularis tangens. (vid. Fig. 4.).

29. SOLUTIO 2. Quae ex Theoremate X deducitur, sed mihi nullibi obvia erat. In radii vectoris prolongatione, inde a centro partem sumas semi-axi aequalem, et ex ejus fine ad axem rectam ducas rectae parallelam, e vertice ad punctum datum ductae; recta ita in axi praecisa, e puncto dato circuli arcum ducas, qui perpendiculum e centro in radium vectorem erectum in duobus punctis secabit, quorum unum cum puncto dato conjungendum est, ut normalem habeas. (Quae selectio in figura minime erit difficilis.) (vid. Fig. 4.).

30. SOLUTIO 3. Quam petimus ex methodo tangentes ducendi, quam cel. STEINER pro Cassinoidibus, curvarum genere Lemniscatam quoque continente, proponit in Diario Journal von

CRELLE, Tomo XIV, pag. 80, puta: Punctum datum cum focis duobus jungas, et in hasce lineas e focis perpendicula erigas, tunc linea per punctum transiens, quae illis perpendiculis ita secatur, ut intersectionum distantiae ad punctum datum eaedem sint, erit tangens.

Sint enim coordinatae puncti dati P, x_1 et y_1, tunc notae sunt aequationes linearum, quae per P et F transit

$$y = \frac{y_1}{x_1 - e}(x - e),$$

quae per P et F′ transit

$$y = \frac{y_1}{x_1 + e}(x + e),$$

quae per F in PF perpendicularis est

$$y = -\frac{x_1 - e}{y_1}(x - e), \quad \ldots \ldots \quad (m)$$

quae per F′ in PF′ perpendicularis est

$$y = -\frac{x_1 + e}{y_1}(x + e) \quad \ldots \ldots \quad (n)$$

quae in P curvam tangit

$$y = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} x + \frac{x_1^4 - y_1^4}{(3x_1^2 - y_1^2)y_1} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Coordinatae intersectionis (12) inter et (m) inveniuntur

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{(3x_1^2 - y_1^2)(ex_1 - e^2) - (x_1^4 - y_1^4)}{2(x_1^2 + y_1^2)x_1 - (3x_1^2 - y_1^2)e}, \\ y_2 &= \frac{(x_1^4 - y_1^4) + (3y_1^2 - x_1^2)ex_1}{2(x_1^2 + y_1^2)x_1 - (3x_1^2 - y_1^2)e} \cdot \frac{x_1 - e}{y_1}. \end{aligned}\right\} (37)$$

Coordinatae intersectionis (12) inter et (n) inveniuntur

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -\frac{(3x_1^2 - y_1^2)(ex_1 + e^2) + (x_1^4 - y_1^4)}{2(x_1^2 + y_1^2)x_1 + (3x_1^2 - y_1^2)e}, \\ y_3 &= \frac{(x_1^4 - y_1^4) - (3y_1^2 - x_1^2)ex_1}{2(x_1^2 + y_1^2)x_1 + (3x_1^2 - y_1^2)e} \cdot \frac{x_1 + e}{y_1}. \end{aligned}\right\} (38)$$

Nunc distantiae aequales esse debent punctum datum inter et intersectionem (12) tum cum (m), quum cum (n), unde colligitur

$$2x_1 = x_2 + x_3, \qquad 2y_1 = y_2 + y_3,$$

quibus aequationibus valores (37) et (38) revera cum satisfaciant, solutio vera erit. Praeterea ex hisce aequationibus eruimus

$$x_2 - x_3 = 2\,\frac{e^2 + x_1{}^2 + y_1{}^2}{e}\,, \qquad y_2 - y_3 = \frac{e^2 - x_1{}^2 - y_1{}^2}{e} \cdot \frac{2x_1}{y_1}\,;$$

unde pro tangentis ipsius, intra duo perpendicula contenti, longitudine

$$T = \sqrt{\{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\}} = \frac{2e}{y_1}\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)} = \frac{2er_1}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Denique coordinatas intersectionis (m) inter et (n) colligimus

$$x_4 = -x_1\,, \qquad y_4 = \frac{x_1{}^2 - e^2}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Problema igitur solvere possumus constructione valorum (37), vel valorum (38); quo casu enim punctum constructum puncto dato si conjungamus, tangentem trahimus. — Multo autem facilior constructio prodit ex form. (39) sequens:

In ordinatae prolongatione inde a puncto dato partem sumas excentricitati aequalem, ex cujus fine linea, axi parallela ducta, radii vectoris prolongationem secabit; cum distantia hanc intersectionem inter et punctum datum ex ipso puncto circuli arcus ducas, qui perpendiculares memoratas in duobus punctis secabunt, quorum duo per lineam, punctum datum continentem, cum jungas, tangentem construxeris. (vid. Fig. 4.).

31. SOLUTIO 4. Quam methodum nos docuit ill. L. J. Magnus in Diario Journal von Crelle, Tomo IX, pag. 135, in

THEOREMATE XII. Duo perpendicula per mediam excentricitatem in axem eriges, nec non perpendiculum in medium radium vectorem; ulterioris intersectiones cum duobus prioribus jungas cum puncto dato; linearum, quae angulum inter hasce lineas bisecant, altera est tangens, altera normalis. (vid. Fig. 5.).

Aequatio enim radii vectoris est

$$y = \frac{y_1}{x_1}\,x\,,$$

lineae, in eum medium perpendicularis,

$$y - \tfrac{1}{2}y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\,(x - \tfrac{1}{2}x_1)\,;$$

cujus intersectiones cum perpendiculis in mediam excentricitatem coordinatas habent

pro

$$x_2 = \tfrac{1}{2} e \quad , \quad y_2 = \frac{(x_1^2 + y_1^2) - e x_1}{2 y_1},$$

et pro

$$x_3 = -\tfrac{1}{2} e \quad , \quad y_3 = \frac{(x_1^2 + y_1^2) + e x_1}{2 y_1}.$$

Aequationes linearum haecce puncta cum puncto dato jungentium erunt

$$y - y_1 = \frac{-e x_1 + (x_1^2 - y_1^2)}{(e - 2 x_1) y_1} (x - x_1), \text{ et } y - y_1 = \frac{-e x_1 - (x_1^2 - y_1^2)}{(e + 2 x_1) y_1} (x - x_1),$$

unde si aequationem lineae, angulum inter hasce lineas vel prolongationem utrius bisecantis,

$$y - y_1 = P (x - x_1)$$

ponamus, erit

$$P = \frac{(-x_1^6 + 15 x_1^4 y_1^2 - 15 x_1^2 y_1^4 + y_1^6) \pm (x_1^6 + 3 x_1^4 y_1^2 + 3 x_1^2 y_1^4 + y_1^6)}{-2 x_1 y_1 (3 x_1^2 - y_1^2)(3 y_1^2 - x_1^2)},$$

unde, aut

$$P = -\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{3 x_1^2 - y_1^2}{3 y_1^2 - x_1^2}, \text{ coefficiens pro normali },$$

aut

$$P = +\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{3 y_1^2 - x_1^2}{3 x_1^2 - y_1^2}, \text{ coefficiens pro tangenti prodit.}$$

32. **SOLUTIO 5.** Quam deinde ex opusculo petivimus ab J. A. SERRET, in Diario Journal de LIOUVILLE, Anni 1846, Tomo XI, pag. 89, publici juris facto, ubi est

THEOREMA XIII. Triangulum construas supra radium vectorem e foco ad punctum datum divergentem ut basem, cum excentricitate et semi-axi ut lateribus, respective e foco et puncto dato divergentibus, (quod semper fieri potest, quia semi-axis et excentricitatis summa ac differentia limites sunt ejus radii vectoris); triangulus erit duplex, utrique circulum circumscribas; unius quorum centrum cum puncto dato conjungendo tangentem trahes. Nec erit difficilis selectio inter duos triangulos, quod pro tota curva eundem situm respectivum servant. (vid. Fig. 6.).

Sit χ angulus normalem inter et radium vectorem, erit

$$Cot\, \chi = -\frac{r\, \partial \varphi}{\partial r},$$

quae ibi, quum systemate *D* uti debemus, ope form. (26) fit

$$Cot\ \chi = \frac{r^2 - 3er\,Cos\varphi + 2e^2}{e\,r\,Sin\,\varphi}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Sit in figura PN perpendiculum e P in PC erectum, et nomines $\angle PFQ = \alpha$ et $\angle FPQ = \beta$. Erit

$$\angle NPQ = \tfrac{1}{2} PCQ = 180° - PFQ = 180 - \alpha\,,$$
$$\angle FPQ = \beta\,,$$

unde

$$\angle NPF = 180° - (\alpha + \beta)\,.$$

Porro ex triangulo FPQ colligimus

$$\frac{PQ}{Sin\,PFQ} = \frac{QF}{Sin\,QPF} = \frac{PF}{Sin\,PQF}, \text{ vel ob horum valores}$$

$$\frac{e\sqrt{2}}{Sin\,\alpha} = \frac{e}{Sin\,\beta} = \frac{r}{Sin\,(\alpha+\beta)}\,,$$

unde

$$r = \frac{e\ Sin\ (\alpha + \beta)}{Sin\ \beta}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

et

$$Sin\,\alpha = Sin\,\beta\,\sqrt{2}\,,\ Sin^2\alpha = 2\,Sin^2\beta\,,\ Cos^2\alpha = Cos\,2\beta \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Denique in Theoremate XCI probabimus esse

$$\varphi = \alpha - 2\beta\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (185)$$

unde

$$\begin{aligned} Cos\,\varphi.\,Sin\,\beta &= Sin\,\beta.\ Cos\,\alpha.\ Cos\,2\,\beta + Sin\,\alpha.\ Cos\,\beta.\,2\ Sin^2\,\beta \\ &= Sin\ (\alpha+\beta) - Sin\,\alpha.\ Cos\,\alpha.\ Cos\ (\alpha-\beta)\,, \\ Sin\,\varphi.\,Cos\,\beta &= Cos\,\beta.\ Sin\,\alpha.\ Cos\,2\,\beta + Cos\,\alpha.\ Cos\,\beta.\,2\ Sin^2\,\beta \\ &= -\ Sin\,\alpha.\ Cos\,\alpha.\ Sin\ (\alpha-\beta)\ ; \end{aligned}$$

quibus in valore (41) substitutis, evadit

$$Cot\ \chi = \frac{e^2\dfrac{Sin^2\,(\alpha+\beta)}{Sin^2\,\beta} - 3\,e^2\dfrac{Sin\,(\alpha+\beta)}{Sin\,\beta}\cdot\dfrac{Sin\,(\alpha+\beta) - Sin\,\alpha.\,Cos\,\alpha.\,Cos\,(\alpha-\beta)}{Sin\,\beta} + 2\,e^2}{e^2\dfrac{Sin\,(\alpha+\beta)}{Sin\,\beta}\cdot\dfrac{-Sin\,\alpha.\,Cos\,\alpha.\,Sin\,(\alpha-\beta)}{Sin\,\beta}}$$

$$= \frac{-\,2\,Sin^2\,(\alpha+\beta) + 3\,Sin\,\alpha.\,Cos\,\alpha.\,Sin\,(\alpha+\beta).\,Cos\,(\alpha-\beta) + 2\,Sin^2\,\beta}{-\,Sin\,\alpha.\ Cos\,\alpha.\,Sin\,(\alpha-\beta).\,Sin\,(\alpha+\beta)}\,,$$

$$Cot\,\chi = \frac{3\,Sin\,\alpha.\,Cos\,\alpha.\,(\frac{1}{2}\,Sin\,2\,\alpha + \frac{1}{2}\,Sin\,2\,\beta) - 2\,Sin\,(\alpha + 2\,\beta).\,Sin\,\alpha}{-\,Sin\,\alpha.\,Cos\,\alpha.\,Sin\,(\alpha - \beta).\,Sin\,(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\,Cos\,\alpha.\,(Sin\,2\,\alpha + Sin\,2\,\beta) - 2\,(Sin\,\alpha.\,Cos^2\,\alpha + Cos\,\alpha.\,Sin\,2\,\beta)}{-\,Cos\,\alpha.\,Sin\,(\alpha - \beta).\,Sin\,(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{Sin\,2\,\alpha.\,(\frac{3}{2} - 1) + Sin\,2\,\beta.\,(\frac{3}{2} - 2)}{-\,Sin\,(\alpha - \beta).\,Sin\,(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,.\,2\,Sin\,(\alpha - \beta).\,Cos\,(\alpha + \beta)}{-\,Sin\,(\alpha - \beta).\,Sin\,(\alpha + \beta)} = -\,Cot\,(\alpha + \beta) = Cot\,\mathrm{NPF}\,,$$

ergo

$$\mathrm{NPF} = \chi\,,$$

unde sequitur **PN** normalem, et **PC** tangentem esse.

33. SOLUTIO 6. Quae sequitur ex

THEOREMATE XIV. Quod mihi in perscrutatione obvium erat, et intimum habet connexum cum Theoremate LXXXIX. Si ex puncti dati medio radio vectore perpendiculum erigas, cujus intersectionem cum radio vectore, ab altera axeos parte cum ea eundem angulum efficiente ac primus radius vector, cum puncto dato jungens, normalem construxeris. (vid. Fig. 1.).

Est enim secundi radii vectoris aequatio

$$y = -\frac{y_1}{x_1}\,x\,,$$

et perpendiculi in medium primum radium vectorem erecti aequatio

$$y - \tfrac{1}{2}y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\,(x - \tfrac{1}{2}x_1)\,,$$

vel

$$y = -\frac{x_1}{y_1}\,x + \frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{2\,y_1}\,;$$

quorum intersectionis coordinatae sunt

$$x_2 = \frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{x_1^{\,2} - y_1^{\,2}}\,.\,\frac{x_1}{2}\,,\qquad y_2 = -\,\frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{x_1^{\,2} - y_1^{\,2}}\,.\,\frac{y_1}{2}\,;$$

unde lineae, quae hoc punctum cum puncto dato conjungit, aequatio fit

$$y - y_1 = \frac{y_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{y_1}{2}}{x_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{2}} \cdot (x - x_1)$$

$$= -\frac{3x_1^2 - y_1^2}{3y_1^2 - x_1^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} \cdot (x - x_1),$$

eadem ac aequatio (13).

34. **SOLUTIO 7.** Quae sequitur ex Lemniscatae generationis modo, cujus in Theoremate XCII mentio fit, et qui occasionem dat, (cf. GRUNERT's Archiv, Tom. VIII, pag. 50) in Lemniscatam applicandi methodum, a celeberrimo geometrico ABEL TRANSON Anno 1844 propositam et a clar. STEGMANN in GRUNERT's Archiv, Tomo VII, pag. 48, collustratam. Inde sequitur

THEOREMA XV. E Lemniscatae focis cum radio $\frac{1}{2}a$ aequali duos circulos ducas, tertiumque e puncto dato cum radio, excentricitati aequali, cujus cum duobus prioribus intersectiones illas, R_1, R_2, quae cum puncto dato in recta sitae sunt, cum foco, ad quem pertinent, jungas, harum linearum intersectionem R_3 cum puncto dato colliges; tunc normalem construxeris. (vid. Fig. 7.).

35. Ex hujus problematis solutionibus tertia et quinta haecce profluunt Theoremata

THEOREMA XVI. Punctum Lemniscatae quodvis si jungas cum duobus focis, et in illos radios vectores e focis perpendicula erigas, tangens, inde a puncto dato usque ad utramque intersectionem cum hisce perpendiculis, eandem habet longitudinem, et quidem quarta proportionalis est ad ordinatam, radium vectorem e centro divergentem et excentricitatem. (cf. form. (39)).

THEOREMA XVII. Punctum, ubi duo illa perpendicula concurrunt, abscissam habet, abscissae puncti dati aequalem, negativo vero signo praeditam: ordinata contra quarta proportionalis est ad puncti dati ordinatam et partes, in quas focorum distantia ab ordinatae ulterius pede dividitur. (cf. form. (40)).

THEOREMA XVIII. Circulus, qui per punctum datum duosque focos transit, in altera extremitate diametri, e puncto dato ducti, horum perpendiculorum intersectionem

continet (ob illa perpendicula cum radiis vectoribus angulos rectos efficientia), et chorda e perpendiculorum intersectione axi parallela ducta, in ordinatae puncti dati prolongatione secatur. (vid. Fig. 4.).

THEOREMA XIX. Circuli Theorematis praecedentis radius tertia proportionalis est ad puncti dati ordinatam et dimidium semi-axis.

Est enim, (vid. Fig. 4.), radius ille

$$CF' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2\}}, \text{ vel ex form. (40)}$$

$$CF' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{(2x_1)^2 + \left(\frac{x_1^2 - y_1^2 - e^2}{y_1}\right)^2\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{4x_1^2 + \frac{(x_1^2 - y_1^2)^2}{y_1^2} - \frac{2e^2(x_1^2 - y_1^2)}{y_1^2} + \frac{e^4}{y_1^2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{y_1^2} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{y_1^2} + \frac{e^4}{y_1^2}\right\}} = \tfrac{1}{2}\frac{e^2}{y_1} = \frac{(\tfrac{1}{2}a)^2}{y_1}.$$

THEOREMA XX. Supra radium vectorem e foco divergentem triangulum construas cujus latera, excentricitati et semi-axi aequalia, respective e foco et puncto dato convergant, et angulos hisce oppositos β et α nomines; habebis formulas

$$r = \frac{e \, Sin\,(\alpha + \beta)}{Sin\,\beta} \quad \text{. . . . . (42)}$$

$$Sin^2\,\alpha = 2\,Sin^2\,\beta\,, \quad Cos^2\,\alpha = Cos\,2\,\beta \quad \text{. . . . . (43)}$$

36. Transeamus ad

PROBLEMA II. Ad Lemniscatam tangens ducatur alicui lineae datae parallela.

SOLUTIO, e Theoremate VII profluens, etiam a Vechtmann, op. cit. pag. 21, datur, nimirum, quod perpendiculo e centro in lineam datam demisso, et angulo hoc perpendiculum inter et axem trisecto, anguli triens, ab una parte axi incumbens, pro altero latere radium vectorem puncti quaesiti habebit, quod punctum, ut posthac § 7 monstrabimus, curva non constructa, separatim construi potest. Per quod punctum lineam, lineae datae parallelam, ductam, tangentem esse, perspicuum est.

Elucet hocce problema intimum cum anguli trisectionis problemate connexum habere, ita quidem, ut, altero soluto, alterum solvere facilis sit negotii.

37. Praeter tangentem modo descriptam, aliae quoque adsunt. Primo quidem si radium vectorem prolongemus usque ubi quadrantem oppositum secet, et per intersectionem quoque lineae datae parallelam ducamus, haecce pro eo curvae puncto tangens etiam erit; quod facile concluditur ex curvae symmetria, nec non ex aequatione (8) eadem manente, si x_1 et y_1 simul negativa sumamus.

Porro nihil impedit, quominus pro angulo trisecando prioris (quam 3φ vocabimus) supplementum sumamus, ideo $180° - 3\varphi$, unde radius vector puncti quaesiti cum altera axis regione angulum $60° - \varphi$ faciet. Exinde perspicimus pro

$$\varphi < 15° \quad \text{et} \quad 3\varphi < 45°$$

huncce radium vectorem cum axe angulum 45° majorem facere, ergo curvam non secare, quo casu igitur duae tantum tangentes adsunt. Pro φ majore quam 15°, quatuor habemus tangentes parallelas, nam radium vectorem postremum quoque prolongando quartum punctum acquirimus.

Quae exposita conjungere possumus in

THEOREMATE XXI. Quando tangens cujusvis Lemniscatae puncti tangentium centralium eas partes secat, quae ad eundem lemniscum pertinent, una praeterea tangens adest ei parallela.

Si contra ejus cum tangentibus centralibus intersectiones in eadem quodad axin regione sitae sint, tres ei parallelae tangentes exstant in punctis, quorum bina in oppositis ejusdem radii vectoris extremitatibus sita sunt, angulo inter duos radios vectores 60° aequivalente. (vid. Fig. 8.).

38. Exinde patet difficultates problematis, tangentem alicui lineae datae parallelam ducendi, prorsus evanescere, si linea ipsa jam Lemniscatam tetigerit. Quo casu enim radium vectorem puncti contactus usque ad quadrantem oppositum prolongare, nec non per centrum lineam ducere debemus, quae cum illo radio vectore angulum 60° aequalem, axem includentem, faciat, quae, utrum radius vector verus an imaginarius sit, ex dictis patebit.

E nexu invento angulorum, duobus illis radiis vectoribus, quos r_1, r_2 vocabimus, cum axi inclusorum, quod nempe eorum summa 60° aequalis sit, profluit quoque inter radios vectores ipsos simplex relatio.

Habemus enim

$$r_1^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_1 \,, \quad r_2^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_2 \,, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 60° ;$$

ergo

$$r_2^2 = a^2 (Cos\,120^\circ.\ Cos\,2\varphi_1 + Sin\,120^\circ.\ Sin\,2\varphi_1) = \tfrac{1}{2} a^2 (Sin\,2\varphi_1 \sqrt{3} - Cos\,2\varphi_1)\ ,$$

unde

$$(r_2^2 + \tfrac{1}{2} r_1^2)^2 = \tfrac{3}{4} a^4 \left(1 - \frac{r_1^4}{a^4}\right) = \tfrac{3}{4} (a^4 - r_1^4),\ \text{et}$$

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = \tfrac{3}{4} a^4 = 3 e^4 \quad \ldots \quad (44)$$

Quae hic de tangentibus parallelis exposuimus, partim invenies in Diss. cit. a VECHTMANN, pag. 22, alio, forsan minus naturali, modo deducta.

§ 3.

DE RADIO CURVATURAE ET EVOLUTA.

39. Formulae pro angulo contingentiae τ, radio curvaturae ρ, centrique osculationis coordinatis ξ & η, hic fiunt, ope aequationum (8) et (9), nec non (H'),

$$Tang\,\tau = \frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2}\cdot\frac{x}{y}, \qquad (45)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho = \pm\frac{\left\{1+\left(\frac{3y^2-x^2}{3x^2-y^2}\right)^2\cdot\frac{x^2}{y^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{-3(x^2-y^2)\left\{\frac{x^2+y^2}{(3x^2-y^2)y}\right\}^3} &= \frac{(x^2+y^2)^{\frac{9}{2}}}{3(x^2-y^2)(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3(x^2-y^2)}\\ &= \frac{a^2}{3\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{a^2}{3r},\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \frac{\frac{\partial y}{\partial x}\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{2x^3}{3(x^2-y^2)} = \frac{2a^2x^3}{3r^4} = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3ar\sqrt{2}} = \frac{2a^2\,Cos^3\varphi}{3r},\\ \eta &= y + \frac{1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{-2y^3}{3(x^2-y^2)} = \frac{-2a^2y^3}{3r^4} = \frac{-(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3ar\sqrt{2}} = \frac{-2a^2\,Sin^3\varphi}{3r}.\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

40. Inquiramus an circulus osculationis Lemniscatam alicubi secet. Est hujus circuli aequatio polaris, in systemate (B),

$$r^2 - 2(\xi\,Cos\,\varphi + \eta\,Sin\,\varphi) + \xi^2 + \eta^2 - \rho^2 = 0$$

vel harum valoribus ex (46) & (47) substitutis,

$$r^2 - \frac{4a^2}{3r_1}(Cos^3\varphi_1 . Cos\varphi - Sin^3\varphi_1 . Sin\varphi)\, r + \frac{r_1^2}{3} = 0 \qquad (48)$$

Pro puncto intersectionis, si adsit, sint coordinatae polares r_2, φ_2 ; simul esse debet

$$r_2^2 - \frac{4a^2}{3r_1}(Cos^3\varphi_1 . Cos\varphi_2 - Sin^3\varphi_1 . Sin\varphi_2)\, r_2 + \frac{r_1^2}{3} = 0, \text{ et } r_2^2 = a^2 Cos\, 2\varphi_2 ,$$

unde

$$\left(r_2^2 + \frac{r_1^2}{3}\right)^2 = \frac{16a^4}{9r_1^2}(Cos^3\varphi_1 . Cos\varphi_2 - Sin^3\varphi_1 . Sin\varphi_2)^2\, r_2^2 ,$$

vel

$$(3\, Cos\, 2\varphi_2 + Cos\, 2\varphi_1)^2\, Cos\, 2\varphi_1 = 16\,(Cos^3\varphi_1 . Cos\varphi_2 - Sin^3\varphi_1 . Sin\varphi_2)^2\, Cos\, 2\varphi_2 ,$$

unde

$$2\, Sin^3 2\varphi_1 . Sin\, 2\varphi_2 . Cos\, 2\varphi_2 = -Cos^2 2\varphi_2 . Cos\, 2\varphi_1 (1 + 2\, Sin^2 2\varphi_1) + 2\, Cos\, 2\varphi_2 - Cos^3 2\varphi_1 ;$$

unde quadrando

$$Cos^4 2\varphi_2\, (4 - 3\, Cos^2 2\varphi_1) - 4\, Cos^3 2\varphi_2 . Cos\, 2\varphi_1\, (3 - 2\, Cos^2 2\varphi_1)$$
$$+ 6\, Cos^2 2\varphi_2 . Cos^2 2\varphi_1\, (2 - Cos^2 2\varphi_1) - 4\, Cos\, 2\varphi_2 . Cos^3 2\varphi_1 + Cos^6 2\varphi_1 = 0 ;$$

vel, si ponas $Cos\, 2\varphi_2 : Cos\, 2\varphi_1 = r_2^2 : r_1^2 = p$, erit

$$0 = 4p\,(p^3 - 3p^2 + 3p - 1) - Cos^2 2\varphi_1\, (3p^4 - 8p^3 + 6p^2 - 1)$$
$$= 4p\,(p-1)^3 - Cos^2 2\varphi_1\, (p-1)^3 (2p+1) = (p-1)^3 \left\{4p - (3p+1)\, Cos^2 2\varphi_1\right\} .$$

Trium factorum

$$p - 1 = 0 \text{ , vel } p = 1$$

duo indicant osculationem vel contactum secundi ordinis, tertius vero in eodem puncto Lemniscatae et circuli osculatorii intersectionem notat. Quartam vero intersectionem, si exstet rationalis, petere debemus e quarto factore, nempe

$$4p - (3p+1)\, Cos^2 2\varphi_1 = 0 , \quad \text{unde } p = \frac{Cos^2 2\varphi_1}{4 - 3\, Cos^2 2\varphi_1} ,$$

vel ob valorem p

$$r_2^2 = \frac{r_1^2 a^2 Cos^2 2\varphi_1}{4a^2 - 3a^2 Cos^2 \varphi_1} = \frac{r_1^4}{4a^2 - 3r_1^2} \qquad (49)$$

Unde prodit

THEOREMA XXII. Circulus osculationis cujusvis Lemniscatae puncti in eodem puncto curvam intersecat, nec non in puncto, cujus radius vector est

$$r_2 = \frac{r_1^2}{\sqrt{(4a^2 - 3r_1^2)}}$$

41. Non abs re esse puto, circuli osculatorii elementa pro quatuor illis punctis notandis, iisdem ac in n°. 26, determinare. Erit

pro centro, ubi $r = 0$, $\rho = \infty$, $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, $r_2 = 0$ . . . . . . (50)

» vertice, » $r = a$, $\rho = \frac{1}{3}a$, $\xi = \frac{2}{3}a$, $\eta = 0$, $r_2 = a$ . . . . . . (51)

» $\varphi = 30°$, et $r = e$, $\rho = \frac{2}{3}e$, $\xi = \frac{1}{2}e\sqrt{3}$, $\eta = \frac{1}{6}e$, $r_2 = e\sqrt{^1}$ . . . . (52)

» $\varphi = 15°$, » $r = a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $\rho = \frac{1}{3}a\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$, $\xi = \frac{7+4\sqrt{3}}{12\sqrt[4]{3}}a$, $\eta = \frac{7-4\sqrt{3}}{12\sqrt[4]{3}}a$, $r_2 = a\sqrt{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{8+3\sqrt{3}}{37}\right)}$.

(53)

Ex form. (51) elucet, in vertice Lemniscatam inter et circulum osculatorium contactum esse quarti ordinis.

42. Exposita quoque ducunt ad

THEOREMA XXIII. Normalis polaris in systemate (B) cujusvis Lemniscatae puncti, triplici ejusdem puncti radio curvaturae aequalis est. (cf. form. (24) et (46).).

THEOREMA XXIV. Ratio inter centri osculationis coordinatas tertiae potentiae rationis inter correspondentis puncti curvae coordinatas aequalis est, signo mutato. (cf. form. (47).).

43. Nunc solvere possumus

PROBLEMA III. Pro quocunque Lemniscatae puncto centrum osculationis construas.

SOLUTIO 1. Ex Theoremate XXIII devolutam, apud Vechtmann, Diss. laud. pag. 24, alio vero modo derivatam, invenies.

Inde a puncto dato si tertiam radii vectoris partem sumas, ex cujus trientis fine perpendiculum in normalem demittendo, in ea centrum osculationis determinas. (cf. Theorema XXIII et Fig. 2.).

44. SOLUTIO 2. Sequitur ex illis, quae L. J. Magnus in Diario Journal von Crelle, Tomo IX, pag. 135, absque demonstratione, exponit, nempe ex

THEOREMATE XXV. Circulum construas, curvam in puncto dato P_1 tangentem, ita ut cum curva duas alias intersectiones P_2, P_3 habeat, per quas et centrum secundum circulum ducas; tertium construas circulum, qui, per punctum datum P_1 transiens,

secundum circulum in curvae centro tangat, qui circulus curvam alicubi in P_4 secabit, per quam intersectionem et punctum datum quartum ducas circulum, ita ut primum in puncto dato tangat: hic erit circulus osculationis. (vid. Fig. 9.).

Hujus Theorematis demonstratio ex Theoremate XCIV petenda est.

Si nempe duos circulos, per duo illa puncta eadem, P_1, quae ad contactum secundi ordinis pertinent, ducas, quorum primi (quem circulum osculationis assumamus) cum curva puncta communia sint punctum intersectionis in contactu P_1, et P_4: secundus vero puncta P_2 et P_3 cum curva communia habeat; per P_1, P_4 et 0, item per P_2, P_3 et 0 circulos ducas; hi secundum Theorema citatum sese in curvae centro tangent. Hinc necessario rursus sequitur ex hac conditione in Theoremate XXV satisfacta, primum circulum, qui per P_4 transit, circulum osculationis esse.

45. SOLUTIO 3. Haec sequitur ex illis, quae n°. 113 exponemus, (cf. n°. 34.), ita ut secundum methodum clar. ABEL TRANSON (cf. GRUNERT's Archiv, Tom. VII, pag. 55.) habeamus

THEOREMA XXVI. Secundum ea, quae in Theoremate XV exposuimus, si normalem construxissemus, in lineis $R_1 R_3$, $R_2 R_3$, partes sumamus $R_1 R_4$, $R_2 R_5$, quae respective tertiae sint proportionales ad e et $R_1 R_3$, e et $R_2 R_3$. Perpendiculorum ex punctis R_4, R_5, in respectivos radios erectorum intersectio sit R_6, e qua in normalem PR_3 perpendiculum $R_6 R_7$ demittas, tunc radius osculationis PR_8 tertia erit proportionalis ad PR_7 et PR_3. (vid. Fig. 7.).

46. Eliminatum r inter aequationes (47), habemus

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^4 + 3r^4}{9r^2}\,,\quad \xi^2 - \eta^2 = \frac{3a^4 + r^4}{9a^2}\,,$$

unde

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = \frac{[a^4 + 3\{(\xi^2 - \eta^2)\,9a^2 - 3a^4\}]^2}{81\{(\xi^2 - \eta^2)\,9a^2 - 3a^4\}} = \frac{\{27(\xi^2 - \eta^2) - 8a^2\}^2 a^2}{243\{3(\xi^2 - \eta^2) - a^2\}}\,, \quad \ldots \quad (54)$$

quae est *Evolutae* aequatio pro coordinatis rectangularibus: sin utamur coordinatarum polarium ystemate (B), ea fit

$$729\,r^6 \,Cos\, 2\varphi - 243\,a^2 r^4 (1 + 3\,Cos^2\, 2\varphi) + 432\,a^4 r^2 \,Cos\, 2\varphi - 64\,a^6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Ponendo

$$2a : 3 = b\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

fiunt hae aequationes

$$\left.\begin{aligned} (\xi^2+\eta^2)^2 &= \frac{\{3(\xi^2-\eta^2)-2b^2\}^2\, b^2}{4(\xi^2-\eta^2)-3b^2} \;. \\ u' = \eta^6 + \eta^4(\xi^2+3b^2) &- \eta^2(\xi^4+3b^2\xi^2-3b^4) - (\xi^2-b^2)^3 = 0 \;. \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

$$4\, r^6 \operatorname{Cos} 2\varphi - 3\, b^2 r^4 (1 + 3 \operatorname{Cos}^2 2\varphi) + 12\, b^4 r^2 \operatorname{Cos} 2\varphi - 4\, b^6 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

47. Apparet ex aequationibus (57) et (58), ob pares tantum potentias coordinatarum ξ et η vel r continentes, Evolutam symmetricam fore versus utrumque coordinatarum axin; dum ex (50) concludimus, Lemniscatae tangentes centrales huic curvae esse asymptotos, Evolutam ergo ex duobus ramis hyperbolicis constare.

In (57) si ponamus $\eta = 0$, fit $\xi = b$;
et $\xi = 0$, fit $\eta^6 + 3\,b^2\,\eta^4 + 3\,b^4\,\eta^2 + b^6 = 0$, quod fieri nequit.

Curva ergo axe secatur in puncto, ubi $\xi = b$.

48. In puncta Evolutae singularia inquiramus, secundum methodum a cl. **Ekman** in op. laud. propositam. Erunt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial \xi} = -2\xi\,\{3\xi^4 + 2\xi^2(\eta^2-3b^2) - \eta^4 + 3b^2\eta^2 + 3b^4\}\;, \\
&\frac{\partial u'}{\partial \eta} = +2\eta\,\{3\eta^4 + 2\eta^2(\xi^2+3b^2) - \xi^4 - 3b^2\xi^2 + 3b^4\}\;; \\
&\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} = -2\,\{15\xi^4 + 6\xi^2(\eta^2-3b^2) - \eta^4 + 3b^2\eta^2 + 3b^4\}\;, \\
&\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\,\partial \eta} = -4\xi\eta\,(2\xi^2 - 2\eta^2 + 3b^2)\;, \\
&\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2\,\{15\eta^4 + 6\eta^2(\xi^2+3b^2) - \xi^4 - 3b^2\xi^2 + 3b^4\}\;; \\
&\frac{\partial^3 u'}{\partial \xi^3} = -24\xi\,(5\xi^2 + \eta^2 - 3b^2)\;, \quad \frac{\partial^3 u'}{\partial \xi^2\,\partial \eta} = -4\eta\,(6\xi^2 - 2\eta^2 + 3b^2)\;, \\
&\frac{\partial^3 u'}{\partial \xi\,\partial \eta^2} = 4\xi\,(6\eta^2 - 2\xi^2 - 3b^2)\;, \quad \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 24\eta\,(5\eta^2 + \xi^2 + 3b^2)\;; \\
&\frac{\partial^4 u'}{\partial \xi^4} = -24\,(15\xi^2 + \eta^2 - 3b^2)\;, \quad \frac{\partial^4 u'}{\partial \xi^3\,\partial \eta} = -48\,\xi\eta\;, \quad \frac{\partial^4 u'}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2} = 24\,(\eta^2 - \xi^2)\;, \\
&\frac{\partial^4 u'}{\partial \xi\,\partial \eta^3} = 48\,\xi\eta\;, \quad \frac{\partial^4 u'}{\partial \eta^4} = 24\,(15\eta^2 + \xi^2 + 3b^2)\;; \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Pro

$$\xi = \frac{2a}{3} = b \quad , \quad \eta = 0 \, , \text{ (cf. form. (51).) est}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} = \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \, , \; \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 \, , \; \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2 b^4 \, ;$$

unde punctum illud esse ***cuspis primae speciei*** invenitur. (cf. Ekman, op. laud., pag. 24.).
Pro

$$\xi = \tfrac{1}{2} e \sqrt{3} = \frac{3 b \sqrt{3}}{4 \sqrt{2}} \quad , \quad \eta = - \tfrac{1}{6} e = - \frac{b}{4 \sqrt{2}} \, , \text{ (cf. form. (52).) , fit}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{21 b^5 \sqrt{3}}{62 \sqrt{2}} \, , \; \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} > 0 \, ;$$

unde punctum hocce tangentem ad axem perpendicularem habet, et nulla inflexio obtinet. (cf. Ekman, op. laud., pag. 20.).

Evoluta igitur curvae hyperbolicae tertii ordinis conspectum habet, ita ut, gradus aequationis altior peti debeat ex existentia duorum punctorum imaginariorum; ex aequationis u' (57) adspectu saltem factor secundi gradus non obvius est.

49. Constructio Evolutae facillima est, si Lemniscatam concentricam construamus, cujus semi-axis sit $\frac{2}{3} a$, ex cujus intersectione cum singulis radiis vectoribus perpendiculum demittamus in Lemniscatae primitivae normalem correspondentem. Horum perpendiculorum pedum locus geometricus (cf. Problematis III Solutio 1.) Evoluta est. (cf. Theoremata V et XXIII).

§ 4.

DE QUADRATURA ET AREAE MULTIPLICATIONE AC DIVISIONE.

50. Lemniscatae *quadraturam* facile reperiemus ex aequatione (B). Formula nempe cognita

$$q = \frac{1}{2}\int r^2 \,\partial\varphi$$

ibi fit

$$q_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a^2\, Cos\, 2\,\varphi \,.\, \partial\varphi = \frac{1}{4}a^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\partial .\ Sin\, 2\,\varphi\ ,$$

unde

$$q_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{1}{4}a^2\,(Sin\, 2\,\varphi_1 - Sin\, 2\,\varphi_0) = \frac{1}{2}a^2\, Sin\,(\varphi_1 - \varphi_0).\, Cos\,(\varphi_1 + \varphi_0)\ ;\ \dots\dots\dots \quad (60)$$

et si area sumatur inde ab axi, ubi $\varphi = 0$,

$$q^{\varphi} = \frac{1}{4}a^2\, Sin\, 2\,\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{(a^4 - r^4)}\ ;\ \dots\dots\dots \quad (61)$$

quae, usque ad tangentem centralem sumta, ubi $\varphi = 45°$, vel, quod idem est, inde ab $r = a$ ad $r = 0$, praebet Lemniscatae Quadrantis aream

$$Q = \frac{1}{4}\,a^2\ ;\ \dots\dots\dots \quad (62)$$

unde

$$4\,Q = a^2\ \dots\dots\dots \quad (63)$$

pro totius curvae area invenitur.

Ex hac proprietate areae, ut algebraice sine functionum ellipticarum ope determinari queat, ut et arcus Parabolicus, J. A. Serret in Diario Journal de Liouville, Anni 1843, Tomo VIII, pag. 145 sqq., argumentum cepit, curvam nostram, in quarumdam curvarum oppositione, *Lemniscatam Parabolicam* nuncupandi.

51. Ex comparatione form. (61) inter et (23) sequitur

THEOREMA XXVII. Area pro quovis Lemniscatae puncto, radium vectorem, e centro divergentem, inter et axem contenta, areae trianguli aequalis est, qui latera habet eundem radium vectorem, normalem polarem in systemate (B), et lineam, e centro ad mediam eam normalem ductam. (vid. Fig. 2.).

Hujus enim trianguli area dimidiae areae aequalis est trianguli, qui radium vectorem et subnormalem polarem pro basi et altitudine habet; est ergo primi trianguli area

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{(a^4 - r^4)}}{r} = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a^4 - r^4)} = \overset{\varphi}{q} .$$

Ex eadem formula (61) deducitur

THEOREMA XXVIII a VECHTMANN, op. cit. pag. 27.

In semi-axin si construas semi-circulum; datum radium vectorem usque ad circuli conferentiam prolonges, ac intersectionem cum vertice jungas; trianguli ita comparati area aequalis erit $\overset{\varphi}{q}$. (vid. Fig. 10.).

Nam trianguli altitudo aequalis est $\frac{1}{2}$ a Sin 2φ; ita, cum basis sit a, area fit

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2} a \, Sin \, 2\varphi = \frac{1}{4} a^2 \, Sin \, 2\varphi = \overset{\varphi}{q}$.

THEOREMA XXIX. Ab L. J. MAGNUS in opere suo, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berl. 1833, pag. 517, propositum.

Area, quemvis radium vectorem inter et axin contenta, aequalis est quadrato, in semi-radium vectorem ita positum, ut angulum 45°, axin continentem, cum primo radio vectore efficiat, constructo.

Est enim

$$\overset{\varphi}{q} = \tfrac{1}{4} a^2 \, Sin \, 2\varphi = \tfrac{1}{4} a^2 \, Cos \, 2(45° - \varphi) = \left(\tfrac{1}{2} r_{(45° - \varphi)}\right)^2 .$$

THEOREMA XXX. In Lemniscatae totum axin si construas semi-circulum, radium vectorem datum usque ad circuli conferentiam prolonges, et ex intersectione perpendiculum in axin demittas, triangulum construxeris, cujus area aequalis est $\overset{\varphi}{q}$. (vid. Fig. 10.).

Hujus trianguli nempe basis et altitudo respective $a \, Sin \, \varphi$ et $a \, Cos \, \varphi$ aequales sunt, unde area fit

$\frac{1}{2} \cdot a\, Sin\, \varphi \cdot a\, Cos\, \varphi = \frac{1}{4}\, a^2\, Sin\, 2\, \varphi = q^\varphi$ aequalis .

52. Ex form . (62) et (63) concludimus

THEOREMA XXXI. Curvae totius area dimidium est rectanguli circumscripti. (vid. Fig. 3.).

THEOREMA XXXII. Lemnisci unius areae ad quadratum circumscriptum ratio est ut 4 ad $3\sqrt{3}$. (cf. Theorema VI et vid. Fig. 3.).

53. Ex dictis in promptu sunt solutiones

PROBLEMATIS IV. Lemniscatae segmenti, axem inter et quemvis radium vectorem, e centro divergentem, contenti, ($\frac{1}{n}$ Quadranti minoris), area n — plex assignetur.

PROBLEMATIS V. Lemniscatae segmentum, axem inter et quemvis radium vectorem, in n partes dividatur.

In problemate posteriori sufficit, ut inde ab axi $\frac{1}{n}$ partem assignemus: reliquum ope problematis prioris absolvitur. Caeteroquin solutiones amborum problematum eodem redeunt.

SOLUTIO 1. Triangulo Theorematis XXVIII comparato, altitudinem inde ab axe n — plicem sumas, vel inde ab axe $\frac{1}{n}$ partem abscindas, et per harum partium extremitates axi parallelas ducas, quarum cum circulo intersectiones curvae centro jungendo, radios vectores, aream quaesitam cum axe continentes, habebis, ut facile intelligitur ex trianguli basi constanter semiaxi aequali manenti.

SOLUTIO 2. Priori multo minus expedita, e Theoremate XXIX petitur. Radium vectorem enim ad angulum $45° - \varphi$ (ubi φ est angulus dati segmenti) pertinentem, in rationem

$$1 \text{ ad } \sqrt{n} \quad , \quad \text{vel} \quad 1 \text{ ad } \sqrt{\frac{1}{n}}$$

mutes, et angulo, qui in Lemniscata ad huncce pertinet, ab 45° abstracto, manet angulus segmenti requisiti.

54. Porro patet

THEOREMA XXXIII. Lemniscatae Quadrans bisecatur radio vectore, qui cum axe angulum 15° efficit. (vid. Fig. 3.).

quod apud VECHTMANN, op. cit. pag. 26, invenitur. Tunc enim est

$$q^{\varphi} = \tfrac{1}{4}\,a^2\,Sin\,30^\circ = \tfrac{1}{4}\,a^2\,.\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,Q\,.$$

Hinc, nec non ex his, quae n°. 25 de hoc puncto commemoravimus, sequitur

THEOREMA XXXIV. Lemniscatae lemnisco uni si circumscribamus quadratum, cujus duo latera sint tangentes centrales, area figurae mixtaelineae, quae inter duo latera quadrati et Lemniscatae ipsius arcum inde a $\varphi = 45^\circ$ usque ad $\varphi = 15^\circ$ continetur, Quadrantis quartae parti aequalis est. (vid. Fig. 3.).

Trianguli enim, quem radius vector cum figurae mixtaelineae lateribus rectis efficit, basis et altitudo cum sint in systemate coordinatarum (E) abscissa et ordinata puncti, ubi tangens alteri tangenti centrali parallela est, habemus pro ejus trianguli area

$\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}\,a\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,.\,\tfrac{1}{2}\,a\sqrt{\tfrac{27}{4}} = \tfrac{3}{16}\,a^2 = \tfrac{3}{4}\;Q$, a qua cum Quadrantis dimidii aream

$\tfrac{1}{8}\,a^2 = \tfrac{1}{2}\;Q$ abstrahamus,

manet $\tfrac{1}{16}\,a^2 = \tfrac{1}{4}\;Q$ pro figurae mixtaelineae area, ut probandum erat.

55. Ut aream exprimamus, inter cujusvis Lemniscatae puncti abscissam et ordinatam et curvae arcum contentam, habemus formulam notam

$$q_1 = \int y\,\partial x\,,$$

quae ibi ex form. (2) fit

$$q_1 = \tfrac{1}{2}\int \partial.x^2\;.\sqrt{\frac{-a^2 - 2\,x^2 + a\sqrt{(a^2 + 8\,x^2)}}{2\,x^2}}\,,$$

et posito

$$2\,x^2 = v\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

$$q_1 = \tfrac{1}{4}\int \partial v\;.\sqrt{\frac{-a^2 - v + a\sqrt{(a^2 + 4\,v)}}{v}}\;;$$

quod integrale ut rationale reddamus, ponamus

$$\frac{-a^2 - v + a\sqrt{(a^2 + 4\,v)}}{v} = w^2\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

unde, quia v generaliter non 0 est aequale,

$$v = \frac{1 - w^2}{(1 + w^2)^2}\,2\,a^2, \text{ et } \partial v = \frac{3 - w^2}{(1 + w^2)^3}\,4\,a^2\,w\,\partial w\,.$$

Pro limitibus

$$\left.\begin{array}{l} x = 0\,, \ \text{est}\ v = 0\ ,\ w = 1\ ; \\ x = a\,, \ \ll v = 2a^2,\ w = 0\ ; \\ x = x_1\,, \ \ll v = 2x_1^{\,2},\ w = \frac{y_1}{x^1}\ . \end{array}\right\} \quad (q)$$

Integrale ipsum fit

$$q_1 = a^2 \int \frac{3\,w^2 - w^4}{(1 + w^2)^3}\,\partial w\,,$$

sive, cf. M. Hirsch, Integraltafeln, Berl. 1810, pag. 50. ,

$$q_1 = \frac{a^2\,w^3}{(1 + w^2)^2}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (r)$$

ergo, ope aequationum (q) et (H')

$$q_1{}_0^{x_1} = \frac{-4y_1{}^3x_1 + (x_1{}^2 + y_1{}^2)^2}{4\,(x_1{}^2 - y_1{}^2)} \quad = \frac{a^4 - (a^2 - r^2)\sqrt{(a^4 - r^4)}}{4\,a^2}\ ,\ \ldots\ldots\ (64)$$

$$q_1{}_{x_1}^{a} = \frac{x_1\,y_1{}^3}{(x_1{}^2 - y_1{}^2)} \quad = \frac{(a^2 - r^2)\sqrt{(a^4 - r^4)}}{4\,a^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (65)$$

Ex (64) pro $r = a$, et ex (65) pro $r = 0$ colligitur

$$Q = \tfrac{1}{4}\,a^2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (62)$$

ut decet.

56. Eaedem areae a Vechtmann, Diss. laud., Pag. 27., indirecte ex figura ita deducuntur : (vid. Fig. 2.)

$$\textit{Area}\quad OAUPO \quad = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^4 - r^4)} \qquad ,\ \text{(cf. form . (61).)}$$

$$\textit{Triang.}\ OPX = \tfrac{1}{2}\,x\,y = \frac{r^2\sqrt{(a^4 - r^4)}}{4\,a^2} \qquad ,\ \text{(cf. aequ . (H').)}$$

ergo

$$\textit{Area}\quad AUPXA \quad = \frac{(a^2 - r^2)\sqrt{(a^4 - r^4)}}{4\,a^2}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (65)$$

quam si ab

$$\textit{Area}\quad OAUPVO = \tfrac{1}{4}\,a^2 \qquad \text{abstrahas,}$$

erit

$$\textit{Area}\quad OXPVO \quad = \frac{a^4 - (a^2 - r^2)\sqrt{(a^4 - r^4)}}{4\,a^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (64)$$

57. Inde nunc colligitur

THEOREMA XXXV. Area, quae ab ordinata quacumque usque ad verticem curva et axi includitur, sic inveniri potest. Construas A quartam proportionalem ad r, x et y, B et C tertias proportionales ad r et a, et ad r et y respective; D quartam proportionalem ad r, B, et A: rectangulus C inter et D constructum areae datae aequalis erit.

Est enim rectangulus ille

$$= C.D = \frac{A.B}{r}.C = \frac{\frac{xy}{r}.\frac{a^2}{r}}{r}.\frac{y^2}{r} = \frac{a^2\,x\,y^3}{r^4} = q_1{}^{a}_{x_1}\ .\ \text{(cf. form. (65).)}$$

58. Si area rogetur duas inter ordinatas, axin et curvae arcum contenta, eruimus, angulis, quos radii vectores, ad eas ordinatas pertinentes, cum axi faciunt, per φ_0 et φ_1 denotatis,

$$w = tang\ \varphi\ ;\ \text{(cf. form . (}q\text{).)}\ ,$$

unde aequatio (r) fit

$$q_2{}^{\varphi_1}_{\varphi_0} = \int_{Tang\ \varphi_0}^{Tang\ \varphi_1} \frac{a^2\,w^3}{(1+w^2)^2} = a^2 \left\{\frac{Tang^3\ \varphi_1}{(1+Tang^2\ \varphi_1)^2} - \frac{Tang^3\ \varphi_0}{(1+Tang^2\ \varphi_0)^2}\right\}$$

$$= a^2 \left\{\frac{Sin^3\ \varphi_1 . Cos\ \varphi_1}{(Sin^2\ \varphi_1 + Cos^2\ \varphi_1)^2} - \frac{Sin^3\ \varphi_0 . Cos\ \varphi_0}{(Sin^2\ \varphi_0 + Cos^2\ \varphi_0)^2}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}a^2(Sin^2\ \varphi_1 . Sin\ 2\,\varphi_1 - Sin^2\ \varphi_0 . Sin\ 2\,\varphi_0)\\
&= \tfrac{1}{4}a^2\,(Sin\ 2\,\varphi_1 - Sin\ 2\,\varphi_0) - \tfrac{1}{8}\,a^2\,(Sin\ 4\,\varphi_1 - Sin\ 4\,\varphi_0)\\
&= \tfrac{1}{4}a^2\{Cos\,2(45^\circ - \varphi_1) - Cos\ 2\,(45^\circ - \varphi_0)\} - \tfrac{1}{8}\,a^2\{Cos\ 2\,(45^\circ - 2\,\varphi_1) - Cos\ 2\,(45^\circ - 2\varphi_0)\}\\
&= \left(\tfrac{1}{2}\,r_{(45^\circ - \varphi_1)}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\,r_{(45^\circ - \varphi_0)}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,r_{(45^\circ - 2\varphi_1)}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,r_{(45^\circ - 2\varphi_0)}\right)^2.
\end{aligned}\right\}(66)$$

Hinc

THEOREMA XXXVI. Area, quae continetur axem et curvam inter et duas ordinatas, quibus radii vectores et anguli polares correspondent respective r_1 et φ_1, ac r_2 et φ_2, sic determinari quit.

Construas radios vectores r_3, r_4, r_5, r_6, qui cum axe respective includant angulos $45^\circ - \varphi_1$, $45^\circ - \varphi_2$, $45^\circ - 2\,\varphi_1$, $45^\circ - 2\,\varphi_2$; a differentia quadratorum in dimidia r_3 et r_4 constructorum, si dimidium abstrahas differentiae quadratorum in dimidia r_5 et r_6 constructorum, area, quae restat, aequalis erit areae quaesitae. (cf. form. (66) et Theorema XXIX.).

59. **Quando radium vectorem e foco divergentem cogitamus, erit systema (D)**

$$r^4 - 4er^3 \, Cos\,\varphi + 4e^2r^2 - e^4 = 0\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

unde

$$Cos\,\varphi = \frac{r^4 + 4e^2r^2 - e^4}{4er^3}\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(67)}$$

et habemus, (cf. n°. 23.) ,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{r^2 - 3er\,Cos\,\varphi + 2e^2}{er^2\,Sin\,\varphi}\,; \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(26)}$$

ergo

$$q_3 = \tfrac{1}{2}\int r^2\,\partial\varphi$$

$$= -\int \frac{2r^3\,\partial r}{4r^2} \cdot \frac{(4r^4 + 8e^2r^2) - (3r^4 + 12e^2r^2 - 3e^4)}{\sqrt{\{16e^2r^6 - (r^8 + 8e^2r^6 + 16e^4r^4 - 2e^4r^4 - 8e^6r^2 + e^8)\}}}$$

$$= -\frac{e^2}{4}\int \frac{(r^2 - e^2)\left(\frac{r^2}{e^2} - 3\right)}{\sqrt{(r^2-e^2)^2}.\sqrt{\left(-\frac{r^4}{e^4} + 6\frac{r^2}{e^2} - 1\right)}}\,\partial\,.\,\frac{r^2}{e^2}\,;$$

vel (cf. M. Hirsch, Integraltafeln, pag. 185.) ,

$$q_3 = \frac{e^2}{4}\sqrt{\left(-\frac{r^4}{e^4} + 6\frac{r^2}{e^2} - 1\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-r^4 + 6e^2r^2 - e^4)}. \ldots\ldots\ldots \text{(68)}$$

Hinc sequitur facilis demonstratio

THEOREMATIS XXXVII. Quod ex iis, quae J. A. Serret in Diario Journal de Liouville, Anni 1846, Tomo XI, pag. 89, proposuit, deduci potest.

Si in radium vectorem, e foco divergentem, triangulum describas excentricitatem et semi-axin pro lateribus habentem, trianguli area aequalis erit segmento Lemniscatae, hunc radium vectorem inter et semi-axin contento. (cf. Fig. 6.).

Trianguli enim latera cum sint r, e et $e\sqrt{2}$, est area I

$$I = \sqrt{\frac{r + e + e\sqrt{2}}{2}.\frac{r + e - e\sqrt{2}}{2}.\frac{r - e + e\sqrt{2}}{2}.\frac{-r + e + e\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(r+e)^2 - 2e^2}{4}.\frac{-(r-e)^2 + 2e^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2 + 2er - e^2}{4}.\frac{-r^2 + 2er + e^2}{4}}$$

$$l = \sqrt{\frac{4\,e^2 r^2 - (r^2 - e^2)^2}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-r^4 + 6e^2 r^2 - e^4)} = q_3 \,.$$

60. His addere possumus

THEOREMA XXXVIII. Quod STEINER demonstrandum proponit in Diario Journal von CRELLE, Tomo XVIII, pag. 372.

Circulum describas in Lemniscatae totum axin, nec non duos circulos e focis cum radio excentricitati aequali; area figurae curvaelineae, quae restat in primo circulo, post arearum ei cum duobus posteriobus communium abstractionem, areae toti Lemniscatae aequalis est. (vid. Fig. 11.).

Quia $OG = OA = e\sqrt{2} = \sqrt{(2\,OF^2)}$ est, patet $\angle GOF = 45°$ esse, ergo OG cum Lemniscatae tangenti centrali coincidere, GH per F transire. Porro est

$$\textit{quadrans circuli}\ OH'IGO \qquad = \tfrac{1}{4}\pi a^2$$
$$\triangle OGF + \triangle OH'F' = 2\triangle OGF = 2\,.\tfrac{1}{2}e^2 = \tfrac{1}{2}a^2$$
$$\textit{quadrans circuli}\ FOGF + F'OH'F' = 2\,FOGF = \tfrac{1}{4}\pi a^2 = \pi e^2$$

unde a duorum priorum summa quum abstrahas tertium, manet

$$\textit{figura curvalinea}\ OXGIH'YO = \tfrac{1}{2}a^2 = 2Q\,. \quad Q.E.I.$$

THEOREMA XXXIX. Cujus existentiam STEINER loco citato vage indicat.

Si lineam ducas, cum perpendiculo, e centro in axin erecto, eundem angulum efficientem, ac radius vector, segmentum quodvis Lemniscatae abscindens, cum axe includit, partem figurae curvaelineae in theoremate praecedenti commemoratae, inde ab illo perpendiculo abscindis, quae segmento areae Lemniscatae aequalis erit. (vid. Fig. 11.).

Sit $\angle IOQ = \angle AOP = \varphi_1$. Si lineae OQ cum circulo OF intersectionem M cum centro F jungas, invenies

$$\angle OFM = 2\angle IOQ = 2\varphi_1,$$

et

$$\textit{segmentum}\ OXMO = 2e^2\varphi_1\frac{\pi}{360°} - \tfrac{1}{2}e^2 \operatorname{Sin} 2\varphi_1$$
$$= a^2\varphi_1\frac{\pi}{360°} - \tfrac{1}{4}a^2 \operatorname{Sin} 2\varphi_1\,,$$

quod si a valore sectoris O I Q O $= a^2 \varphi_1 \frac{\pi}{360°}$ abstrahas, manebit figura mixtalinea

$$OIQMXO = \tfrac{1}{2} a^2 \, Sin\, 2\varphi_1 = q^{\varphi_1},$$

quod inveniendum erat.

61. Idem auctor STEINER in Diario Journal von CRELLE, Tomo XIV, pag. 88, demonstrandum proponit

THEOREMA XL. In Lemniscatae axi punctum E ita sumamus, quod ad curvae vertices, et alterum focorum, quartum, posteriori adordinatum, punctum harmonicum sit: itaque (cf. Theorema IV) focum Hyperbolae Aequilaterae correspondentis. Rectam per centrum ducas, ita ut curvam in duobus punctis intersecet, in quam ex E perpendiculum demittas. A cujus pede ad duas lineae cum curva intersectiones partium rectangulus constanter quadrato, semi-axi superconstructo, ergo totius curvae areae aequalis erit. (vid. Fig. 1.).

Est
$$OR = OE \, Cos\, EOR = 2e \, Cos\, \varphi \,,$$
$$OP = OP' = r = e\sqrt{(2\, Cos\, 2\varphi)} \,,$$

ergo
$$PR \times P'R = \{2e\, Cos\,\varphi - e\sqrt{(2\, Cos\, 2\varphi)}\} \,.\, \{2e\, Cos\,\varphi + e\sqrt{(2\, Cos\, 2\varphi)}\}$$
$$= 4e^2\, Cos^2\varphi - 2e^2\, Cos\, 2\varphi = 2e^2 = a^2 \,.$$

Eodem redit demonstratio hujus theorematis a DIPPE data in Diario Journal von CRELLE, Tomo XVI, pag. 65, ut et ea, quam VECHTMANN in Diss. cit., pag. 28, tradit.

62. Ex problemate quodam, a W. J. C. RAMMELMAN ELZEVIER, in Verzameling van Nieuwe Wisk. Voorstellen van het Gen. *Een onvermoeide Arbeid enz.*, Tomo II, pag. 316, proposito, sequitur

THEOREMA XLI. Si per quodcunque Lemniscatae punctum in radium vectorem, e centro versus illud divergentem, perpendiculum erigas, hoc cum duobus tangentibus centralibus triangulum efficit, cujus area constanter quadrato in semi-axin constructo, ergo totius curvae areae aequalis erit.

Est hujus perpendiculi aequatio

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1},$$

et aequationes tangentium centralium

$$y = x \quad , \quad \text{et} \quad y = -x \; ,$$

ergo perpendiculi cum tangentibus centralibus intersectionum Q_1 , Q_2, coordinatae

$$x_2 = y_2 = -\frac{-\dfrac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}}{1 + \dfrac{x_1}{y_1}} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 + y_1},$$

$$x_3 = -y_3 = -\frac{-\dfrac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}}{-1 + \dfrac{x_1}{y_1}} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 - y_1} \; ;$$

unde longitudines

$$0\,Q_1 = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 + y_1}\sqrt{2} \; ,$$

$$0\,Q_2 = \sqrt{(x_3^2 + y_3^2)} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 - y_1}\sqrt{2} \; .$$

Quia vero triangulus in 0 est rectangulus, ejus area I erit

$$I = \tfrac{1}{2} \; . \; 0\,Q_1 \; . \; 0\,Q_2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{x_1^2 - y_1^2} \; . \; 2 = a^2 \; .$$

§ 5.

DE RECTIFICATIONE NEC NON ARCUS MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE.

63. Lemniscatae *rectificationem* quoque ex systemate (B) petamus. Formula satis cognita

$$s = \int \sqrt{(\partial r^2 + r^2 \partial \varphi^2)}$$

ibi, ope aequationum (B) et (19), fit

$$\left.\begin{aligned} s &= \int \sqrt{\left(\frac{a^4 \, Sin^2 \, 2\varphi}{r^2} + r^2\right)} \cdot \partial \varphi = \int \partial \varphi \sqrt{\frac{a^4 \, Sin^2 \, 2\varphi + a^4 \, Cos^2 \, 2\varphi}{a^2 \, Cos \, 2\varphi}} \\ &= \int \frac{a \, \partial \varphi}{\sqrt{Cos \, 2\varphi}} = \int \frac{a \, \partial \varphi}{\sqrt{(1 - 2 \, Sin^2 \varphi)}} \, , \end{aligned}\right\} (69)$$

vel

$$\left.\begin{aligned} s &= \int \partial r \sqrt{\left(1 + \frac{r^4}{a^4 \, Sin^2 \, 2\varphi}\right)} = \int \partial r \sqrt{\left(1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4}\right)} = \int \frac{a^2 \, \partial r}{\sqrt{(a^4 - r^4)}} \\ &= a \int \frac{\partial . \frac{r}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^4}{a^4}\right)}} \end{aligned}\right\} (70)$$

quae ambo integralia ope functionum ellipticarum exprimi possunt.

64. Prima jam habet formam ab illa ellipticae functionis primae speciei vix diversam, nisi ad modulum, unitate majorem, attendas. At vero etiam argumenti φ limites sunt 0° et 45°, quum contra ellipticarum functionum, quae completae habentur, generaliter limites 0° et 90°, ergo duplo extensiores sint. Quas limites ergo, ob

$$2 \, Sin^2 \tfrac{1}{4} \pi = 1 = Sin^2 \tfrac{1}{2} \pi \, ,$$

facile introseremus ponendo

$$2\,Sin^2\,\varphi = Sin^2\,\psi,\ \text{unde}\ Cos\,2\,\varphi = Cos^2\,\psi\ ,\ Cos^2\,\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi\ , \ldots\ldots (71)$$

et differentiando

$$\partial\,\varphi = \frac{Cos\,\psi\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{Cos\,\varphi}\partial\,\psi \quad = \frac{Cos\,\psi\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\ ; \ldots\ldots (72)$$

quorum substitutione form. (69) evadit

$$s = \frac{a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,\partial\,\psi}{\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\ ,$$

vel, si signis, a clar. P. F. Verhulst propositis, utamur ,

$$s = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ .\ dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\,\psi) = e\ .\,dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\,\psi)\ ; \ldots\ldots (73)$$

unde hoc sequitur in Lemniscatae, nec non in Ellipticarum Functionum theoriis maximi momenti

THEOREMA XLII. Si Lemniscatae excentricitatem pro unitate sumamus, arcus exprimit functionem ellipticam primae speciei pro modulo $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, aut pro angulo moduli 45°.

Quod ab ill. Legendre in opere suo Traité des fonctions Elliptiques, Tomo I, Cap. VIII, pag. 135, jam observatum est.

Ratione verum, qua ille auctor celeberrimus, ut et vir clar. P. F. Verhulst, in opere Traité élémentaire des fonctions elliptiques, Nota 2, pag. 294, ad formulam (73) pervenerit, methodus praecedens, mihi a praeceptore aestumatissimo viro cl. G. J. Verdam suggesta, simplicior et magis ad manum esse videtur.

Ex form. (71) habemus

$$r^2 = a^2\,Cos\,2\,\varphi = a^2\,Cos^2\,\psi,\ \text{et}\ r = a\,Cos\,\psi\ , \ldots\ldots (74)$$

unde et aequationes (H′) dabunt

$$x = a\,Cos\,\psi\sqrt{\frac{1+Cos^2\,\psi}{2}}\quad ,\quad y = a\,Sin\,\psi.\,Cos\,\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \ldots\ldots (75)$$

65. Ad eosdem autem valores etiam ducimur, si integrale (70) secundum regulas cognitas (cf. clar. Verhulst, op. laud., pag. 13, 14) ad functiones ellipticas reducere cupiamus. Tunc enim ponendo

$$r\ :\ a = Cos\,\psi\ :\ \sqrt{1},\ \text{unde}\ r = a\ Cos\ \psi\ ,$$

in formulam (73) incidimus.

66. Quando vero aequationes (75) tamquam integralia aequationis

$$\sqrt{(\partial\,x^2 + \partial\,y^2)} = \frac{e\,\partial\,\psi}{\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\ \ldots\ldots (73)$$

consideremus, ubi x et y inter se conjunguntur aequatione conditionali

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\,e^2\,(x^2 - y^2)\,, \qquad (A)$$

alia quoque integralia exstant, ut et praecedentia, tantum singularia, quia constans desideratur, quorumque explicatio paullo posthîc dabitur, nempe

$$x = \frac{a\,Sin\,\psi}{1 + Cos^2\,\psi}\quad,\quad y = \frac{a\,Sin\,\psi.\,Cos\,\psi}{1 + Cos^2\,\psi}\,,$$

unde

$$r^2 = \frac{a^2\,Sin^2\,\psi}{1 + Cos^2\,\psi}\;; \qquad (76)$$

quae mihi obvia fuerunt in applicatione

THEOREMATIS XLIII. Quod ab J. A. Serret, in Diario Journal de Liouville, Anni 1845, Tomo XI, pag. 257, propositum est.

Lemniscatae coordinatae rectangulares per functionem rationalem amplitudinis functionis ellipticae primae speciei, arcum exprimentis, exprimi queunt, ponendo

$$x = a\,\frac{z + z^3}{1 + z^4}\;,\quad y = a\,\frac{z - z^3}{1 + z^4} \qquad (77)$$

Exinde enim sequitur

$$(x^2 + y^2)^2 = a^4\left(\frac{2\,z^2}{1 + z^4}\right)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)\;, \qquad (A)$$

et

$$\sqrt{(\partial\,x^2 + \partial\,y^2)^2} = \frac{a\sqrt{2}\;.\;\partial\,z}{\sqrt{(1 + z^4)}}\;; \qquad (78)$$

in quibus aequationibus si sumamus

$$z = Tang\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,, \qquad (79)$$

erit

$$\sqrt{(\partial\,x^2 + \partial\,y^2)} = \frac{a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\;.\;\partial\,\psi}{\sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\,, \qquad (73)$$

et x et y acquirent valores (76).

67. Hîc locus mihi videtur idoneus, ut addam

THEOREMA XLIV. Ab J. A. Serret, loco cit., pag. 258, propositum.

Lemniscatae Bernouillanae aequatio sub forma simplicissima, ut opinatur ille auctor, est

$$x = C\frac{z^3}{1+z^4} \quad , \quad y = C\frac{z}{1+z^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Hinc erit

$$(x^2+y^2)^2 = \left(C^2\frac{z^2}{1+z^4}\right)^2 = C^2 x y \, ,$$

quam cum systemate (E), ubi tangentes centrales pro coordinatarum rectangularium axibus sumsimus, comparantes vidimus esse

$$C = 2\,e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

Porro evadit

$$\surd(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{C\,\partial z}{\surd(1+z^4)} \, ,$$

vel, ob valorem (81), idem ac mox

$$\surd(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{2\,e\,\partial z}{\surd(1+z^4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Ibi ergo etiam aequatione (79) ad substitutionem uti debemus, unde fiunt form. (80)

$$x = \frac{e \, Sin\,\psi \, . \, Sin^2\,\frac{1}{2}\,\psi}{1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi} \quad , \quad y = \frac{e\,Sin\,\psi \, . \, Cos^2\,\frac{1}{2}\,\psi}{1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

68. Ex form. (73) colligimus

THEOREMA XLV. Lemniscatae arcus, qui duobus radiis vectoribus r_1 et r_2 determinatur, exprimitur

$$e\,\{dig.\ (\surd\tfrac{1}{2}\,,\,\psi_1) - dig.\ (\surd\tfrac{1}{2}\,,\,\psi_2)\} \, , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

si nempe φ_1 et φ_2 anguli sint illos radios vectores inter et axin, et obtineant relationes

$$Cos\,2\,\varphi_1 = Cos^2\,\psi_1 \quad , \quad Cos\,2\,\varphi_2 = Cos^2\,\psi_2 \, .$$

69. Pro Quadrantis arcus longitudine ex form. (73) habemus

$$S = e\,D.(\surd\tfrac{1}{2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Alio modo vero eam quoque exprimere possumus. Est enim ex form. (69)

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{a\,\partial\varphi}{\sqrt{Cos\,2\varphi}} = -\int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \frac{a\,\partial\lambda}{\sqrt{Sin\,2\lambda}} = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\lambda\,.\,Sin^{-\frac{1}{2}}\lambda\,.\,Cos^{-\frac{1}{2}}\lambda$$

$$= \tfrac{1}{4}\,a\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\lambda\ Sin^{-\frac{1}{2}}\lambda\,.\,Cos^{-\frac{1}{2}}\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

Sed in Diario Journal de LIOUVILLE, Anni 1842, Tomo VII, pag. 114, J. A. SERRET observat esse

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin^{m-1}x\,.\,Cos^{n-1}x\,\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

ubi signo Γ, ut usus fert, Integrale Eulerianum secundae speciei denotatur. In hoc nostro casu autem est $m = n = \frac{1}{2}$, unde prodit

THEOREMA XLVI. Lemniscatae Quadrantis arcus longitudo exprimitur

$$S = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

Fit enim aequatio (K) pro $m = n = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial x\ Sin^{-\frac{1}{2}}x\,.\,Cos^{-\frac{1}{2}}x = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,,$$

unde ex form. (85)

$$S = \tfrac{1}{4}\,a\sqrt{2}\,.\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{4}\,a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,,$$

unde quia $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, et $a\sqrt{\frac{1}{2}} = e$ est, aequatio (86) prodit.

70. Ex form. (69) deducimus

$$s = \int \frac{a\,\partial\varphi}{\sqrt{Cos\,2\varphi}} = \int \frac{a\,\frac{\partial\varphi}{Cos^2\varphi}}{Sec^2\varphi\,\sqrt{(Cos^2\varphi - Sin^2\varphi)}} = \int \frac{a\,.\,\partial\,.\,Tang\,\varphi}{\sqrt{(1+Tang^2\varphi)}\,\sqrt{(1-Tang^2\varphi)}}$$

$$= \int \frac{a\,.\,\partial\,.\,Tang\,\varphi}{\sqrt{(1-Tang^4\varphi)}}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

unde colligimus, integralia (70) et (87) eadem fore intra eosdem limites variabilium

$r : a$ et $Tang\,\varphi$.

Si inde a limite 0 numeremus, arcus, qui integrali (70) exprimitur, inde a centro, ubi $r : a = 0$, sumendus est: ille contra ex integrali (87) deductus, inde a vertice sumendus, ubi $tang\ \varphi = 0$.

Arcus igitur, ut et a Vechtmann in Diss. cit. pag. 30, qui a centro incipit, ***arcus directus*** nuncupatur, ***arcus inversus*** vero ille, qui a vertice initium ducit: dum ambo arcus, a centro ad amborum radiorum vectorum correspondentium extremitates computati, jam ab ill. Euler in Novis Commentar. Petropolit., Tomo VI, pag. 58, sqq., ***arcus complementares*** nominantur.

Radios vectores correspondentes inter relatio facile invenitur. Si enim radium vectorem arcus complementaris ${}_1r$ et angulum, quem cum axe efficit, ${}_1\varphi$ vocemus, r et φ pro arcu ipso sumtis, erit

$$\frac{r}{a} = Tang\ {}_1\varphi\ , \quad \text{vel } r = a\ Tang\ {}_1\varphi \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (88)$$

$$= a\sqrt{\frac{1 - Cos\ 2\ {}_1\varphi}{1 + Cos\ 2\ {}_1\varphi}} = a\sqrt{\frac{a^2 - {}_1r^2}{a^2 + {}_1r^2}} \quad \dots \quad (89)$$

quae inter radios vectores relatio, dabit angulos polares ad eos pertinentes, φ et ${}_1\varphi$, inter sequentem

$$a^2\ Cos\ 2\ \varphi = a^2 \frac{a^2 - a^2\ Cos\ 2\ {}_1\varphi}{a^2 + a^2\ Cos\ 2\ {}_1\varphi}\ ,$$

vel

$$\left.\begin{aligned} &Cos\ 2\ \varphi = \frac{2\ Sin^2\ {}_1\varphi}{2\ Cos^2\ {}_1\varphi} = Tang^2\ {}_1\varphi\ , \\ &\text{vel} \\ &Cos\ \varphi = \sqrt{\frac{1 + Cos\ 2\ \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + Tang^2\ {}_1\varphi}{2}} = Sec\ {}_1\varphi \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ , \\ &Cos\ \varphi\ .\ Cos\ {}_1\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ . \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Dum inter angulos auxiliares, amplitudines functionum ellipticarum referentes, ψ et ${}_1\psi$, relatio prodit

$$a^2\ Cos^2\ \psi = \frac{a^2 - a^2\ Cos^2\ {}_1\psi}{a^2 + a^2\ Cos^2\ {}_1\psi}\ ,$$

vel

$$\left.\begin{aligned} &Cos^2\ \psi = \frac{Sin^2\ {}_1\psi}{1 + Cos^2\ {}_1\psi}\ , \quad Sin^2\ \psi = \frac{2\ Cos^2\ {}_1\psi}{1 + Cos^2\ {}_1\psi}\ , Tang^2\ \psi = 2\ Cot^2\ {}_1\psi\ , \\ &\qquad\qquad Tang\ \psi\ .\ Tang\ {}_1\psi = \sqrt{2}\ . \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

quae ultima, ut decet, eadem est relatio, quae inter amplitudines complementarium functionum ellipticarum primae speciei obtinet. (cf. clar. VERHULST, op. laud., pag. 40.).

Quae si colligamus, prodit elegans

THEOREMA XLVII. Lemniscatae duo arcus vicissim complementares erunt, si obtineant relationes inter

radios vectores, $_1r^2 = \dfrac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}\, a^2$, ... (89)

angulos polares, $Cos\ \varphi .\ Cos\ _1\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, ... (90)

angulos auxiliares, $Tang\ \psi\ .\ Tang\ _1\psi = \sqrt{2}$ . . . . (91)

Quia enim, (vid. Fig. 12.) ex formulis citatis est

$$Arc.\ direct.\ O\,1 = Arc.\ invers.\ A\,2,$$

erit quoque

$$Arc.\ direct.\ O\,2 = Arc.\ invers.\ A\,1,$$

ita ut elementa correspondentia permutari queant necesse sit, quod ex form. (89), (90) & (91) ita fieri patet.

71. Exposita facillime ducunt ad solutionem

PROBLEMATIS VI. Arcus cujusvis dati arcus complementaris inveniatur.

SOLUTIO 1. Perpendiculum in axin e vertice erectum erit linea tangentium ad circulum, cujus radius semi-axi a aequalis est. Radium vectorem arcus dati igitur inde a vertice in hoc perpendiculo abscindas, cujus extremitatem cum centro si jungas, Lemniscatam secabis in puncto quaesito. (cf. form. (88), et vid. Fig. 12,).

SOLUTIO 2. Sequitur ex form. (90) $a\ Cos\ \varphi = e\ Sec\ _1\varphi$.

E dati puncti radii vectoris cum circulo, in totum axin constructo, intersectione perpendiculum in axin demittas, cum parte axeos, a centro usque ad hujus perpendiculi pedem, $a\ Cos\ \varphi$ aequali, e centro circuli arcum ducas, cujus intersectione cum perpendiculo, e foco in axin erecto, cum centro juncta, radium vectorem quaesitum habebis. (vid. Fig. 12.).

72. Caeteroquin est

THEOREMA XLVIII. Arcuum Lemniscatae complementarium radios vectores si prolongemus usque ad perpendiculum, e vertice in axin erectum, partes ita in hoc perpendiculo inde a vertice praecisae, alteri radio vectori aequales erunt.

Quod idem invenitur apud VECHTMANN, op. laud., pag. 20.

Porro elegantissimum, quo integralia (76) explicantur,

THEOREMA XLIX. Valores (75) et (76) amborum integralium aequationis

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{e \, \partial \psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \psi)}},$$

nempe

$$x = a \, Cos \, \psi \sqrt{\frac{1 + Cos^2 \psi}{2}}, \quad y = a \, Sin \, \psi . Cos \, \psi \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad r^2 = a^2 \, Cos^2 \psi; \quad . \quad (75)$$

et

$$x = \frac{a \, Sin \, \psi}{1 + Cos^2 \psi}, \quad y = \frac{a \, Sin \, \psi . Cos \, \psi}{1 + Cos^2 \psi}, \quad r^2 = \frac{a^2 \, Sin^2 \psi}{1 + Cos^2 \psi}, \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

ad arcus complementares pertinent.

Secundum enim form. (89) erit

$${}_1r^2 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} a^2 = \frac{a^2 - a^2 \, Cos^2 \psi}{a^2 + a^2 \, Cos^2 \psi} a^2 = \frac{a^2 \, Sin^2 \psi}{1 + Cos^2 \psi}.$$

75. Transeamus ad theoriae functionum ellipticarum regulas in Lemniscatae arcuum multiplicationem applicandas, ubi eadem invenire debemus, quae hucusque inde a celeberrimo EULER, usitatiorum analyseos adjumentorum ope inventa sunt. Et primum quidem ponamus

PROBLEMA VII. Arcus dati duplum assignetur.

Angulo radium vectorem arcus dati inter et axin per φ denotato, ponamus $Cos \, 2 \varphi = Cos^2 \psi$. Similiter arcus duplicis angulum polarem per φ_2 denotemus et ponamus $Cos \, 2 \varphi_2 = Cos^2 \psi_2$; relatio ψ_2 inter et ψ erit (cf. clar. VERHULST, op. laud., pag. 42.)

$$Cos \, \psi_2 = \frac{1 - 2 \, Sin^2 \psi + \frac{1}{2} Sin^4 \psi}{1 - \frac{1}{2} Sin^4 \psi}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (92)$$

unde ob

$$Sin^2 \psi = 1 - Cos^2 \psi = 1 - \frac{r^2}{a^2}, \text{ (cf. form. (74).)}, \quad \ldots \quad (93)$$

$$Cos \, \psi_2 = \frac{-a^4 + 2 a^2 r^2 + r^4}{a^4 + 2 a^2 r^2 - r^4},$$

ergo, quia r_2 positivum esse debet, et ob $a > r$, fit ex form. (74)

$$r_2 = \pm a \, Cos \, \psi_2 = \frac{a^4 - 2 a^2 r^2 - r^4}{a^4 + 2 a^2 r^2 - r^4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (94)$$

Sed aequo jure form. (76)

$$r_2{}^2 = \frac{a^2 \, Sin^2 \, \psi_2}{1 + Cos^2 \, \psi_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

uti possumus, quae ob

$$Sin \, \psi_2 = \frac{2 \, Sin \, \psi . \, Cos \, \psi . \Delta \, (\psi)}{1 - \frac{1}{2} \, Sin^4 \, \psi} \, , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

(cf. clar. VERHULST, op. laud., pag. 42.), fit

$$r_2 = \frac{2 \, a \, Sin \, \psi . \, Cos \, \psi . \, \Delta \, (\psi)}{\sqrt{\{(1 - \frac{1}{2} Sin^4 \psi)^2 + (1 - 2 Sin^2 \, \psi + \frac{1}{2} \, Sin^4 \, \psi)^2\}}} \, ,$$

quae denique, ope substitutionis form. (93), fit

$$r_2 = \frac{2 \, a^2 \, r \sqrt{(a^4 - r^4)}}{a^4 + r^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Valorum r_2, in form. (94) ac (96) inventorum, differentia inde petenda est, quod ad arcus duplices, directum et inversum, pertinent, ut et r et ${}_1r$ in form. (74) et (76) pro arcu simplici. Quia vero ex functionum ellipticarum theoria, cujus ope inventa sunt, discerni nequit, ad quidnam r quodvis r_2 pertineat, ad alia adminicula nos convertamus necesse est.

Ex aequatione (94) enim differentiando habemus

$$\partial \, . \, r_2 = \frac{- 8 \, a^3 \, r \, (a^4 + r^4) \, \partial \, r}{(a^4 + 2 \, a^2 \, r^2 - r^4)^2} \, ;$$

unde videmus hoc r_2 diminui, si r augeatur, igitur r_2 ex form. (94) radium vectorem esse arcus duplicis inversi.

74. Hinc sequitur porro inter angulos polares relatio

$$Cos \, \varphi_2 = \sqrt{\frac{1 + Cos \, 2 \, \varphi_2}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{r_2{}^2}{a^2}\right)} \, ,$$

pro r_2 ex form. (96)

$$\left.\begin{aligned} Cos \, \varphi_2 &= \frac{a^4 + 2 \, a^2 \, r^2 - r^4}{a^4 + r^4} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1 + 2 \, Cos \, 2 \, \varphi - Cos^2 \, 2 \, \varphi}{1 + Cos^2 \, 2 \, \varphi} \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ &= \frac{Cos^2 \varphi + Sin^2 \, \varphi . \, Cos \, 2 \, \varphi}{Cos^2 \varphi - Sin^2 \, \varphi . \, Cos \, 2 \, \varphi} \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, ; \end{aligned}\right\} (97)$$

et pro ${}_1r_2$ ex form. (94)

$$Cos\ {}_1\varphi_2 = \frac{a^4 + r^4}{a^4 + 2a^2r^2 - r^4} = \frac{1 + Cos^2 2\varphi}{1 + 2\,Cos\,2\varphi - Cos^2 2\varphi} = \frac{Cos^2\varphi - Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi}{Cos^2\varphi + Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi} . \qquad (98)$$

Quae colligamus in

THEOREMATE L. Arcus simplicis radium vectorem et angulum polarem si per r et φ denotemus, item arcus duplicis directi et inversi radium vectorem et angulum polarem respective per r_2, φ_2, et ${}_1r_2$, ${}_1\varphi_2$, erunt relationes

$$r_2 = \frac{2a^2r\sqrt{(a^4 - r^4)}}{a^4 + r^4},\ (96) \qquad {}_1r_2 = \frac{a^4 - 2a^2r^2 - r^4}{a^4 + 2a^2r^2 - r^4}\,a\,; \ \ldots\ldots\ldots (94)$$

$$Cos\ \varphi_2 = \frac{a^4 + 2a^2r^2 - r^4}{a^4 + r^4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1 + 2\,Cos\,2\varphi - Cos^2 2\varphi}{1 + Cos^2 2\varphi}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{Cos^2\varphi + Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi}{Cos^2\varphi - Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi}\sqrt{\tfrac{1}{2}}, (97)$$

$$Cos\ {}_1\varphi_2 = \frac{a^4 + r^4}{a^4 + 2a^2r^2 - r^4} = \frac{1 + Cos^2 2\varphi}{1 + 2\,Cos\,2\varphi - Cos^2 2\varphi} = \frac{Cos^2\varphi - Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi}{Cos^2\varphi + Sin^2\varphi .\,Cos\,2\varphi}\ \ldots (98)$$

75. Hic locus videtur idoneus, ut moneamus de nexu Lemniscatae rectificationem inter et integralium singularium theoriam.

Ex aequationibus (70) et (87) enim sequitur

$$\partial\,.\,\frac{s}{a} = \frac{\partial\,.\,\frac{r}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^4}{a^4}\right)}} = \frac{\partial .\,Tang\,\varphi}{\sqrt{(1 - Tang^4\varphi)}},$$

cui secundum form. (89) satisfacit valor

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{1 - \frac{{}_1r^2}{a^2}}{1 + \frac{{}_1r^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{1 - Tang^2\varphi}{1 + Tang^2\varphi}},\ \text{(cf. Theorema XLVIII)}$$

nec non ex aequationis inspectione

$$\frac{r}{a} = Tang\ \varphi\,.$$

Hinc

THEOREMA LI. Aequationi differentiali

$$\frac{\partial p}{\sqrt{(1-p^4)}} = \frac{\partial q}{\sqrt{(1-q^4)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

satisfaciunt integralia

$$\left.\begin{aligned} p &= q\,, \\ p^2 &= \frac{1-q^2}{1+q^2}\,. \end{aligned}\right\} \text{(M)}$$

Qui valores tamen integralia sunt singularia, ob constantis arbitrariae absentiam. Integrale generale, auctore cel. Euler in Nov. comment. Petrop., Tomo VI, pag. 83, (cf. praeterea Institut. Calculi Integr., Tom. I, Sect. II, Cap. VI.), est

$$p^2 + q^2 + C^2 p^2 q^2 = C^2 + 2pq\sqrt{(1-C^4)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(N)}$$

quod pro $C=0$, et $C=1$ respective formulas (M) duas praestat.

Item ex form. (94) et (96) sequitur

THEOREMA LII. Aequationi differentiali

$$\frac{2\,\partial p}{\sqrt{(1-p^4)}} = \frac{\partial q}{\sqrt{(1-q^4)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(O)}$$

satisfaciunt integralia singularia duo

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{2p\sqrt{(1-p^4)}}{1+p^4}\,, \\ q &= \frac{1-2p^2-p^4}{1+2p^2-p^4}\,. \end{aligned}\right\} \text{(P)}$$

quorum primum quoque continetur in integrali (N) pro $C=p$.

Denique ex dictis de Lemniscatae arcubus complementaribus generaliter sequitur, eadem obtinere quodad n-cupla arcus simplicis, ideoque

THEOREMA LIII. Aequatio differentialis

$$\frac{m\,\partial p}{\sqrt{(1-p^4)}} = \frac{n\,\partial q}{\sqrt{(1-q^4)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Q)}$$

duobus integralibus singularibus gaudet.

76. Ex aequatione (N) rursus solutio ad manum est

PROBLEMATIS VIII. Duo determinentur arcus directi quorum summa vel differentia tertio arcui dato aequalis sit.

Arcus dati radium vectorem per r, arcuum determinandorum vero per p et q denotes; tunc aequatio (N), ubi homogeneitas introducenda est, hîc erit

$$p^2 + q^2 + C^2 p^2 q^2 = C^2 a^4 \mp 2pq \sqrt{(1 - C^4 a^4)} \,, \ldots \ldots \quad (99)$$

ubi signum superius pro summa, inferius vero pro differentia valet.

Pro arcuum altero, v. gr. p, 0 aequali, alter q erit r aequalis, unde constans C determinatur aequatione

$$r^2 = C^2 a^4 \,, \quad \text{unde} \quad C^2 = r^2 : a^4 \,;$$

quo constantis valore in aequationem (99) substituto, nobis est

$$a^4 (p^2 + q^2) + p^2 q^2 r^2 = a^4 r^2 \mp 2 a^2 p q \sqrt{(a^4 - r^4)} \,, \ldots \ldots \quad (100)$$

ex qua q in functione p determinare possumus

$$(a^4 + p^2 r^2)\, q^2 \pm 2 a^2 p q \sqrt{(a^4 - r^4)} = a^4 (r^2 - p^2) \,,$$

unde

$$\mp q = a^2 \frac{p \sqrt{(a^4 - r^4)} \pm r \sqrt{(a^4 - p^4)}}{a^4 + p^2 r^2} \,; \ldots \ldots \ldots \quad (101)$$

ubi signi duplicis, quo q affectum est, superius et inferius respective pro summa ac differentia valet.

Si angulos radios vectores r, p, q inter et axin per φ, ψ et χ denotemus, inde sequitur inter hosce angulos polares relatio

$$Cos\, 2\chi = \frac{(Cos\, 2\varphi + Cos\, 2\psi)(1 - Cos\, 2\varphi . Cos\, 2\psi) \pm 2\, Sin\, 2\varphi . Sin\, 2\psi \sqrt{Cos\, 2\varphi . Cos\, 2\psi}}{(1 + Cos\, 2\varphi .\, Cos\, 2\psi)^2} \,. \quad (102)$$

Hinc habemus

THEOREMA LIV. Duorum arcuum directorum Lemniscatae, quorum extremitates coordinatas polares habent p et ψ, q et χ, summa vel differentia tertio arcui directo dato, cujus extremitas coordinatas polares habet r et φ, aequalis erit, si exstent relationes

pro summa

$$q = a^2 \frac{-p \sqrt{(a^4 - r^4)} + r \sqrt{(a^4 - p^4)}}{a^4 + p^2 r^2} \,,$$

$$Cos\, 2\chi = \frac{(Cos\, 2\varphi + Cos\, 2\psi)(1 - Cos\, 2\varphi .\, Cos\, 2\psi) - 2\, Sin\, 2\varphi .\, Sin\, 2\psi \sqrt{Cos\, 2\varphi .\, Cos\, 2\psi}}{(1 + Cos\, 2\varphi .\, Cos\, 2\psi)^2} \,;$$

et pro differentia

$$q = a^2 \frac{p\sqrt{(a^4 - r^4)} + r\sqrt{(a^4 - p^4)}}{a^4 + p^2 r^2},$$

$$Cos\, 2\chi = \frac{(Cos\, 2\varphi + Cos\, 2\psi)(1 - Cos\, 2\varphi . Cos\, 2\psi) + 2\, Sin\, 2\varphi . Sin\, 2\psi \sqrt{Cos\, 2\varphi . Cos\, 2\psi}}{(1 + Cos\, 2\varphi . Cos\, 2\psi)^2}$$

77. Ad argumentum redeamus ac ponamus

THEOREMA LV. Quod ill. EULER loco citato affert.

Si chorda arcus simplicis sit r, et chorda arcus n-cupli r_n, erit chorda arcus $(n+1)$-cupli

$$r_{n+1} = \frac{r\sqrt{\frac{1 - r_n^2}{1 + r_n^2}} + r\sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}}}{1 - r r_n \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2} \cdot \frac{1 - r_n^2}{1 + r_n^2}}}, \ldots \ldots \ldots \ldots (102)$$

ubi semi-axis a pro unitate sumitur, et chordae e centro divergentes cum radiis vectoribus coincidunt.

Probandum igitur est

$$\frac{\partial . (r_{n+1})}{\sqrt{\{1 - (r_{n+1})^4\}}} = \frac{(n+1)\, \partial r}{\sqrt{(1 - r^4)}},$$

quod evadet, si meminerimus e relatione r_n inter et r sequi relationem

$$\frac{\partial . r_n}{\sqrt{(1 - r_n^4)}} = \frac{n\, \partial r}{\sqrt{(1 - r^4)}};$$

cujus ope enim fit, post reductionem

$$\partial . r_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{(1-r^4)}} \partial r . \frac{1 + r^2 + r_n^2 - r^2 r_n^2}{(1+r^2)(1+r_n^2)} . \frac{-2 r r_n + \sqrt{(1-r^4)(1-r_n^4)}}{\left\{1 - r r_n \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}\right\}^2}, \quad (103)$$

$$1 + r^2_{n+1} = \frac{(1 - r^2 r_n^2 + r^2 + r_n^2)^2}{(1+r^2)(1+r_n^2)\left\{1 - r r_n \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}\right\}^2}, \ldots \ldots \ldots (104)$$

$$1 - r^2_{n+1} = \frac{\{-2 r r_n + \sqrt{(1-r^4)(1-r_n^4)}\}^2}{(1+r^2)(1+r_n^2)\left\{1 - r r_n \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}\right\}^2}; \ldots \ldots \ldots (105)$$

unde

$$\partial \cdot r_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{(1-r^4)}} \partial r \cdot \sqrt{(1+r^2_{n+1})} \sqrt{(1-r^2_{n+1})} ,$$

vel

$$\frac{\partial \cdot (r_{n+1})}{\sqrt{\{1-(r_{n+1})^4\}}} = \frac{n+1}{\sqrt{(1-r^4)}} \partial r . \qquad \text{Q.E.D.}$$

78. Ex quo theoremate statim deducitur

THEOREMA LVI. Si chorda arcus m-cupli sit r_m, et chorda arcus n-cupli r_n, erit chorda arcus $(m \pm n)$-cupli

$$r_{m \pm n} = \frac{r_m \sqrt{\frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}} \pm r_n \sqrt{\frac{1-r_m^2}{1+r_m^2}}}{1 \mp r_m r_n \sqrt{\frac{1-r_m^2}{1+r_m^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

79. Si chordam vel radium vectorem arcus $(n+1)$-cupli, in Theoremate LV memorati, complementaris quaeramus, erit

$${}_1r_{n+1} = \sqrt{\frac{1-r^2_{n+1}}{1+r^2_{n+1}}} ,$$

quod ex form. (104) et (105) fit, denominatorem ut et numeratorem $(1 + r^2 r_n^2)$ multiplicando.

$${}_1r_{n+1} = \frac{-r r_n + \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}}{1 + r r_n \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}} ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

unde pro arcu $(m \pm n)$-cuplo statim sequitur

THEOREMA LVII. Arcus $(m \pm n)$-cupli, in Theoremate praecedenti memorati, complementi radius vector vel chorda erit

$${}_1r_{m \pm n} = \frac{\mp r_m r_n + \sqrt{\frac{1-r_m^2}{1+r_m^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}}{1 \pm r_m r_n \sqrt{\frac{1-r_m^2}{1+r_m^2} \cdot \frac{1-r_n^2}{1+r_n^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (108)$$

Porro de hisce aequationibus (102), (106), (107) et (108) monendum est, quantitatem

$$\sqrt{\frac{1 - r^2_p}{1 + r^2_p}}$$

nihil aliud esse nisi radium vectorem ${}_1r_p$ arcus complementaris vel inversi ejus, cujus radius vector sit r_p.

80. Similitudo, quae functionum in Theorematibus LVI et LVII obvenientium inter et formularum pro duorum angulorum summae vel differentiae functionibus goniometricis formam adest, celeberrimum Euler non effugit. Qua ille auctor, ope transformationis, ab ill. C. F. Gauss in opere Theoria motus corporum coelestium saepius fructuose applicatae, usus est, ut eas sub formam elegantiorem, conspectu faciliorem transduceret.
Posito enim

$$\left.\begin{aligned} r_m &= M \,Sin\, \mu \;, & r_n &= N \,Sin\, \nu \;, \\ {}_1r_m &= \sqrt{\frac{1 - r^2_m}{1 + r^2_m}} = M \,Cos\, \mu \;, & {}_1r_n &= \sqrt{\frac{1 - r^2_n}{1 + r^2_n}} = N \,Cos\, \nu \;; \end{aligned}\right\} (109)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} M &= \sqrt{(r^2_m + {}_1r^2_m)} = \sqrt{\frac{1 + r^4_m}{1 + r^2_m}} = \sqrt{\frac{1 + {}_1r^4_m}{1 + {}_1r^2_m}}, \quad Tang\, \mu = \frac{{}_1r_m}{r_m} \;, \\ N &= \sqrt{(r^2_n + {}_1r^2_n)} = \sqrt{\frac{1 + r^4_n}{1 + r^2_n}} = \sqrt{\frac{1 + {}_1r^4_n}{1 + {}_1r^2_n}}, \quad Tang\, \nu = \frac{{}_1r_n}{r_n} \;; \end{aligned}\right\} (110)$$

evadunt formulae (106) et (108)

$$r_{m \pm n} = \frac{M \,Sin\, \mu . N \,Cos\, \nu \pm N \,Sin\, \nu . M \,Cos\, \mu}{1 \mp M \,Sin\, \mu . N \,Sin\, \nu . M \,Cos\, \mu . N \,Cos\, \nu},$$

$${}_1r_{m \pm n} = \frac{M \,Cos\, \mu . N \,Cos\, \nu \mp M \,Sin\, \mu . N \,Sin\, \nu}{1 \pm M \,Sin\, \mu . N \,Sin\, \nu . M \,Cos\, \mu . N \,Cos\, \nu} .$$

Est autem $1 - r^2_m - {}_1r^2_m = r^2_m\, {}_1r^2_m$, quae ope form. (109) fit

$$1 - M^2 = M^4 \,Sin^2\, \mu . \,Cos^2\, \mu \;,$$

unde

$$M^2 \,Sin\, \mu . \,Cos\, \mu = \sqrt{(1 - M^2)} \;,$$

et simili modo

$$N^2 \,Sin\, \nu . \,Cos\, \nu = \sqrt{(1 - N^2)} \;. \qquad (111)$$

Hinc

THEOREMA LVIII. Sit

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Chorda arcus } m\text{-cupli} & M \; Sin \; \mu \;, \\ \text{Chorda complementi} & M \; Cos \; \mu \;, \\ \text{Chorda arcus } n\text{-cupli} & N \; Sin \; \nu \;, \\ \text{Chorda complementi} & N \; Cos \; \nu \;;\end{array}\right\} \quad (109)$$

erit

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Chorda arcus } (m \pm n)\text{-cupli} & \dfrac{M N \, Sin(\mu \pm \nu)}{1 \mp \sqrt{(1-M^2)(1-N^2)}} \;, \\ \text{Chorda complementi} & \dfrac{M N \, Cos(\mu \pm \nu)}{1 \pm \sqrt{(1-M^2)(1-N^2)}} \;.\end{array}\right\} \quad (112)$$

Sub qua forma ab ill. EULER loco citato dantur.

81. Sed tamen ulterius reduci possunt, posito nempe

$$\frac{1}{M} = Cos\,\alpha \,, \frac{1}{N} = Cos\,\beta, \text{ unde } \sqrt{(1-\frac{1}{M^2})} = Sin\,\alpha \,, \sqrt{(1-\frac{1}{N^2})} = Sin\,\beta \;; \quad . \; . \; . \; (113)$$

dum ex aequatione (108) sequitur

$$\frac{1}{M^4} - \frac{1}{M^2} = Sin^2\mu \,.\, Cos^2\mu = \tfrac{1}{4} Sin^2 2\mu \;,$$

unde

$$\frac{1}{M^2} = Cos^2\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + Sin^2 2\mu)}}{2},$$

ergo

$$\left.\begin{array}{l} Cos\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{(1 + Sin^2 2\mu)}}{2}} \;. \\ \text{Simili modo} \\ Cos\,\beta = \sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{(1 + Sin^2 2\nu)}}{2}} \;. \end{array}\right\} \quad (114)$$

Hinc prodit, ob

$$\sqrt{(1-M^2)(1-N^2)} = M N \, Sin\,\alpha \,.\, Sin\,\beta \;,$$

THEOREMA LIX. Sit

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Chorda arcus } m\text{-cupli} & Sin\,\mu : Cos\,\alpha \;, \\ \text{Chorda complementi} & Cos\,\mu : Cos\,\alpha \;, \\ \text{Chorda arcus } n\text{-cupli} & Sin\,\nu : Cos\,\beta \;, \\ \text{Chorda complementi} & Cos\,\nu : Cos\,\beta \;;\end{array}\right\} \quad (115)$$

erit

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Chorda arcus } (m \pm n)\text{-cupli} & Sin\,(\mu \pm \nu) : Cos\,(\alpha \pm \beta)\ , \\ \text{Chorda complementi} & Cos\,(\mu \pm \nu) : Cos\,(\alpha \mp \beta)\ .\end{array}\right\}(116)$$

82. Quae de radiis vectoribus arcuum $(m \pm n)$-plicium tam directorum quam inversorum in Theorematibus LVI et LVII invenimus, etiam ad horum arcuum angulos polares applicemus, quem ad scopum in form. (106) valores

$$r^2 = Cos\ 2\varphi \quad , \qquad {}_1r = Tang\,\varphi\ ,$$

substituamus, quo fit

$$r_{m\pm n} = \frac{Cos\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m} \pm Sin\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_n}}{Cos\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \mp Sin\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}}\ ,$$

unde

$$Cos\,\varphi_{m\pm n} = \sqrt{\frac{1 + r^2_{m\pm n}}{2}}$$

$$= \frac{1 + Cos\,2\,\varphi_m + Cos\,2\,\varphi_n - Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}{\sqrt{2\{(1 + Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n)^2 + (Sin\,2\,\varphi_m \sqrt{Cos\,2\,\varphi_n} \mp Sin\,2\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m})^2\}}} . (117)$$

Simili modo erit

$${}_1r_{m\pm n} = \frac{Sin\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \mp Cos\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}}{Cos\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \pm Sin\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}}\ ,$$

unde

$$Cos\ {}_1\varphi_{m\pm n} = \sqrt{\frac{1 + {}_1r^2_{m\pm n}}{2}}$$

$$= \frac{1 + Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}{Cos\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \pm Sin\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}} \ldots\ldots (118)$$

Quae colligamus in

THEOREMATE LX. Si anguli polares, ad arcus m- et n-plices pertinentes, sint φ_m et φ_n, ad arcum $(m \pm n)$-plicem directum et inversum pertinentes sint $\varphi_{m\pm n}$, ${}_1\varphi_{m\pm n}$, erit

$$Cos\ \varphi_{m\pm n} = \frac{1 + Cos\,2\,\varphi_m + Cos\,2\,\varphi_n - Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}{\sqrt{2\{(1 + Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n)^2 + (Sin\,2\,\varphi_m \sqrt{Cos\,2\,\varphi_n} \mp Sin\,2\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m})^2\}}} \quad (117)$$

$$Cos\ {}_1\varphi_{m\pm n} = \frac{1 + Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}{Cos\,\varphi_m . Cos\,\varphi_n \pm Sin\,\varphi_m . Sin\,\varphi_n \sqrt{Cos\,2\,\varphi_m . Cos\,2\,\varphi_n}} \ldots\ldots\ldots (118) .$$

83. Ex modo expositis sequitur

THEOREMA LXI. Si chordae arcus simplicis, duplicis, triplicis, etc., respective per

$$r_1 \;,\; r_2 \;,\; r_3 \;,\; \&c.,$$

denotentur, eorumque arcuum complementorum radii vectores per

$${}_1r_1 \;,\; {}_1r_2 \;,\; {}_1r_3,\; \&c.\;;$$

erit ex Theorematibus LV et LVII

$$(119)\quad\left\{\begin{aligned}
r_1 &= r_1\;,\\
r_2 &= \frac{2\,r_1\cdot{}_1r_1}{1-r_1^{\,2}\cdot{}_1r_1^{\,2}}\;,\\
r_3 &= \frac{r_1\cdot{}_1r_2+r_2\cdot{}_1r_1}{1-r_1.r_2\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_2}\;,\\
r_4 &= \frac{r_1\cdot{}_1r_3+r_3\cdot{}_1r_1}{1-r_1.r_3\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_3}\;,\\
r_5 &= \frac{r_1\cdot{}_1r_4+r_4\cdot{}_1r_1}{1-r_1.r_4\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_4}\;,\\
r_6 &= \frac{r_1\cdot{}_1r_5+r_5\cdot{}_1r_1}{1-r_1.r_5\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_5}\;,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.\qquad
\left.\begin{aligned}
{}_1r_1 &= \sqrt{\frac{1-r_1^{\,2}}{1+r_1^{\,2}}}\;,\\
{}_1r_2 &= \frac{{}_1r_1^{\,2}-r_1^{\,2}}{1+r_1^{\,2}\cdot{}_1r_1^{\,2}}\;,\\
{}_1r_3 &= \frac{{}_1r_1\cdot{}_1r_2-r_1.r_2}{1+r_1.r_2\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_2}\;,\\
{}_1r_4 &= \frac{{}_1r_1\cdot{}_1r_3-r_1.r_3}{1+r_1.r_3\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_3}\;,\\
{}_1r_5 &= \frac{{}_1r_1\cdot{}_1r_4-r_1.r_4}{1+r_1.r_4\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_4}\;,\\
{}_1r_6 &= \frac{{}_1r_1\cdot{}_1r_5-r_1.r_5}{1+r_1.r_5\cdot{}_1r_1\cdot{}_1r_5}\;,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(120)$$

THEOREMA LXII. Iisdem chordis per eadem signa denotatis ac in Theoremate praecedenti, erit ex Theorematibus LVI et LVII

$$(121)\quad\left\{\begin{aligned}
r_4 &= \frac{2\,r_2\cdot{}_1r_2}{1-r_2^{\,2}\cdot{}_1r_2^{\,2}}\;,\\
r_5 &= \frac{r_2\cdot{}_1r_3+r_3\cdot{}_1r_2}{1-r_2.r_3\cdot{}_1r_2\cdot{}_1r_3}\;,\\
r_6 &= \frac{r_2\cdot{}_1r_4+r_4\cdot{}_1r_2}{1-r_2.r_4\cdot{}_1r_2\cdot{}_1r_4}\;,\\
&= \frac{2\,r_3\cdot{}_1r_3}{1-r_3^{\,2}\cdot{}_1r_3^{\,2}}\;,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.\qquad
\left.\begin{aligned}
{}_1r_4 &= \frac{{}_1r_2^{\,2}-r_2^{\,2}}{1+r_2^{\,2}\cdot{}_1r_2^{\,2}}\;,\\
{}_1r_5 &= \frac{{}_1r_2\cdot{}_1r_3-r_2.r_3}{1+r_2.r_3\cdot{}_1r_2\cdot{}_1r_3}\;,\\
{}_1r_6 &= \frac{{}_1r_2\cdot{}_1r_4-r_2.r_4}{1+r_2.r_4\cdot{}_1r_2\cdot{}_1r_4}\;,\\
&= \frac{{}_1r_3^{\,2}-r_3^{\,2}}{1+r_3^{\,2}\cdot{}_1r_3^{\,2}}\;,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(122)$$

In quas formulas si substituamus valorem ${}_1r_1$, erit

THEOREMA LXIII. Easdem chordas si iisdem signis denotes ac in Theorematibus duobus praecedentibus, erues, ut ex. gr. apud ill. Euler, loco citato, pag. 82, invenitur,

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= r \quad ,\\
r_2 &= \frac{2r\sqrt{(1-r^4)}}{1+r^4} \; ,\\
r_3 &= \frac{r(3-6r^4-r^8)}{1+6r^4-3r^8} \; ,\\
r_4 &= \frac{4r(1+r^4)(1-6r^4+r^8)\sqrt{(1-r^4)}}{(1+r^4)^4+16r^4(1-r^4)^2} \; ,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(123)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_1r_1 &= \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \; ,\\
{}_1r_2 &= \frac{1-2r^2-r^4}{1+2r^2-r^4} \; ,\\
{}_1r_3 &= \frac{(1+r^4)^2-4r^2(1+r^2)^2}{(1+r^4)^2+4r^2(1-r^2)^2}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \; ,\\
{}_1r_4 &= \frac{(1-6r^4+r^8)^2-8r^2(1-r^4)(1+r^4)^2}{(1-6r^4+r^8)^2+8r^2(1-r^4)(1+r^4)^2} \; ,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(124)$$

Quorum valores r_2 et ${}_1r_2$ cum iis coincidunt, quos in Theoremate L invenimus.

84. Transeamus ad arcus cujusvis Lemniscatae divisionem, et ponamus

PROBLEMA IX. Arcus cujusvis semissis inveniatur.

SOLUTIO 1. Quae in promptu est ex Theorematis L, form. (94); ${}_1r_2$ enim pro arcus dati complementi radio vectore ${}_1r$ si sumamus, erit r ibi nil aliud nisi $r_{\frac{1}{2}}$ quaesitum. Habemus itaque ex illa aequatione

$$(a-{}_1r)\,r^4_{\frac{1}{2}}+2a^2(a+{}_1r)\,r^2_{\frac{1}{2}} = a^4(a-{}_1r) \; ,$$

unde

$$r^2_{\frac{1}{2}} = \frac{-a - {}_1r + \sqrt{2\,(a^2 + {}_1r^2)}}{a - {}_1r}\, a^2 \; ; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (125)$$

ubi, ne $r_{\frac{1}{2}}$ imaginarium evadat, signi duplicis inferius omisimus. In qua nunc si form. (89) substituamus, erit

$$r^2_{\frac{1}{2}} = \frac{2a - \sqrt{(a^2 + r^2)} - \sqrt{(a^2 - r^2)}}{\sqrt{(a^2 + r^2)} - \sqrt{(a^2 - r^2)}}\, a^2 = \frac{\{a - \sqrt{(a^2 - r^2)}\}\,\{\sqrt{(a^2 + r^2)} - a\}}{r^2}\, a^2 \; ; \quad (126)$$

cujus arcus inversi fit radius vector

$${}_1r^2_{\frac{1}{2}} = \frac{\{a + \sqrt{(a^2 - r^2)}\}\,\{\sqrt{(a^2 + r^2)} - a\}}{r^2}\, a^2 \; ; \quad \ldots \ldots \quad (127)$$

qui ambo valores apud cel. Euler, loc. cit., inveniuntur.

Arcus vero inversi, qui semissis est arcus dati complementi, radius vector invenitur ex form. (125) esse

$${}_1r^2_{-\frac{1}{2}} = \frac{-a - r + \sqrt{2\,(a^2 + r^2)}}{a - r}\, a^2 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

unde pro hujus arcus directi radio vectore

$$r^2_{-\frac{1}{2}} = \frac{-a + r + \sqrt{2\,(a^2 + r^2)}}{a + r}\, a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (129)$$

85. SOLUTIO 2. Peti potest ex formulis (97) et (98) Theorematis L, ad relationem inter angulos polares referentibus.

Ex form. (97) est

$$Cos\, \varphi = \frac{1 + 2\, Cos\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}} - Cos^2\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}}}{1 + Cos^2\, \varphi_{\frac{1}{2}}} \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, ,$$

unde

$$(1 + Cos\, \varphi \sqrt{2})\; Cos^2\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}} - 2\, Cos\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}} = 1 - Cos\, \varphi \sqrt{2} \, ,$$

et

$$Cos\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm Sin\, \varphi \sqrt{2}}{1 + Cos\, \varphi \sqrt{2}} = \frac{(1 \pm Sin\, \varphi \sqrt{2})\; (-1 + Cos\, \varphi \sqrt{2})}{Cos\, 2\, \varphi} \, ,$$

quae pro signis superiori ac inferiori respective ad ${}_1r_{\frac{1}{2}}$ et $r_{\frac{1}{2}}$ pertinere ex form. (127) ac (126) invenitur. Ergo

$$\left.\begin{aligned} Cos\, 2\, \varphi_{\frac{1}{2}} &= \frac{(1 - Sin\, \varphi \sqrt{2})\; (Cos\, \varphi \sqrt{2} - 1)}{Cos\, 2\, \varphi} \, , \\ Cos\, 2\, {}_1\varphi_{\frac{1}{2}} &= \frac{(1 + Sin\, \varphi \sqrt{2})\; (Cos\, \varphi \sqrt{2} - 1)}{Cos\, 2\, \varphi} \, . \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Ex form. (98) vero est

$$Cos\,\varphi = \frac{1 + Cos^2\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}}}{1 + 2\,Cos\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}} - Cos^2\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}}},$$

unde

$$(1 + Cos\,\varphi)\,Cos^2\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}} - 2\,Cos\,\varphi\,.\,Cos\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}} = Cos\,\varphi - 1\,,$$

et

$$Cos\,2\,\varphi_{-\frac{1}{2}} = \frac{Cos\,\varphi \pm \sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{1 + Cos\,\varphi}\,;$$

quae pro signis superiori et inferiori respective ${}_1r_{-\frac{1}{2}}$ et $r_{-\frac{1}{2}}$ correspondet, ut ex form. (129) et (128) invenitur. Itaque

$$\left.\begin{aligned} Cos\,\varphi_{-\frac{1}{2}} &= \frac{Cos\,\varphi - \sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{1 + Cos\,\varphi}\,, \\ Cos\,{}_1\varphi_{-\frac{1}{2}} &= \frac{Cos\,\varphi + \sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{1 + Cos\,\varphi}\,. \end{aligned}\right\}(131)$$

86. SOLUTIO 3. Quae sequitur ex Problemate VIII, ponendo $p = q$, unde obtinemus ex aequatione (99) pro signo superiori

$$2\,a^4\,p^2 + p^4\,r^2 = a^4\,r^2 - 2\,a^2\,p^2\,\sqrt{(a^4 - r^4)}\,,$$

unde

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{-a^2\,\{a^2 + \sqrt{(a^4 - r^4)}\} \pm a^2\sqrt{\{2\,a^4 + 2\,a^2\,\sqrt{(a^4 - r^4)}\}}}{r^2} \\ &= \frac{-a^2\,\{a^2 + \sqrt{(a^4 - r^4)}\} \pm a^2\cdot\{a\sqrt{(a^2 + r^2)} + a\sqrt{(a^2 - r^2)}\}}{r^2} \\ &= \frac{\{a \mp \sqrt{(a^2 - r^2)}\}\,\{\pm\sqrt{(a^2 + r^2)} - a\}}{r^2}\,a^2\,. \end{aligned}$$

87. SOLUTIO 4. Idem inveniri debet ex formula pro *Digammatis* bisectione, (cf. clar. VERHULST, op. laud., pag. 43.),

$$Sin\,\psi_{\frac{1}{2}} = \frac{Sin\,\frac{1}{2}\,\psi}{\sqrt{(1 + \Delta\,\psi)}}\,\sqrt{2}\,,$$

unde

$$\begin{aligned} Cos\,\psi_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{\Delta\,\psi + Cos\,\psi}{1 + \Delta\,\psi}} = \sqrt{\frac{Cos\,\psi - \Delta^2\,\psi + (1 - Cos\,\psi)\,\Delta\,\psi}{1 - \Delta^2\,\psi}} \\ &= \sqrt{\frac{2\,Cos\,\psi - 1 - Cos^2\,\psi + 2\,(1 - Cos\,\psi)\,\Delta\psi}{1 - Cos^2\,\psi}} = \sqrt{\frac{-1 + Cos\,\psi + \sqrt{2\,(1 + Cos^2\,\psi)}}{1 + Cos\,\psi}}\,, \end{aligned}$$

unde ope form. (93)

$$r_{\frac{1}{2}} = a\, Cos\, \psi_{\frac{1}{2}} = a \sqrt{\frac{-a+r+\sqrt{2\,(a^2+r^2)}}{a+r}}\,.$$

Utrum vero illud $r_{\frac{1}{2}}$ arcum datum ipsum an potius ejus complementum bifariam secet, ex priori solutione patere debet (cf. form. (129)), non vero ex ellipticarum functionum theoria determinari potest.

Quae conjungamus in

THEOREMATE LXIV. Arcus dati ejusque complementi semisses habeant radios vectores $r_{\frac{1}{2}}$, $r_{-\frac{1}{2}}$, semissium vero complementa ${}_1r_{\frac{1}{2}}$, ${}_1r_{-\frac{1}{2}}$, quae notatio eadem pro angulis polaribus valeat, erit ex form. (126) usque ad (131)

$$\left.\begin{aligned}
r_{\frac{1}{2}}^2 &= \frac{\{a-\sqrt{(a^2-r^2)}\}\,\{\sqrt{(a^2+r^2)}-a\}}{r^2}\,a^2\,, & Cos\,\varphi_{\frac{1}{2}} &= \frac{(1-Sin\,\varphi\sqrt{2})(Cos\,\varphi\sqrt{2}-1)}{Cos\,2\,\varphi}\,,\\
{}_1r_{\frac{1}{2}}^2 &= \frac{\{a+\sqrt{(a^2-r^2)}\}\,\{\sqrt{(a^2+r^2)}-a\}}{r^2}\,a^2\,, & Cos\,{}_1\varphi_{\frac{1}{2}} &= \frac{(1+Sin\,\varphi\sqrt{2})(Cos\,\varphi\sqrt{2}-1)}{Cos\,2\,\varphi}\,,\\
r_{-\frac{1}{2}}^2 &= \frac{-a-r+\sqrt{2\,(a^2+r^2)}}{a-r}\,a^2\,, & Cos\,\varphi_{-\frac{1}{2}} &= \frac{Cos\,\varphi-\sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{1+Cos\,\varphi}\,,\\
{}_1r_{-\frac{1}{2}}^2 &= \frac{-a+r+\sqrt{2\,(a^2+r^2)}}{a+r}\,a^2\,, & Cos\,{}_1\varphi_{-\frac{1}{2}} &= \frac{Cos\,\varphi+\sqrt{Cos\,2\,\varphi}}{1+Cos\,\varphi}\,.
\end{aligned}\right\}(132)$$

88. Quando autem Lemniscatae arcum quemvis in plures partes dividere volumus, in aequationes altioris gradus incidimus. (cf. aequationes (119) usque ad (124), nec non quae a clar. Verhulst in opere cit., pag. 46, sqq., de *digammatis* divisione exponuntur.). Quarum solutionem celeberrimus Gauss in opere suo Disquisitiones Arithmeticae, Lips. 1801, Sect. VII, pag. 593, quo resolutionis aequationum binomium inventionem publici juris fecit, ex eadem methodo peti posse annunciavit, insuper addens:

» de illis functionibus transcendentibus amplum opus peculiare paramus,"

quod mihi vero non in manum venit. Postea illustrissimus Abel morte impeditus est, quominus Lemniscatae arcuum divisioni resolutionis classis aequationum algebraicarum theoriam suam, ut et functionibus circularibus, applicaret. (cf. Memoria 8 in Diario Journal von Crelle, Tomo IV, pag. 131, sqq., cui titulus: Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.). In ejusdem Diarii Tomo X, pag. 167, sqq., apparuit memoria celeberrimi G. Libri, cui titulus est: Mémoire sur la résolution des équations

algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné; in qua auctor sibi fundamentum sumit relationem inter radios vectores arcuum 2^n - plicium

$$r_1{}^4 = \frac{4\,r^4\,(1 - r^4)^2}{(1 + r^4)^4} \;,$$

et ex formationis natura deducit aequationum decompositionem in factores rationales, quorum pe quaestio solvi potest. Quoniam vero haec tum cum functionum, tum cum numerorum theoria arctius cohaereant, longiora autem expositu forent, nec ad argumentum pertinere proprie dici possint, me hîc persistere ne quis aegre ferat.

89. Quando vero Quadrantem integrum dividere volumus, ulterius progredi licet, antequam in talium aequationum altioris gradus resolutionem incidamus, quod expositio illustrabit, si transeamus ad divisionem Lemniscatae Quadrantis ex commemoratis petendam, et nobis solutum ponamus

PROBLEMA X. Lemniscatae Quadrans bifariam secetur.

SOLUTIO 1. Hoc obtinebit, si alicujus arcus radius vector arcus inversi radio vectori aequalis sit, unde ergo ambo arcus Quadrantis dimidio aequales erunt. Habemus igitur ex form. (89), hîc etiam simplicitatis gratia semi-axin a unitatem ponendo,

$$r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}}\,, \qquad \text{unde} \qquad r^4 + 2\,r^2 - 1 = 0 \quad , \quad r^2 = -1 + \sqrt{2}\,, \quad (133)$$

ubi signi duplicis inferius omittendum est ne r imaginarium evadat. Si igitur radium vectorem Quadrantem bisecantem per α denotemus, erit

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)} \;. \quad (134)$$

SOLUTIO 2. Idem inveniamus necesse est ex form. (96), ubi, pro $r_1 = a$, $r = \alpha$ esse debet, id est

$$\frac{2\,\alpha\sqrt{(1 - \alpha^4)}}{1 + \alpha} = 1\;, \qquad \text{unde} \qquad 0 = (\alpha^4 + 2\,\alpha^2 - 1)^2\;,$$

eadem ac aequatio (133).

SOLUTIO 3. Idem denique ex form. (94) prodire debet, ubi, pro $r_2 = 0$, $r = \alpha$ esse sequitur, ergo

$$0 = \frac{1 - 2\,\alpha^2 - \alpha^4}{1 + 2\,\alpha^2 - \alpha^4}\;, \quad \text{vel} \quad 0 = \alpha^4 + 2\,\alpha^2 - 1\,,$$

eadem ac aequatio (133).

90. Hinc sequitur pro angulo polari, radio vectori α correspondenti, quem Φ_1 vocabimus,

$$Cos\, 2\, \Phi_1 = -1 + \sqrt{2}\ , \quad Cos\, \Phi_1 = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\ ; \qquad (133)$$

unde

THEOREMA LXV. Puncti, ubi Lemniscatae Quadrans bifariam dividitur, radius vector et angulus polaris sunt, semi-axi pro unitate sumto,

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}\ , \qquad (134)$$

$$Cos\, \Phi_1 = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\ . \qquad (135)$$

Si vero semi-axin rursus introseramus, fit

$$\alpha = \sqrt{a\,(2\,e - a)}\ ; \qquad (136)$$

unde

THEOREMA LXVI. E foco cum excentricitate circulum describas, qui in perpendiculo, e vertice in axin erecto, partem inde a vertice determinat, radio vectori α aequalem; ergo (cf. Theorema XLVIII) linea, quae hanc intersectionem cum centro jungit, Quadrantem bisecet necesse est. (vid. Fig. 11).

Quod a VECHTMANN in Diss. laud., pag. 33, alio modo deducitur.

91. **PROBLEMA XI.** Lemniscatae Quadrans trifariam dividatur.

SOLUTIO 1. Hoc fiet, si arcus alicujus dupli radius vector cum arcus simplicis inversi radio vectori coincidat, puta si

$$\frac{2\,r\sqrt{(1 - r^4)}}{1 + r^4} = \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}}, \quad \text{unde} \quad 1 - 2\,r - 2\,r^3 + r^4 = 0 \qquad (137)$$

SOLUTIO 2. Idem obtinebit quod ad arcuum in solutione prima complementa, id est, si

$$r = \frac{1 - 2\,r^2 - r^4}{1 + 2\,r^2 - r^4}\ , \quad \text{unde} \quad (1 + r)\,(1 - 2\,r - 2\,r^3 + r^4) = 0\ ;$$

vel quia $(1 + r)$ 0 aequale esse nequit manet aequatio (137).

SOLUTIO 3. Idem r invenire debemus, si in form. (123) $r_3 = 1$ ponamus, unde

$$1 + 6\,r^4 - 3\,r^8 = 3\,r - 6\,r^5 - r^9\ , \quad \text{et} \quad (1 - 2\,r - 2\,r^3 + r^4)^2\,(1 + r) = 0\ .$$

SOLUTIO 4. Idem denique r prodire debet ex form. (124) si ${}_1r_3 = 0$ ponamus, id est.

$$1 - r^2 = 0, \text{ aut } (1+r^4)^2 - 4r^2(1+r^2)^2 = (1+2r+2r^3+r^4)(1-2r-2r^3+r^4) = 0;$$

quarum prima aequatio dabit $r = 1$, quod hîc nullius est utilitatis; in secunda aequatione factor primus daret r negativum, quod fieri nequit: ergo superest factor posterior idem ac form. (137).

SOLUTIO 5. Si contra arcus, tertiae Quadrantis parti aequalis, complementi radium vectorem quaeramus, in form. (123) $r_3 = 0$ ponere debemus, unde

$$3 - 6r^4 - r^8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

SOLUTIO 6. Quod etiam inventuri sumus, si in form. (124) ${}_1r_3 = 1$ sumamus, id est,

$$1 = \frac{1 + 2r^4 + r^8 - 4r^2(1 + 2r^2 + r^4)}{1 + 2r^4 + r^8 + 4r^2(1 - 2r^2 + r^4)} \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}},$$

vel reducendo

$$0 = (3 - 6r^4 - r^8)^2 .$$

92. Ex quibus nunc ut radiorum vectorum valores quaeramus, ponamus aequationem (137) sub forma

$$0 = 1 - 2r - 2r^3 + r^4 = (1 + pr + r^2)(1 + qr + r^2);$$

quo facto, secundum regulas theoriae coefficientium indeterminatarum, eruimus

$$R = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}, \text{ et } \quad R = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{-2\sqrt{3}}}{2};$$

quorum posterior aequatio, R imaginarium quum daret, rejicienda est; in prima vero, ob R semper unitati minus, signo inferiori tantum est utendum, ita ut restet valor verus

$$R = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

Ex aequatione (138) autem habemus $r^4 = -3 + \sqrt{12}$, signo inferiori omisso, unde

$$R = \sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

Ad ambo R correspondere inveniuntur valores angulorum polarium

$$Cos\, 2\,\Phi_{\frac{1}{3}} = \frac{2 - \sqrt{2\sqrt{3}}}{-1 + \sqrt{3}}, \quad Cos\, \Phi_{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2(-1 + \sqrt{3})}}; \quad \ldots \quad (141)$$

$$Cos\, 2\,\Phi_{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} \quad , \quad Cos\,\Phi_{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2(1+\sqrt{3})}} \; ; \dots\dots (142)$$

unde

THEOREMA LXVII. Punctorum, ubi Lemniscatae Quadrans trifariam secatur, radii vectores et anguli polares sunt

$$R_{\frac{1}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \;(139)\;, \quad Cos\,\Phi_{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2(-1+\sqrt{3})}} \; ; \;. \;(141)$$

$$R_{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} \dots\dots (140)\;, \quad Cos\,\Phi_{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2(1+\sqrt{3})}} \;. \;. \;(142)$$

93. **PROBLEMA XII.** Lemniscatae Quadrans quadrifariam secetur.

SOLUTIO 1. Si alicujus arcus dupli inversi radium vectorem α aequalem sumamus, arcus simplex quarta Quadrantis erit pars, cujus radius vector $R_{\frac{1}{4}}$ ex form. (94)

$$\alpha = \frac{1 - 2r^2 - r^4}{1 + 2r^2 - r^4}$$

erit

$$(1-\alpha)\, R_{\frac{1}{4}}^{\;4} + 2(1+\alpha)\, R_{\frac{1}{4}}^{\;2} = 1-\alpha\;,$$

ergo

$$R_{\frac{1}{4}}^{\;2} = \frac{-1-\alpha+\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{1-\alpha} \; ; \dots\dots\dots\dots\dots (143)$$

ubi tantum signo inferiori utendum est, ne $R_{\frac{1}{4}}$ fiat imaginarium. Hinc quoque ope form. (89) arcus hujusce inversi radius vector prodit

$$R_{\frac{3}{4}}^{\;2} = \frac{-1+\alpha+\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{1+\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots (144)$$

Ne nimis prolixi simus, tantum adnotabimus unde reliquae solutiones, quae eosdem valores (143) et (144) dare debent, petendae sint.

SOLUTIO 2.	Ex form.	(96) ,	ponendo	$r_2 = \alpha$,	erit $r = R_{\frac{1}{4}}$;
» 3.	» »	(123) ,	»	$r_4 = 0$,	» $r = \alpha$;
» 4.	» »	(125) ,	»	$r_4 = 1$,	» $r = R_{\frac{1}{4}}$;
» 5.	» »	(124) ,	»	${}_1r_4 = 0$,	» $r = R_{\frac{1}{4}}$;
» 6.	» »	(124) ,	»	${}_1r_4 = 1$,	» $r = R_{\frac{3}{4}}$;
» 7.	» »	(126) ,	»	$r = \alpha$,	» $r_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{4}}$;
» 8.	» »	(127) ,	»	$r = \alpha$,	» ${}_1r_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{3}{4}}$;
» 9.	» »	(128) ,	»	$r = \alpha$,	» ${}_1r_{-\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{4}}$;
» 10.	» »	(129) ,	»	$r = \alpha$,	» $r_{-\frac{1}{2}} = R_{\frac{3}{4}}$.

94. **SOLUTIO 11.** Sin angulum polarem pro elemento quaesito habere malimus, totidem solutiones petere possumus ex formulis cuique valori r semper pro $Cos\,\varphi$ adnixis. Facilius vero est, hoc casu, angulos polares quaesitos determinare ex valoribus pro radio vectore inventis. Est igitur

$$Cos\,2\,\Phi_{\frac{1}{4}} = \frac{-1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}\,,$$

unde

$$Cos\,\Phi_{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}-2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}{2\,\{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\}}}\;; \qquad (145)$$

item

$$Cos\,2\,\Phi_{\frac{3}{4}} = \frac{-1+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}, \text{unde } Cos\,\Phi_{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}{2\,\{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\}}}. \qquad (146)$$

Hinc

THEOREMA LXVIII. Punctorum, ubi Lemniscatae Quadrans quadrifariam secatur, radii vectores et anguli polares sunt

$$R^2_{\frac{1}{4}} = \frac{-1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}} (143)\,, \quad Cos\,\Phi_{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}-2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}{2-2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}}\;; \; (145)$$

$$R^2_{\frac{2}{4}} = \alpha^2 = \sqrt{2}-1 \;\ldots\ldots\ldots\; (134)\,, \quad Cos\,\Phi_{\frac{2}{4}} = Cos\,\Phi_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\;;\;\ldots\ldots\; (135)$$

$$R^2_{\frac{3}{4}} = \frac{-1+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}} \; (144), \quad Cos\,\Phi_{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}{2-2\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}}\,. \; (146)$$

95. **PROBLEMA XIII.** In Lemniscatae Quadrantis quintamsectionem inquiratur.

SOLUTIO. Si chorda Quadrantis quintae partis, quae a centro incipit, sit $R_{\frac{1}{5}} = r$, habemus pro chorda arcus inversi $R_{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}$, et tunc ope Theorematis XLIX sequentes relationes

$$\left.\begin{aligned}
&R_{\frac{1}{5}} = r\,, && R_{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1-r}{1+r^2}}\,,\\
&R_{\frac{2}{5}} = \frac{2r\sqrt{(1-r^4)}}{1+r^4} = p\,, && R_{\frac{3}{5}} = \frac{1-2r-r^4}{1+2r-r^4} = q\,,\\
&R_{\frac{4}{5}} = \frac{2p\sqrt{(1-p^4)}}{1+p^4}\;; && R_{\frac{1}{5}} = \frac{1-2q-q^4}{1+2q-q^4}\,.
\end{aligned}\right\} (147)$$

Si nunc ambos valores $R_{\frac{1}{5}}$, vel etiam $R_{\frac{4}{5}}$, aequales ponamus, inde erui potest valor r, et hinc reliquorum $R_{\frac{2}{5}}$, $R_{\frac{3}{5}}$, $R_{\frac{4}{5}}$ valores inveniri possunt.

96. Quia vero in aequationes altioris gradus incidimus, quod eo magis valet de n - sectione, quando n majus quam 5 est, etiam hîc ad analyseos superioris adjumenta transfugere debemus, de quibus n°. 88 monuimus.

Caeteroquin ex hujus Problematis solutionis methodo patet, quomodo inquisitio instituenda sit pro divisione Quadrantis in

$$2^m + 2^n$$

partes. Quia enim pro arcubus directis

$$2\text{ - cuplo},\quad 2^2\text{ - cuplo},\quad 2^3\text{ - cuplo, \&c}\ ,$$

radios vectores in radii vectoris arcus simplicis r functione, et contra pro arcubus inversis

$$1\text{ - cuplo},\quad 2\text{ - cuplo},\quad 2^2\text{ - cuplo},\quad 2^3\text{ - cuplo, \&c}\ ,$$

quoque in radii vectoris r functione exprimi queunt, ex ejusdem radii vectoris duobus valoribus, ex utraque serie repertis, aequiparandis, aequationem in r assequemur, altioris gradus, cujus solutio a principiis illis analyseos superioris pendet.

§ 6.

OBSERVATIONES DIVERSAE.

97. Observationes diversas, nec non applicationes speciales expositorum, nunc una cum nonnullis theorematibus tradere non abs re esse arbitror, imprimis quia eorum expositioni interserendorum locus opportunus non adfuit.

Primum sub unum conspectum colligamus, quid de punctis, proprietate quadam excellente gaudentibus, sparsim monuimus. Puncta haecce sunt centrum et vertex, nec non ea, ubi tangens vel axi vel tangenti centrali parallela est, nimirum, pro quibus est

$$\varphi = 0^\circ\,, \quad = 15^\circ\,, \quad = 30^\circ\,, \quad = 45^\circ;$$

cujus seriei ratio animadversione digna saltem est.

Invenimus enim (cf. n° 26, form. (34), (35) et (36), et n° 39, form. (50) usque ad (53)) pro

Vertice.	Puncto, ubi tangens parallela est, Tangenti centrali.	Axi.	Centro.
$\varphi = 0^\circ$,	$= 15^\circ$,	$= 30^\circ$,	$= 45^\circ$;
$r = a$,	$= a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$,	$= e$,	$= 0$;
$x = a$,	$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\,a\sqrt[4]{3}$,	$= \frac{1}{2}e\sqrt{3}$,	$= 0$;
$y = 0$,	$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\,a\sqrt[4]{3}$,	$= \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}r$,	$= 0$;
$T = 0$,	$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\,a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = y\sqrt{2}$,	$= \infty$,	$= 0$;
$N = \frac{1}{3}a$,	$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\,a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = T$,	$= \frac{1}{2}e = y$,	$= 0$;
$S_t = 0$.,	$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\,a\sqrt[4]{3} = y$,	$= \infty$,	$= 0$;
$S_n = 0$,	$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\,a\sqrt[4]{3} = y$,	$= 0$,	$= 0$;

	Puncto, ubi tangens parallela est,		
Vertice.	Tangenti centrali.	Axi.	Centro.
${}^{\varphi}S_{t} = \infty$,	$= a\sqrt[4]{\frac{27}{4}} = r\sqrt{3}$,	$= \frac{1}{3}e\sqrt{3} = \frac{2}{3}x$,	$= 0$;
$T = \infty$,	$= 2a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 2r$,	$= \frac{2}{3}e\sqrt{3} = 2\,{}^{\varphi}S_{t}$,	$= 0$;
${}^{\varphi}S_{n} = 0$,	$= \frac{1}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = e^2 : r$,	$= -e\sqrt{3} = -3\,{}^{\varphi}S_{t}$,	$= 0$;
${}^{\varphi}N = a$,	$= a\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = 2\,{}^{\varphi}S_{n}$,	$= 2e = 2r$,	$= 0$;
$\rho = \frac{1}{3}a = N$,	$= \frac{1}{3}a\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}\,{}^{\varphi}S_{t}$,	$= \frac{2}{3}e = {}^{\varphi}T\sqrt{\frac{1}{3}}$,	$= \infty$;
$\xi = \frac{2a}{3} = 2\rho$,	$= \frac{7+4\sqrt{3}}{12\sqrt[4]{3}}a$,	$= e\sqrt{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}$,	$= \infty$;
$-\eta = 0$,	$= \frac{7-4\sqrt{3}}{12\sqrt[4]{3}}a$,	$= e\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}\xi$,	$= \infty$;
$r_2 = a$,	$= a\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{8+3\sqrt{3}}{37}$,	$= e\sqrt{\frac{1}{3}}$,	$= 0$;

unde pro mediis punctis theoremata plurima specialia, quod ad nexum inter diversas lineas memoratas, quorum nonnulla in tabula indicata sunt, peti possunt.

98. Inquiramus in *tangentes focales*, id est, in lineas e foco divergentes, et Lemniscatam tangentes. Ad hunc scopum, si in aequatione tangentis generali (cf. form. (12).)

$$y - y_1 = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ , } \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ubi x_1 et y_1 coordinatae sunt puncti contactus, ponamus $y = 0$, $x = -e$, qui valores in foco obtinent, habemus

$$y_1 = \frac{3y_1^2 - x_1^2}{3x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(e + x_1) \text{ ,}$$

sive

$$(x_1^4 - y_1^4) = (3y_1^2 - x_1^2)\,e\,x_1 \text{ ,}$$

et, valorem y ex form. (2) in hanc aequationem substituendo, eruimus

$$4e^2x_1^3(-3x_1 + 2e) = 0 \text{ ,}$$

unde, quia x_1 τῷ 0 aequale esse nequit, sequitur

$$x_1 = \tfrac{2}{3}e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

Hinc sequitur ex form. (2)

$$y_1 = \tfrac{1}{3}e\sqrt{2} = \tfrac{1}{3}a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

Ex quibus sequitur (vid. Fig. 13.)

$$\left.\begin{aligned} O\,G^2 &= r_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 = \tfrac{2}{3}e^2 \ , \ r_1 = e\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{e\,x_1} \ . \\ Tang\,\varphi_1 &= \frac{y_1}{x_1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \ , \\ G\,F^2 &= (e - x_1)^2 + y_1{}^2 = \tfrac{1}{3}e^2 \ , \\ G\,F'^2 &= (e + x_1)^2 + y_1{}^2 = 3\,e^2 \ . \end{aligned}\right\} \quad (150)$$

Porro ex form. (14) usque ad (17)

$$T = e\sqrt{3}\,, N = \tfrac{1}{5}e\sqrt{6}\ , \ S_t = \tfrac{1}{3}e\ , \ S_n = \tfrac{2}{15}e = \tfrac{1}{5}x_1\ ; \ \ldots\ldots \quad (151)$$

et ex form. (21) usque ad (24)

$$\left.\begin{aligned} {}^{\varphi}S_t &= \tfrac{2}{3}e\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}T\ , \ {}^{\varphi}T = \tfrac{1}{2}e\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}T\ , \ {}^{\varphi}S_n = \tfrac{4}{3}e\sqrt{3} = 2\,{}^{\varphi}S_t\,, \\ {}^{\varphi}N &= e\sqrt{6} = 5\,N = T\sqrt{2}\ ; \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

et ex form. (46), (47) et (49)

$$\rho = \tfrac{2}{3}e\sqrt{6} = {}^{\varphi}S_t\sqrt{2}\,, \ \ \xi = \tfrac{1}{9}e\,, \ \ -\eta = \frac{2\sqrt{2}}{9}e\ , \ \ r_2 = \tfrac{1}{9}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\rho \ \ldots\ldots \quad (153)$$

99. Item inquiramus in *tangentem verticalem*, i. e. quae e vertice divergens curvam tangit. Quo casu in form. (12) valores $y = 0$, $x = -a$ locum habent, unde aequatio illa evadit

$$y_1 = \frac{3\,y_1{}^2 - x_1{}^2}{3\,x_1{}^2 - y_1{}^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}\,(a + x_1)\ ,$$

quae substitutione valoris y ex form. (2) fit

$$0 = 8\,a^3\,x_1{}^3\,(2\,x_1 - a)\,(2\,x_1{}^2 + a\,x_1 - a^2)\ ,$$

e qua eruimus

$$x_1 = 0\ , \quad x_1 = \tfrac{1}{2}a\ , \quad x_1 = \tfrac{1}{4}a\,(1 \pm 3) = a, \text{ aut } = -\tfrac{1}{2}a\,.$$

Posteriorum valorum alter negativus, alter pro altero vertice valet, neutro igitur hic uti possumus; nec minus patet valorem 0 rejiciendum esse. Manet ergo valor

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a\ , \ \ldots\ldots \quad (154)$$

quae quaestioni satisfacit; ex qua invenimus

$$y_1 = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(-\,3 + 2\sqrt{3})}\ ; \ \ldots\ldots \quad (155)$$

unde (vid. Fig. 13.)

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{1}{2} a \sqrt{(-2 + 2\sqrt{3})} \,, \\ \mathrm{Tang}\,\varphi_1 &= \sqrt{(-3 + 2\sqrt{3})} = \sqrt{\mathrm{Tang}\,15^\circ \,.\, \mathrm{Tang}\,60^\circ} \,, \\ \mathrm{HA}^2 &= (a - x_1)^2 + y_1^2 = \tfrac{1}{2} a^2 (-1 + \sqrt{3}) = r_1^2 \,, \\ \mathrm{HB}^2 &= (a + x_1)^2 + y_1^2 = \tfrac{1}{2} a^2 (3 + \sqrt{3}) \,. \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

Hinc form. (14) usque ad (17) ibi fiunt

$$T = a\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \,, N = a\sqrt{(-1+\sqrt{3})} = r_1\sqrt{2} \,,\; S_t = \tfrac{3}{2} a \,,\; S_n = (-2 + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}) a \,; \quad (157)$$

et form. (21) usque ad (24)

$$\left.\begin{aligned} &{}^{\varphi}S_t = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} \,.\, \sqrt{(9 - 5\sqrt{3})} \,,\; {}^{\varphi}T = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} \,.\, \sqrt{(6 - 2\sqrt{3})} \,,\; {}^{\varphi}S_n = -a\sqrt{\tfrac{3}{4}}\sqrt{(1+\sqrt{3})} \,, \\ &{}^{\varphi}N = a\sqrt{(1+\sqrt{3})} \,; \end{aligned}\right\} \quad (158)$$

form. (46), (47), (49) denique

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \tfrac{1}{3} a \sqrt{(1+\sqrt{3})} \,, \quad \xi = \tfrac{1}{6} a (2 + \sqrt{3}) \,, \quad -\eta = \tfrac{1}{6} a \sqrt{(-9 + 6\sqrt{3})} \,, \\ &r_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2(11 - 3\sqrt{3})}}\, a \,. \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

Lineae in hoc nec non praecedenti numero deductae, ad nonnulla theoremata specialia argumentum praebere possunt, ut apud singulas adnotatum est. Elegans denique exinde sequitur

THEOREMA LXIX. Si inde a foco versus centrum in axi partem sumamus excentricitatis quintuplo aequalem, haec linea centro et puncti, cujus tangens per focum transit, in axin projectione harmonice dividitur. (vid. Fig. 13.)

Est enim

$$\mathrm{F'H'} = 5e \,,\; \mathrm{F'O} = e \,,\; \mathrm{OG'} = \tfrac{2}{3} e \,,$$

ergo

$$\mathrm{GH'} = 4e - \tfrac{2}{3} e = \tfrac{10}{3} e \,,$$

inde

$$\mathrm{F'O'} \times \mathrm{GH'} = e \times \tfrac{10}{3} e = 5e \times \tfrac{2}{3} e = \mathrm{F'H'} \times \mathrm{OG'} \,. \qquad \text{Q.E.D.}$$

100. De curva videamus, cujus radius vector est subtangens polaris Lemniscatae in systemate (B). Axin Lemniscatae pro axi polari hujus curvae accipiamus, tunc ψ, angulum axin

inter et lineam subtangentium polarium, anguli φ, radium vectorem Lemniscatae inter et axin, complementum esse patet, quod alterius anguli latus in alterius est perpendiculare. Est porro, si subtangentem polarem per σ denotemus, (cf. form. (21).) ,

$$\sigma = -a \, Cot \, 2\varphi \sqrt{Cos \, 2\varphi} = -a \, Tang \, 2\psi \sqrt{Sin \, 2\psi} \; , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

et

$$\sigma^2 = \frac{a^2 \, Sin^3 \, 2\psi}{Cos^2 \, 2\psi} , \quad \text{et } \sigma^4 = \frac{8 a^2 \, . \, \sigma^3 \, Sin^3 \psi \, . \, \sigma^3 \, Cos^3 \psi}{(\sigma^2 \, Cos^2 \psi - \sigma^2 \, Sin^2 \psi)^2} \; ;$$

quae si ponamus

$$\xi_1 = \sigma \, Cos \, \psi \quad , \quad \eta_1 = \sigma \, Sin \, \psi \; ,$$

fit

$$(\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2)^2 = \frac{8 a^2 \, \xi_1{}^3 \eta_1{}^3}{(\xi_1{}^2 - \eta_1{}^2)^2} , \text{ vel } (\xi_1{}^4 - \eta_1{}^4)^2 = 8 a^2 \xi_1{}^3 \eta_1{}^3 \; , \quad \ldots \quad (161)$$

in qua aequatione ξ_1 et η_1 semper eodem signo gaudeant necesse est. Curva postquam per centrum transit, quo in duas partes aequales dividitur, perpendiculum e centro in axin erectum asymptotum habet.

101. Simili modo in curvam inquiramus, cujus radius vector est Lemniscatae subnormalis polaris in systemate (B), quam σ_1 vocabimus. Si Lemniscatae axin pro hujus curvae axi polari sumas, angulus ψ_1 hunc axin inter et subnormalem polarem, ita ut n° praecedenti, est $90° - \varphi$ aequalis; eruimus ergo ex form. (23)

$$\sigma_1 = -\frac{a \, Sin \, 2\varphi}{\sqrt{Cos \, 2\varphi}} = -\frac{a \, Cos \, 2\psi_1}{\sqrt{Sin \, 2\psi_1}} = -a \, Cot \, 2\psi_1 \sqrt{Sin \, 2\psi_1} \; , \quad \ldots \ldots \quad (162)$$

et

$$\sigma^2{}_1 = \frac{a^2 \, Cos^2 2\psi_1}{Sin \, 2\psi_1} \quad , \quad \sigma^4 = \frac{a^2 \, (\sigma^2{}_1 \, Cos^2 \psi_1 - \sigma^2{}_1 \, Sin^2 \psi_1)^2}{2 \, \sigma_1 \, Sin \, \psi_1 \; . \; \sigma_1 \, Cos \, \psi_1} \; ;$$

unde, si ponamus

$$\xi_2 = \sigma_1 \, Cos \, \psi_1 \quad , \quad \eta_2 = \sigma_1 \, Sin \, \psi_1 \; ,$$

fit

$$(\xi^2{}_2 + \eta^2{}_2) = \frac{a^2 \, (\xi^2{}_2 - \eta^2{}_2)^2}{2 \xi_2 \eta_2} , \text{vel } \left\{ \frac{\xi^2{}_2 - \eta^2{}_2}{\xi^2{}_2 + \eta^2{}_2} \, a \right\}^2 = 2 \xi_2 \eta_2 \quad \ldots \ldots \quad (163)$$

in qua ξ_2 et η_2 semper eodem signo praedita esse debent. Curva postquam per centrum transit, quo in duas partes aequales dividitur, Lemniscatae tangentes centrales asymptotos habet.

102. Transeamus ad

THEOREMA LXX. Cujusvis Lemniscatae puncti radium vectorem inter et radii osculationis in eum radium vectorem projectionem constans est ratio.

THEOREMA LXXI. Projectionis centri osculationis in radium vectorem Lemniscatae locus geometricus est altera Lemniscata, cujus semi-axis, illius axis duabus trientibus aequalis, cum ea incidit.

Quae sequuntur ex iis, quae J. A. SERRET in Diario Journal de LIOUVILLE, Anni 1842, Tomo VII, pag. 114, generaliter exposuit de curvis, quarum perimeter integralibus Eulerianis secundae speciei exprimitur, quarumque aequatio polaris est

$$r^m = \frac{(2\,a)^m}{2}\, Cos\ mt.$$

Quia est

$$\rho = \frac{a^2}{3\,r}\ , (46)\ \text{et}\quad \nu = 3\,\varphi\ , (18)$$

est projectio radii osculationis in radium vectorem, ρ'

$$\rho' = \rho\, Cos\,(\nu - \varphi) = \rho\, Cos\, 2\,\varphi = \frac{a^2}{3\,r}\,.\,\frac{r^2}{a^2} = \tfrac{1}{3}\, r\,, \qquad (164)$$

ergo ratio illa constans in Theoremate LXX commemorata est $\frac{1}{3}$.

Quod ad alterum theorema, pro radio vectore hujus loci geometrici ex form. (164) habemus

$$r - \rho' = r - \tfrac{1}{3}\, r = \tfrac{2}{3}\, r\ ,$$

ergo ex Theoremate V hic locus etiam erit Lemniscata, cujus semi-axis $\frac{2}{3}\,a$ aequalis est. Horum Theorematum intimus est connexus cum Problematis III Solutione 1.

103. Ex modo, in Theoremate I demonstrato, quo Hyperbola aequilatera Lemniscatam Bernouillanam gignit, plurima sequuntur.

Aequatio enim

$$x^2 - y^2 = a^2\ ; \qquad (a)$$

quando, ut in systemate (B), centrum et axin rationalem pro polo et axi coordinatarum polarium R et φ sumamus, evadit

$$R^2\ Cos\, 2\,\varphi = a^2\ ; \qquad (R)$$

dum aequatio Lemniscatae pro iisdem coordinatis polaribus est

$$r^2 = a^2 \; Cos \, 2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Inde habemus

THEOREMA LXXII. Hyperbolae aequilaterae et Lemniscatae Bernouillanae correspondentis radiorum vectorum e centro divergentium eundemque angulum cum axi efficientium, rectangulus constans erit, et quidem quadrato semi-axi superconstructo aequalis.

Nam est $R^2 . r^2 = \frac{a^2}{Cos\,2\,\varphi} . a^2 \; Cos\,2\,\varphi = a^4$, unde $R\,r = a^2$ . . . . (165)

THEOREMA LXXIII. Radiorum vectorum Hyperbolae et Lemniscatae, qui ab utraque axis parte cum eo angulos aequales includunt, extremitates si jungas, haecce linea Hyperbolam tanget, et in Lemniscatae radium vectorem perpendicularis erit.

Est enim ex form. (B) et (R)

$$r^2 = a^2 \; Cos\,2\,\varphi = R^2 \; Cos^2\,2\,\varphi \;,$$

unde

$$r = R \; Cos \; 2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (166)$$

unde ex Figura 1 patet P Q in O P perpendicularem esse, ob angulum $POQ = 2\,\varphi$: exinde ex Theoremate I sequitur P Q etiam Hyperbolam tangere, quod in Q locum habeat necesse est.

THEOREMA LXXIV. Cujusvis Lemniscatae puncti normalis polaris in systemate (B) Hyperbolae aequilaterae puncti correspondentis radio vectori aequalis est.

Est enim (cf. form. (24))

$$^{\varphi}S = \frac{a^2}{r} = R \;.$$

104. Quoniam ex (R) sequitur

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = R \; Tang \;\, 2\,\varphi \;, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

fiunt pro Hyperbola aequilatera

$$\left.\begin{aligned}
{}^{\varphi}\overset{H}{S_t} &= R^2 : (R\ Tang\ 2\varphi) = R\ Cot\ 2\varphi\ , \\
{}^{\varphi}\overset{H}{T} &= \sqrt{(R^2 + R^2\ Cot^2\ 2\varphi)} = R\ Cosec\ 2\varphi\ , \\
{}^{\varphi}\overset{H}{S_n} &= R\ Tang\ 2\varphi\ , \\
{}^{\varphi}\overset{H}{N} &= \sqrt{(R^2 + R^2\ Tang^2\ 2\varphi)} = R\ Sec\ 2\varphi\ .
\end{aligned}\right\}(168)$$

Hinc sequitur

THEOREMA LXXV. Hyperbolae aequilaterae et Lemniscatae subtangentes polares inter, nec non tangentes polares, subnormales polares, ut et normales polares inter eadem est ratio quae inter radios vectores, quae nempe aequalis est duplicatae rationi, inter hujus Lemniscatae puncti radium vectorem et semi-axin obtinenti. Id est

$$\left({}^{\varphi}S_t\ , {}^{\varphi}T\ , {}^{\varphi}S_n\ , {}^{\varphi}N\ , r\right) : : \left({}^{\varphi}\overset{H}{S_t}\ , {}^{\varphi}\overset{H}{T}\ , {}^{\varphi}\overset{H}{S_n}\ , {}^{\varphi}\overset{H}{N}\ , R\right) = r^2 : a^2 \quad . \ . \ . \ . \ (169)$$

Porro quod ad Hyperbolam aequilateram et Lemniscatam correspondentem, habemus

THEOREMA LXXVI. Alterius curvae subtangentem polarem inter et alterius subnormalem polarem rectangulus quadrato in semi-axin constructo aequalis est.

THEOREMA LXXVII. Alterius curvae tangentem polarem inter et alterius subnormalem polarem rectangulus quadrato in Hyperbolae puncti correspondentis radium vectorem constructo aequalis est.

105. Sed etiam altero conspectu intima adest relatio Hyperbolam aequilateram inter et Lemniscatam correspondentem. Posito enim semi-axe unitati aequali, aequationes (B) et (R) evadunt

$$r^2 = Cos\ 2\varphi \quad , \quad R^2\ Cos^2\ \varphi = 1\ ;$$

unde

THEOREMA LXXVIII. Lemniscata curva polaris inversa est Hyperbolae aequilaterae correspondentis quod ad systema (B).

Ex quo sequeretur partim Theorema LXXV. (cf. clar. G. J. VERDAM, Opmerkingen over zekere soort van kromme lijnen, pag. 90).

106. Sequantur nonnulla theoremata, quae celeb. CHASLES in Diario Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Acad. des Sciences, 21 Juill. 1845, Tomo XXI, pag. 199, sine demonstratione tradidit.

THEOREMA LXXIX. Cujusvis Lemniscatae puncti radius vector et perpendiculum e puncto in eum erectum, in Hyperbola aequilatera duo puncta determinant, quae eadem gaudent abscissa; in quibus punctis Hyperbola radio vectore Lemniscatae secatur, perpendiculo vero tangitur. (vid. Fig. 1).

Sit $OP = r$, $OQ' = R$, et $\angle AOP = \varphi$,

erit

$$\left.\begin{aligned} OM &= r\, Sec\, \varphi\ , \quad \text{et} \quad PM = r\, Tang\, \varphi\ , \\ ON &= R\, Cos\, \varphi\ , \quad \text{et} \quad Q'N = R\, Sin\, \varphi\ . \end{aligned}\right\} \quad (170)$$

In triangulis similibus OPM et QNO est

$$MP : OP = MN : NQ\ ,$$

vel, quia

$$MN = ON - OM\ ,$$

post valorum cognitorum ex form. (170) substitutionem ,

$$NQ = \frac{r}{r\, Tang\, \varphi}\,(R\, Cos\, \varphi - r\, Sec\, \varphi) = \frac{R\, Cos^2 \varphi - r}{Sin\, \varphi}\ ,$$

vel ex form. (163)

$$NQ = \frac{R\, Cos^2 \varphi - R\, Cos\, 2\, \varphi}{Sin\, \varphi} = \frac{R\, Sin^2 \varphi}{Sin\, \varphi} = R\, Sin\, \varphi = Q'N\ .$$

Inde ex Hyperbolae versus axin OA symmetria sequitur haecce puncta eandem abscissam habere.

Caeterum illud perpendiculum Hyperbolam tangere ex Theoremate LXXIII sequitur.

Ex hisce statim sequitur

THEOREMA LXXX. Radii vectores, ad ambas arcus Lemniscatae extremitates ducti, prolongati, arcum in Hyperbola determinant aequalem ei, qui in hac curva perpendiculis determinatur, in ambos radios vectores ex Lemniscatae arcus extremitatibus erectis: qui ambo arcus Hyperbolae aequilaterae arcus Lemniscatae *arcus correspondentes* vocantur.

107. Porro habemus fundamentale

THEOREMA LXXXI. Pro duobus in Lemniscata arcubus aequalibus, arcus in Hyperbola correspondentes differentia rectificabili gaudent.

Sint radii vectores singulos arcus definientes respective

$$r_1 \text{ et } r'_1 \quad , \quad r_2 \text{ et } r'_2 \; ,$$

et anguli eos inter et axin respective

$$\varphi_1 \quad , \quad \varphi'_1 \; , \quad \text{et} \quad \varphi_2 \quad , \quad \varphi'_2 \; ,$$

qui ita ordinati sint, ut sit

$$\varphi_1 < \varphi_1' \quad , \quad \varphi_2 < \varphi_2' \; .$$

Ponamus

$$Cos\, 2\varphi_1 = Cos^2\, \psi_1 \;,\; Cos\, 2\varphi_1' = Cos^2\, \psi_1' \;,\; Cos\, 2\varphi_2 = Cos^2\, \psi_2 \;,\; Cos\, 2\varphi_2' = Cos^2\, \psi_2' , \quad (171)$$

illi arcus exprimuntur, (cf. Theorema XLV form. (83).) ,

$$\left.\begin{aligned} s_{\varphi_1}^{\varphi_1'} &= e\,\{dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi_1') - dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi_1)\} \;, \\ s_{\varphi_2}^{\varphi_2'} &= e\,\{dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi_2') - dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi_2)\} \;. \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

Porro pro iisdem angulis polaribus et radiis vectoribus correspondentibus R, est Hyperbolae aequilaterae aequatio

$$R^2 = a^2\, Sec\, 2\varphi \;, \quad \ldots\ldots \quad (R)$$

unde deduximus

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = R\, Tang\, 2\varphi \quad \ldots\ldots \quad (168)$$

Unde si arcum Hyperbolae aequilaterae per σ denotemus, fit

$$\sigma = \int \sqrt{(\partial R^2 + R^2\, \partial \varphi^2)} = \int \sqrt{(R^2\, Tang^2\, 2\varphi\, \partial \varphi^2 + R^2\, \partial \varphi^2)}$$

$$= \int R\, Sec\, 2\varphi\, \partial \varphi = a \int \partial \varphi \,.\, Sec\, 2\varphi \sqrt{Sec\, 2\varphi} \;.$$

Posito

$$Cos\, 2\varphi = Cos^2\, \psi \;, \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

erit, (cf. form. (72).) ,

$$\partial \varphi = \frac{Cos\, \psi \sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\, Sin^2\, \psi)}}\, \partial \psi \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

unde

$$\sigma = a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \int \frac{Cos\,\psi\,\partial\,\psi}{Cos^2\,\psi . Cos\,\psi \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}$$

$$= 2e \int \frac{+1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi - \frac{1}{2}\,Cos^2\,\psi}{Cos^2\,\psi \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\,\partial\,\psi = 2e \left\{ - \int \frac{\frac{1}{2}\,Cos^2\,\psi\,\partial\,\psi}{Cos^2\,\psi \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}} + \int \frac{\partial\psi \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}{Cos^2\,\psi} \right\}$$

$$= 2e \left\{ - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial\,\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}} + \int \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}\,.\,\partial\,.\,Tang\,\psi \right\}$$

$$= 2e \left\{ - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial\,\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\psi)}} + Tang\,\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\psi)} - \int Tang\,\psi\,.\,\tfrac{1}{2}\,\frac{-\frac{1}{2}\,.\,2\,Sin\,\psi . Cos\,\psi\,\partial\,\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}} \right\}$$

$$= 2e \left\{ Tang\,\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)} - \tfrac{1}{2} \int \frac{1 - Sin^2\,\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\,\partial\,\psi \right\}$$

$$= 2e \left\{ Tang\,\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)} - \tfrac{1}{2} \int \frac{-1 + 2\,(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}}\,\partial\,\psi \right\}$$

$$= 2e \left\{ Tang\,\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial\,\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)}} - \int \partial\,\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,Sin^2\,\psi)} \right\} ;$$

vel si signis, a clar. Verhulst, op. cit., propositis, utamur

$$\sigma = 2e \left\{ Tang\,\psi . \Delta\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi) + \tfrac{1}{2}\,dig.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi) - eps.\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi) \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

Quia vero modulus in functionibus ellipticis arcus et Lemniscatae et Hyperbolae aequilaterae semper $\sqrt{\frac{1}{2}}$ aequalis est, eum exprimendi nulla est necessitas; quo igitur remoto, et e unitati aequali posito, habemus pro arcubus Lemniscatae (168) et pro arcubus hisce in Hyperbola correspondentibus

$$\left.\begin{aligned}
s_{\varphi_1}^{\varphi_1'} &= dig.\,(\psi_1') - dig.\,(\psi_1)\ ; \\
s_{\varphi_2}^{\varphi_2'} &= dig.\,(\psi_2') - dig.\,(\psi_2)\ ; \\
\sigma_{\varphi_1}^{\varphi_1'} &= 2 Tang\,\psi_1 . \Delta(\psi_1) - 2 Tang \psi_1' . \Delta(\psi_1') + dig.(\psi_1) - dig.(\psi_1') - 2eps.(\psi_1) + 2eps.(\psi_1'); \\
\sigma_{\varphi_2}^{\varphi_2'} &= 2 Tang\,\psi_2 . \Delta(\psi_2) - 2 Tang \psi_2' . \Delta(\psi_2') + dig.(\psi_2) - dig.(\psi_2') - 2eps.(\psi_2) + 2\,eps.(\psi_2').
\end{aligned}\right\} (174)$$

Nunc si ponas (cf. clar. VERHULST, op. laud., pag. 58, 63, 65)

$$\left.\begin{aligned} Cos\,\mu_1 &= Cos\,\psi_1'.\ Cos\,\psi_1 + Sin\,\psi_1'.\ Sin\,\psi_1.\ \Delta\,\mu_1\ , \\ Cos\,\mu_2 &= Cos\,\psi_2'.\ Cos\,\psi_2 + Sin\,\psi_2'.\ Sin\,\psi_2.\ \Delta\,\mu_2\ , \end{aligned}\right\}(175)$$

fit

$$\left.\begin{aligned} dig.\,(\psi_1') - dig.\,(\psi_1) &= dig.\,(\mu_1)\ ; \\ dig.\,(\psi_2') - dig.\,(\psi_2) &= dig.\,(\mu_2)\ ; \\ eps.\,(\psi_1') - eps.\,(\psi_1) &= eps.\,(\mu_1) - \tfrac{1}{2}\,Sin\,\psi_1'.\ Sin\,\psi_1.\ Sin\,\mu_1\ ; \\ eps.\,(\psi_2') - eps.\,(\psi_2) &= eps.\,(\mu_2) - \tfrac{1}{2}\,Sin\,\psi_2'.\ Sin\,\psi_2.\ Sin\,\mu_2\ ; \end{aligned}\right\}(176)$$

quorum substitutione fiunt aequationes (170)

$$s_{\varphi_1}^{\varphi_1'} = dig.\,(\mu_1)\ , \qquad s_{\varphi_2}^{\varphi_2'} = dig.\,(\mu_2)\ ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\varphi_1}^{\varphi_1'} &= 2\,Tang\,\psi_1.\Delta(\psi_1) - 2\,Tang\,\psi_1'.\Delta(\psi_1') - dig.(\mu_1) + 2\,eps.(\mu_1) - Sin\,\psi_1'.Sin\,\psi_1.Sin\,\mu_1\ ; \\ \sigma_{\varphi_2}^{\varphi_2'} &= 2\,Tang\,\psi_2.\Delta(\psi_2) - 2\,Tang\,\psi_2'.\Delta(\psi_2') - dig.(\mu_2) + 2\,eps.(\mu_2) - Sin\,\psi_2'.Sin\,\psi_2.Sin\,\mu_2. \end{aligned}\right\}(178)$$

Quando nunc est

$$s_{\varphi_1}^{\varphi_1'} = s_{\varphi_2}^{\varphi_2'}\ ,$$

erit ex form. (173)

$$dig.\,(\mu_1) = dig.\,(\mu_2)\ ;$$

ergo

$$\mu_1 = \mu_2\ , \qquad \text{et hinc} \qquad eps.\,(\mu_1) = eps.\,(\mu_2)\ ;$$

unde in differentia arcuum Hyperbolae functiones ellipticae se mutuo tollunt, ita ut remaneat

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\varphi_1}^{\varphi_1'} - \sigma_{\varphi_2}^{\varphi_2'} = {} & 2\,Tang\,\psi_1.\ \Delta\,(\psi_1) - 2\,Tang\,\psi_1'.\ \Delta\,(\psi_1') - Sin\,\psi_1.\ Sin\,\psi_1'.\ Sin\,\mu_1 \\ & - 2\,Tang\,\psi_2.\ \Delta\,(\psi_2) + 2\,Tang\,\psi_2'.\ \Delta\,(\psi_2') + Sin\,\psi_2.\ Sin\,\psi_2'.\ Sin\,\mu_1\ ; \end{aligned}\right\}(179)$$

dum hìc valet loco aequationum (175) aequatio

$$\left.\begin{aligned} Cos\,\mu_1 &= Cos\,\psi_1'.\ Cos\,\psi_1 + Sin\,\psi_1'.\ Sin\,\psi_1.\ \Delta\,\mu_1 \\ &= Cos\,\psi_2'.\ Cos\,\psi_2 + Sin\,\psi_2'.\ Sin\,\psi_2.\ \Delta\,\mu_1\ ; \end{aligned}\right\}(180)$$

quae ultimae aequationes non tantum valorem μ_1 dabunt in functione ψ_1, ψ_1', ψ_2, ψ_2', sed etiam inter quatuor illos angulos relationem praebebunt, ex arcuum aequalitate se devolventem.

Hanc relationem vero, quum functione nimis implicita exprimatur, quam ad formam simpliciorem, e qua relationis postulata in figura conspicua reddi possint, reducere mihi non contigit, hic non tradam. Caeteroquin vix monere opus est, formulam (179) demonstrationem esse theorematis propositi, quia tantum lineas goniometricas continet.

108. Ex quo Theoremate Chasles sequentia deducit.

THEOREMA LXXXII. Si duo Lemniscatae arcus aequales sunt, perpendicula ex arcuum extremitatibus in radios vectores correspondentes erecta quadrilaterum formant, cui circulus inscribi potest.

THEOREMA LXXXIII. Pluribus Lemniscatae arcubus aequalibus sumtis, et in radios vectores singulos determinantes, e curvae punctis, perpendiculis erectis, intersectionis amborum perpendiculorum, ad eundem arcum pertinentium, locus geometricus Hyperbola erit, cum Hyperbola aequilatera, Lemniscatae correspondenti, confocalis.

THEOREMA LXXXIV. A puncto quovis Lemniscatae si ab utraque parte duos arcus aequales quoscunque sumas, per quorum extremitates in radios vectores respectivos perpendicula erigas, horum amborum perpendiculorum, ad aequales arcus pertinentium, intersectionis locus geometricus Ellipsis erit, cum Hyperbola aequilatera, ad Lemniscatam pertinenti, confocalis.

Quorum demonstratio ope Theorematis LXXXI statim patet ex nonnullis theorematibus, quae idem geometricus Chasles in Diario Compt. Rend. hebdom. des séanc. de l'Acad. des Sciences, 23 Oct. 1843, Tomo XVII, pag. 838, circa arcus sectionum conicarum, differentia rectificabili gaudentes, quosque exinde ille auctor *arcus similes* nuncupat, in lucem edidit, verum absque demonstratione; imprimis nempe ex iis, quae ibidem signis I, II et VI designantur. Nam perpendicula, quorum in hisce Theorematibus LXXXII, LXXXIII, LXXXIV mentio fit, nihil aliud sunt (cf. Theorema LXXIII) nisi tangentes Hyperbolae aequilaterae, quae secundum Theorema LXXX, in hac curva arcus determinant aequales iis arcubus, qui radiis vectoribus determinantur; quorumque differentiae, ob arcuum in Lemniscata correspondentium aequalitatem, rectificabiles sunt ex Theoremate LXXXI. Ut verbo dicam, arcus, qui in Hyperbola perpendiculis citatis determinantur, *similes* sunt: ergo theoremata citata hoc loco immediate applicari possunt, quorum vero demonstratio hic non pertinet.

109. Transit CHASLES ad ponendum

THEOREMA LXXXV. Per quodvis Lemniscatae punctum circulus duci potest, per centrum transiens, curvamque in illo puncto tangens.

Positis circuli cujusdam, per originem transeuntis, centri coordinatis α et β, erit ejus aequatio

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y) \, ,$$

unde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{x - \alpha}{y - \beta} \, ; \qquad (181)$$

quinam coefficiens differentialis, tangentem goniometricam anguli tangentem inter et axin referens, pro puncto contactus coefficienti differentiali, ex Lemniscatae aequatione (A) deducto, aequalis esse debet; ergo ex form. (8)

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = - \frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta} = \frac{3 y_1^2 - x_1^2}{3 x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} \, ,$$

unde

$$\alpha y_1 \, (3x_1^2 - y_1^2) + \beta x_1 \, (3 y_1^2 - x_1^2) = 2 x_1 y_1 \, (x_1^2 + y_1^2) \, ,$$

dum ex form. (181) priori sequitur

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = \tfrac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) \, ;$$

ex quibus duabus posterioribus aequationibus facile invenitur

$$\alpha = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{x_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \, ,$$

$$\beta = - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 - y_1^2} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{- \frac{1}{2} a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \, ; \qquad (182)$$

unde circuli hujus radius, quem P vocabimus, erit

$$P = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

In quibus si loco coordinatarum rectangularium, coordinatarum polarium systemate (B) utamur, nobis est

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{a^2 \, Cos\, \varphi_1}{2\, r_1} &&= \tfrac{1}{2} R_1 \, Cos\, \varphi_1 \; , \\ \beta &= \frac{-a^2 \, Sin\, \varphi_1}{2\, r_1} &&= -\tfrac{1}{2} R_1 \, Sin\, \varphi_1 \; , \\ \rho &= \frac{a^2}{2\, r_1} &&= \tfrac{1}{2} R_1 \; ;\end{aligned}\right\}(184)$$

in quibus est R_1 Hyperbolae radius vector, ad angulum polarem φ_1 pertinens. Inde patet, centrum circuli commemorati situm esse infra axin et quidem in Hyperbolae medio radio vectore, qui cum axi angulum $-\varphi_1$ efficit, ita ut hujus radii vectoris cum eo circulo intersectionum altera centrum sit Lemniscatae, altera vero punctum Hyperbolae aequilaterae.

110. Ex quo, ope Theorematum in n°. 108 citatorum, auctore Chasles sequuntur

THEOREMA LXXXVI. Si per plurium arcuum Lemniscatae aequalium extremitates circulos tangentes ducas per centrum curvae transientes, binorum circulorum, ad eundem arcum pertinentium, intersectionis locus geometricus erit locus geometricus projectionis Hyperbolae non-aequilaterae centri in ejus tangentes.

THEOREMA LXXXVII. Si per duorum Lemniscatae arcuum aequalium extremitates circulos ducas tangentes, nec non per centrum curvae transeuntes, hi quatuor circuli quintum quemdam circulum tangent.

111. Priusquam pergimus, duo Theoremata notatu digna, ex iis deducta, quae n° 109 exposita sunt, tradam.

THEOREMA LXXXVIII. Si ex medio Hyperbolae aequilaterae radio vectore circulum ducamus, per centrum transeuntem, ille Lemniscatam tanget in puncto, cujus radius vector ab altera axis parte eundem cum eo efficit angulum, ac ille Hyperbolae radius vector.

THEOREMA LXXXIX. Pro quocunque Lemniscatae puncto, si radium vectorem ita constructum, ut ab altera axis parte cum eo eundem angulum faciat ac puncti dati

radius vector, usque ad Hyperbolam correspondentem producas, et tunc medium hunc Hyperbolae radium vectorem cum puncto dato jungas, normalem construxeris.

Quod ultimum intime cum Theoremate XIV connexum est.

Quibus inventis ex Theoremate LXXXV ad puncta saepius commemorata applicatis, erit pro.

$$r = a\,,\qquad \alpha = \tfrac{1}{2}a\,,\qquad -\beta = 0\,,\qquad P = \tfrac{1}{2}a\,;$$

$$r = a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}\,;\qquad \alpha = \tfrac{1}{4}a\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}}\sqrt{(2+\sqrt{3})}\,,\qquad -\beta = \tfrac{1}{4}a\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}}\sqrt{(2-\sqrt{3})}\,,\qquad P = \tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}}\,;$$

$$r = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = e\,,\qquad \alpha = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6} = x\,,\qquad -\beta = \tfrac{1}{4}a\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}e\,,\qquad P = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = e = 2y = r:$$

$$r = 0\,,\qquad \alpha = \infty\,,\qquad -\beta = \infty\,,\qquad P = \infty\,;$$

$$r = a\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,,\qquad \alpha = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = e\,,\qquad -\beta = \tfrac{1}{2}a\,,\qquad P = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}r\,.$$

112. Ex iis, quae CHASLES addit de Lemniscatae generationis modo quodam, deduximus

THEOREMA XC. Si e foco cum radio $\frac{1}{2}a$ aequali circulum ducas, radius vector cujusvis Lemniscatae puncti aequalis erit chordae, quam in circulo determinat. (vid. Fig. 14).

Est enim circuli aequatio

$$(x-e)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}e^2\,.$$

et Lemniscatae radii vectoris

$$y = \frac{y_1}{x_1}x\,;$$

unde pro horum intersectionibus duabus.

$$x^2 - 2ex + e^2 + \frac{y_1^2}{x_1^2}x^2 = \tfrac{1}{2}e^2\,,$$

unde

$$x = \frac{x_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(x_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2}\,e x_1\,,$$

et

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x = \frac{x_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(x_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2}\, e\, y_1 \ ;$$

unde chordae illius longitudo

$$= \sqrt{\{(x - x)^2 + (y - y)^2\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\left(\frac{e x_1 \sqrt{2(x_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{e y_1 \sqrt{2(x_1^2 - y_1^2)}}{(x_1^2 + y_1^2)}\right)^2\right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2 (x_1^2 + y_1^2)\ 2\ (x_1^2 - y_1^2)}{(x_1^2 + y_1^2)^2}} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = r_1\ .$$

115. Transeamus nunc ad Theorema, quod celeb. J. A. Serret tradidit in Diario Journal de Liouville, Anni 1846, Tomo XI, pag. 89, quodque deducit e generatione ac theoria generali, a se inventis pro curvarum novarum classi, quas *curvas ellipticas primae classis* nuncupat ille auctor, quaeque casu speciali Lemniscatam Bernouillanam quoque continent.

THEOREMA XCI. Supra Lemniscatae cujusvis puncti radium vectorem r e foco divergentem triangulum construamus cujus reliqua latera sint e et $e\sqrt{2} = a$, respective e foco et puncto curvae divergentia; (quod semper fieri potest ob valoris r limites $e\sqrt{2} - e$ et $e\sqrt{2} + e$); angulos lateribus $e\sqrt{2}$ et e oppositos respective α et β nominemus, angulumque polarem, radium vectorem inter et semi-axin, φ : tunc erit constans relatio

$$Cos\,\varphi = Cos\,(\alpha - 2\,\beta) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (185)$$

Sit in Fig. 6

$$\left.\begin{array}{l} FP = r\ ,\ FQ' = e\ ,\ PQ' = e\sqrt{2}\ , \\ \text{erunt} \\ \angle PFQ' = \alpha\ ,\ \angle Q'PF = \beta\ ,\ \angle OFP = \varphi\ . \end{array}\right\} (186)$$

Est

$$Q'P^2 = Q'F^2 + PF^2 - 2\,Q'F \times PF\ .\ Cos\,Q'FP\ ,$$
$$Q'F^2 = Q'P^2 + PF^2 - 2\,Q'P \times PF\ .\ Cos\,Q'PF\ ,$$

quae ope form (186) fiunt

$$2e^2 = e^2 + r^2 - 2er\,Cos\,\alpha \quad , \quad e^2 = 2e^2 + r^2 - 2er\,Cos\,\beta\sqrt{2}\ ,$$

unde

$$2\,Cos\,\alpha = \frac{r}{e} - \frac{e}{r} \quad , \quad 2\,Cos\,\beta\sqrt{2} = \frac{r}{e} + \frac{e}{r}\ ,$$

quarum summae ac differentiae dimidium dat

$$\frac{r}{e} = Cos\,\beta\sqrt{2} + Cos\,\alpha \quad , \quad \frac{e}{r} = Cos\,\beta\sqrt{2} - Cos\,\alpha\ ; \ \ldots\ldots \quad (187)$$

e quibus sequitur, quod jam in n° 32 invenimus,

$$Sin^2\,\alpha = 2\,Sin^2\,\beta \quad , \quad Cos^2\,\alpha = Cos\,2\,\beta\ , \ \ldots\ldots \quad (43)$$

$$r = \frac{e\,Sin\,(\alpha + \beta)}{Sin\,\beta} = \frac{e\,Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha - \beta)} \ \ldots\ldots \quad (42)$$

Porro hic ex aequatione (D) habemus

$$Cos\,\varphi = \frac{r^4 + 4e^2r^2 - e^4}{4er^2} = \frac{1}{4}\frac{r}{e} + \frac{e}{r} - \frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^3\ ; \ \ldots\ldots \quad (67)$$

vel ope form. (187)

$$\begin{aligned}
Cos\,\varphi &= \tfrac{1}{4}(Cos\,\beta\sqrt{2} + Cos\,\alpha) + (Cos\,\beta\sqrt{2} - Cos\,\alpha) \\
&\quad - \tfrac{1}{4}(Cos^3\,\beta\,2\sqrt{2} - 6\,Cos^2\,\beta.\,Cos\,\alpha + 3\,Cos\,\beta.\,Cos^2\,\alpha\sqrt{2} - Cos^3\,\alpha) \\
&= \tfrac{5}{4}\,Cos\,\beta\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\,Cos\,\alpha \\
&\quad - \tfrac{1}{4}\{(1 + Cos\,2\,\beta)\,Cos\,\beta\sqrt{2} - 3\,(Cos\,2\beta + 1)\,Cos\,\alpha + 3\,Cos\,\beta.\,Cos\,2\beta\sqrt{2} - Cos\,\alpha.\,Cos\,2\beta\} \\
&= \tfrac{5}{4}\,Cos\,\beta\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\,Cos\,\alpha - \tfrac{1}{4}(Cos\,\beta\sqrt{2} - 3\,Cos\,\alpha - 4\,Cos\,2\beta.\,Cos\,\alpha + 4\,Cos\,\beta.\,Cos\,2\,\beta\sqrt{2}) \\
&= Cos\,2\,\beta.\,Cos\,\alpha + Cos\,\beta\,(1 - Cos\,2\,\beta)\sqrt{2} \\
&= Cos\,2\,\beta.\,Cos\,\alpha + Cos\,\beta\ .\ 2\,Sin^2\,\beta\ .\ \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} \\
&= Cos\,\alpha.\,Cos\,2\,\beta + Sin\,\alpha.\,Sin\,2\,\beta = Cos\,(\alpha - 2\,\beta)\ .
\end{aligned}$$

Eodem triangulo, cujus in hoc Theoremate mentio fit, usi sumus tum ad tangentem ad quodvis Lemniscatae punctum construendam, tum ad aream exprimendam, hunc radium vectorum inter et axin comprehensam. (cf. Theorema XIII et Theorema XXXVII).

Caeteroquin patet, si punctum P Lemniscatam totam describat, punctum Q' bis circulum describere, cujus centrum sit focus et radius excentricitati aequalis.

114. Ex iis, quae doct. HAEDENKAMP in Diario GRUNERT's Archiv, Tomo III, pag. 400, de constructione quadam Lemniscatae tradidit, deducitur

THEOREMA XCII. E Lemniscatae focis cum radio semi-axi aequali duos describas circulos, et e quovis Lemniscatae puncto cum excentricitati circulum tertium, cujus cum prioribus duobus intersectionum duae in linea, per punctum datum transeunte, collocatae sunt. (vid. Fig. 7).

Si punctum datum pro coordinatarum polarium polo sumamus, quarum axis, axi curvae parallela est, fiunt horum trium circulorum aequationes polares, respective ,

$$r^2 + 2\,\{(x_1 - e)\, Cos\, \varphi + y_1\, Sin\, \varphi\}\, r + (x_1 - e)^2 + y_1{}^2 - 2\, e^2 = 0\ ,$$

$$r^2 + 2\,\{(x_1 + e)\, Cos\, \varphi + y_1\, Sin\, \varphi\}\, r + (x_1 + e)^2 + y_1{}^2 - 2\, e^2 = 0\ ,$$

$$r = e\ .$$

Quorum tertii cum duobus prioribus intersectionum anguli polares eruuntur, post valorum x_1 et y_1 in r_1 et φ_1 ex aequationibus (f) substitutionem ,

$$Sin\, \varphi_2 = \frac{(2\, e\, Cos\, \varphi_1 - r_1)\, \{-e\, Cos\, 2\, \varphi_1 \pm (e - r_1\, Cos\, \varphi_1)\}}{2\, e\ .\ \frac{1}{2}(2\, e\, Cos\, \varphi_1 - r_1)^2}\ .\ 2\, e\, Sin\, \varphi_1$$

$$= \frac{-e\, Cos\, 2\, \varphi_1 \pm (e - r_1\, Cos\, \varphi_1)}{2\, e\, Cos\, \varphi_1 - r_1}\ .\ 2\, Sin\, \varphi_1\ ,$$

$$Sin\, \varphi_3 = \frac{(2\, e\, Cos\, \varphi_1 + r_1)\, \{-e\, Cos\, 2\, \varphi_1 \pm (e + r_1\, Cos\, \varphi_1)\}}{2\, e.\, \frac{1}{2}\, (2\, e\, Cos\, \varphi_1 + r_1)^2}\ .\ 2\, e\, Sin\, \varphi_1$$

$$= \frac{-e\, Cos\, 2\, \varphi_1 \pm (e + r_1\, Cos\, \varphi_1)}{2\, e\, Cos\, \varphi_1 + r_1}\ .\ 2\ Sin\ \varphi_1\ ;$$

e quibus duabus aequationibus pro signis inferioribus invenimus

$$Sin\, \varphi_2 = -\, 2\, Sin\, \varphi_1 .\, Cos\, \varphi\ = -\, Sin\, 2\, \varphi_1 = Sin\, \varphi_3\ ,$$

unde porro

THEOREMA XCIII. Linea in Theoremate praecedenti commemorata cum axi angulum efficit duplum ejus, qui eodem axe et radio vectore puncti dati includitur.

115. Vir doct. L. J. Magnus in Diario Journal von Crelle, Tomo IX, pag. 135, proponit sequens

THEOREMA XCIV. In Lemniscatae circumferentia duo puncta quaecunque assumas, per quae varios ducas circulos, qui singuli cum Lemniscata generaliter duo alia puncta communia habebunt, per quae posteriora et curvae centrum denuo si circulos ducas, horum contactus punctum erit curvae centrum.

Cujus in opere Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, pag. 292, demonstrationem dat idem auctor ex theoria, quae *reciprocitatis* vocatur, petitam. Sed etiam sic demonstrari potest.

Duo puncta data habeant coordinatas polares r_1 et φ_1, r_2 et φ_2; per quae circulum quemvis ducas, cum curva praeterea duo puncta communia habentem, quorum coordinatae polares sint r_3 et φ_3, r_4 et φ_4. Tunc aequatio polaris hujus circuli,

$$r^2 - 2\,(\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi + \beta_1 \operatorname{Sin}\varphi)\,r + \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = R_1{}^2 ,$$

fit pro quatuor hisce punctis

$$\left.\begin{aligned}
r_1{}^2 - 2\,(\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi_1 + \beta_1 \operatorname{Sin}\varphi_1)\,r_1 + \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = R_1{}^2 ,\\
r_2{}^2 - 2\,(\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi_2 + \beta_1 \operatorname{Sin}\varphi_2)\,r_2 + \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = R_1{}^2 ,\\
r_3{}^2 - 2\,(\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi_3 + \beta_1 \operatorname{Sin}\varphi_3)\,r_3 + \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = R_1{}^2 ,\\
r_4{}^2 - 2\,(\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi_4 + \beta_1 \operatorname{Sin}\varphi_4)\,r_4 + \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = R_1{}^2 ;
\end{aligned}\right\}(188)$$

dum aequatio polaris circuli per puncta r_3 et φ_3, r_4 et φ_4 et centrum curvae transeuntis,

$$r = 2\,(\alpha_2 \operatorname{Cos}\varphi + \beta_2 \operatorname{Sin}\varphi) ,$$

pro illis punctis fit

$$\left.\begin{aligned}
r_3 = 2\,(\alpha_2 \operatorname{Cos}\varphi_3 + \beta_2 \operatorname{Sin}\varphi_3) ,\\
r_4 = 2\,(\alpha_2 \operatorname{Cos}\varphi_4 + \beta_2 \operatorname{Sin}\varphi_4) ,
\end{aligned}\right\}(189)$$

dum est

$$r_1^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_1 \ , \ r_2^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_2 \ , \ r_3^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_3 \ , \ r_4^2 = a^2 \, Cos\, 2\varphi_4 \quad \ldots \quad (190)$$

Ex aequationibus (189) sequitur

$$p = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{r_3 \, Sin\, \varphi_4 - r_4 \, Sin\, \varphi_3}{r_4 \, Cos\, \varphi_3 - r_3 \, Cos\, \varphi_4}$$

unde, φ_3 ope form. (190) eliminato, et factore

$$a^4 \, (r_4^2 - r_3^2)$$

(quia τῷ 0 aequalis esse nequit) sublato, eruimus

$$r_3^2 = a^4 \, r_4^2 \, (1 - p^2)^2 \, \frac{(1 + p^2)^2 + 4p^2 - 4p\,(1 + p^2)\, Sin\, 2\varphi_4}{a^4\,(1 - p^2)^4 + 16\, r_4^4 \, p^2 \, (1 + p^2)^2} \quad \ldots \quad (191)$$

Si priorem aequationum (188) a sequentibus abstrahimus, ex differentiis habemus

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\alpha_1}{2\beta_1} &= \frac{(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1 \, Sin\, \varphi_1 - r_3 \, Sin\, \varphi_3) - (r_1^2 - r_3^2)\,(r_1 \, Sin\, \varphi_1 - r_2 \, Sin\, \varphi_2)}{(r_1^2 - r_3^2)\,(r_1 \, Cos\, \varphi_1 - r_2 \, Cos\, \varphi_2) - (r_1^2 - r_2^2)\,(r_1 \, Cos\, \varphi_1 - r_3 \, Cos\, \varphi_3)} \\ &= \frac{(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1 \, Sin\, \varphi_1 - r_4 \, Sin\, \varphi_4) - (r_1^2 - r_4^2)\,(r_1 \, Sin\, \varphi_1 - r_2 \, Sin\, \varphi_2)}{(r_1^2 - r_4^2)\,(r_1 \, Cos\, \varphi_1 - r_2 \, Cos\, \varphi_2) - (r_1^2 - r_2^2)\,(r_1 \, Cos\, \varphi_1 - r_4 \, Cos\, \varphi_4)} \,. \end{aligned}\right\} (192)$$

Ex qua aequatione, si ope form. (190) φ_3 eliminemus, tunc valorem r_3^2 ex form. (191) substituamus, prodit aequatio r_4 et p inter et $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$, quantitates cognitas continens, quam si reducimus, r_4 evanescere vidimus; p igitur determinatur in functione $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$, ita ut idem maneat pro quovis circulo qui per duo puncta data ducatur; omnia circulorum secundae seriei centra igitur in eadem linea, per centrum curvae transeunte, sita erunt, et, quia per centrum hocce transire coguntur, ibidem contactus sit necesse profluit. Calculum vero ob nimiam prolixitatem et formularum monstrosam complicationem hic omittere debemus.

---

116. Ex intersectionis superficierum secundi gradus diversarum, tum inter se, tum cum plano, projectione in planis certae positionis quamquam variae oriantur *curvae Lemniscatae*, frustra conatus sum inter hasce etiam Lemniscatam Bernouillanam determinare, nisi in casu speciali *Tori* specialis cum plano certo intersectionis.

Sit nempe aequatio Tori, cujus meridianus est circulus, generalis

$$\{R \pm \sqrt{(x^2+z^2)}\}^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

ubi est axis coordinatarum y axis rotationis, R distantia circuli centri ad axin illum, et r radius circuli rotationis. — Invenitur hujus superficiei cum plano, plano coordinatarum x et y parallelo, intersectionis aequatio, ponendo in aequatione (193) $z = \alpha$, unde eruimus

$$(x^2+y^2)^2 + 2(\alpha^2 - r^2 + R^2)\,y^2 + 2(\alpha^2 - r^2 - R^2)\,x^2 + (R^2 + r^2 - \alpha^2)^2 - 4R^2r^2 = 0.$$

Si ponamus planum illud secans etiam Torum tangere, est $\alpha = R - r$, et haec aequatio fit

$$(x^2+y^2)^2 + 4R(R-r)\,y^2 - 4Rr\,x^2 + (R^2+r^2)^2 - 2(R^2+r^2)(R-r)^2 + (R-r)^4 - 4R^2r^2 = 0\,,$$

ubi functio constans 0 aequalis evadit. — Ut autem fiat aequatio Lemniscatae Bernouillanae, in promptu est necessaria R inter et r relatio

$$4Rr = 4R(R-r)\,, \qquad \text{vel} \qquad R = 2r\,,$$

unde tunc aequatio

$$(x^2+y^2)^2 = 8r^2(x^2-y^2)$$

cum aequatione (A) coincidit.

Quamobrem torus, conditioni $R = 2r$ satisfaciens, ab J. A. Serret, in Diario Journal de Liouville, Anni 1843, Tomo VIII, pag. 495, vocatur *Lemniscaticus*.

Hinc

THEOREMA XCV. Si *torum Lemniscaticum*, ubi igitur circuli radium inter et circuli centri distantiam ad axin rotationis ratio est $\frac{1}{2}$, secemus plano axi parallelo et torum simul tangenti, intersectio est Lemniscata Bernouillana, cujus excentricitas circuli diametro, id est $2r$, aequalis est.

---

117. Postremo paucis enunciemus, quibus casubus sese in Mechanicis obferat Lemniscata Bernouillana.

THEOREMA XCVI. Curva, cujus arcus et chorda puncto gravi eodem temporis spatio percurruntur, est Lemniscata, in cujus centro punctum labi incipit, cujusque axis cum verticali angulum semi-rectum includit.

(cf. J. A. Serret in Diario Journal de Liouville, Anni 1844, Tomo IX, pag. 28, in Memoria, cui titulus: Sur une propriété mécanique de la Lemniscate, découverte par N. Fusz. Idem vero Theorema propositum esse videtur a geometrico Saladini in Diario Memorie dell' Istituto Nazionale Italico, Tom. I, Parte 2.).

Sit g gravitas; φ angulus verticalem inter et radium vectorem r. Tempora lapsus ejusdem puncti per arcum et radium vectorem sunt

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{r^2+\frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2}}{r\, Cos\,\varphi}}\,\partial\varphi\,, \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2r}{g\, Cos\,\varphi}}\,,$$

quae igitur ibi aequalia sunt. Differentiando obtinemus

$$\partial\varphi\sqrt{\frac{r^2+\frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2}}{r\, Cos\,\varphi}} = 2\,.\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{Cos\,\varphi}{r}}\,.\,\frac{Cos\,\varphi\,\partial r + r\, Sin\,\varphi\,\partial\varphi}{Cos^2\,\varphi}\,,$$

vel

$$Cos\,\varphi\sqrt{(r^2+\frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2})} = Cos\,\varphi\,\frac{\partial r}{\partial\varphi} + r\, Sin\,\varphi\;;$$

quadrando et reducendo eruimus

$$\frac{\partial r}{r} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial.\, Sin\,2\varphi}{Sin\,2\varphi}\,,$$

unde si constantem a ponamus,

$$r^2 = a^2\; Sin\,2\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

Inde sequitur Lemniscatae tangentem centralem cum verticali coincidere.

118. **THEOREMA XCVII.** Punctum materiale, vi constanti e puncto fixo sollicitatum, si per curvae cujusdam arcum et chordam eodem temporis spatio dilabi debeat: curva haecce erit Lemniscata, cujus centrum cum puncto fixo in linea horizontali situm est, et axis infra hanc lineam cum ea angulum semi-rectum efficit.

(cf. OSSIAN BONNET in Diario Journal de LIOUVILLE, Anni 1844, Tomo IX, pag. 116.).

Si puncti fixi ad motus originem distantiam a vocemus, et pro axi coordinatarum polarium sumamus, et punctum posterius pro polo, punctum materiale chordam et arcum percurret in temporibus, quae exprimuntur

$$\int\sqrt{\frac{\partial r^2 + r^2\,\partial\varphi^2}{2\,a\,r\,Cos\,\varphi - r^2}}\ , \quad \text{et} \quad Arc.\,Cos\left(\frac{r - a\,Cos\,\varphi}{a\,Cos\,\varphi}\right)\ ;$$

quae aequiparando, et differentiando erit

$$\sqrt{\frac{\partial r^2 + r^2\,\partial\varphi^2}{2\,a\,r\,Cos\,\varphi - r^2}}$$

$$= -\frac{a\,Cos\,\varphi}{\sqrt{\{a^2\,Cos^2\,\varphi - (r - a\,Cos\,\varphi)^2\}}}\cdot\frac{a\,Cos\,\varphi\,(\partial r + a\,Sin\,\varphi\,\partial\varphi) - (r - a\,Cos\,\varphi)(-a\,Sin\,\varphi\,\partial\varphi)}{a^2\,Cos^2\,\varphi}$$

$$= -\frac{Cos\,\varphi\,\partial r + r\,Sin\,\varphi\,\partial\varphi}{Cos\,\varphi} = -\partial r - r\,Tang\,\varphi\,\partial\varphi\ ,$$

quadrando et reducendo ,

$$Sin\,2\,\varphi\,\partial r = r\,Cos\,2\,\varphi\,\partial\varphi\ ,$$

unde ut supra

$$r^2 = a^2\,Sin\,2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

119. **THEOREMA XCVIII.** Catena flexilis, homogenea, inaequalis crassitiei, in quam vis centralis, distantiae inverse proportionalis, agit, si in aequilibrii statu assumatur tensionem variare constanti ad crassitiem ratione 3, formam Lemniscatae arcus assequitur, cujus axis horizontalis est.

Quod theorema casus est specialis in argumento, quod ab OSSIAN BONNET in Diario Journal de LIOUVILLE, Anni 1844, Tomo IX, pag. 97, expositum est.

120. **THEOREMA XCIX.** Punctum materiale, quod duobus punctis fixis inversa distantiarum ratione attrahitur, et motus initio talem impulsionem assequitur, ut constanti celeritate moveatur, Lemniscatam Bernouillanam describit.

(cf. ill. CASSINI, Eléments d'Astronomie, pag. 149.).

Linea quae duo puncta fixa, quorum distantia sit $2\,e$, jungit, sit axis; originem coordinatarum in media illa distantia ponamus, erit, si attractionis unitatem per g denotemus, ut mos fert,

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g(e-x)}{(e-x)^2+y^2} - \frac{g(e+x)}{(e+x)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-e^2}{(x^2+y^2+e^2)^2-4e^2x^2}\,2gx\;;$$

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{gy}{(e-x)^2+y^2} - \frac{gy}{(e+x)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+e^2}{(x^2+y^2+e^2)^2-4e^2x^2}\,2gy\;.$$

Est porro conditio

$$v^2 = \frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{\partial x^2}{\partial t^2} + \frac{\partial y^2}{\partial t^2} = 2\int\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial x + 2\int\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial y = C\;;$$

ergo differentiando, et valores $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ inventos substituendo, post divisionem per factorem

$$\frac{g}{(x^2+y^2+e^2)^2-4e^2x^2}\;,$$

erit

$$(x^2+y^2-e^2)\,2x\,\partial x + (x^2+y^2+e^2)\,2y\,\partial y = 0\;,$$

unde

$$(x^2+y^2)(\partial.x^2+\partial.y^2) = e^2(\partial.x^2-\partial.y^2)\;,$$

et integrando

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 = e^2(x^2-y^2) \quad \text{vel} \quad (x^2+y^2)^2 = 2e^2(x^2-y^2)\;\ldots\ldots\;(A)$$

121. **THEOREMA C.** Quod ex dictis in Theoremate XCII sequitur.

Sit enim in Figura 15, parallelogramma bilancium in machina aquae vapore mota referente, AMB, CPD et OD tres stipites, et M, O, cardines fixi, C, D, vero mobiles. Motu stipitis AMB, punctum P, in medio CD situm, Lemniscatam Bernouillanam describit, si est relatio

$$2\,OD^2 = 2\,CM^2 = CD^2 = OM^2\;.$$

§ 7.

DE CONSTRUCTIONE SIVE DELINEATIONE ET DE GENERATIONE.

122. Transeamus nunc ad generationis methodos, ad curvae delineationem magis minusve aptas, ex traditis colligendas, iisque quasdam alias addendas. Postea agamus de illis Lemniscatae generationis modis, qui ob difficultates in constructione non ad delineationem inserviunt.

CONSTRUCTIO I. Quae ex Theoremate I sequeretur: puta, ut in tangentem pro quovis Hyperbolae aequilaterae puncto constructam e centro perpendiculum demittas, cujus pes punctum erit Lemniscatae. (vid. Fig. 1). Quum vero perspicuum sit, errorem in Hyperbolae forma, majorem errorem in Lemniscatae forma gignere, satius est nos vertamus ad

123. CONSTRUCTIONEM II. Quae exinde ut et ex Theoremate LXXIII, form. (166) sequitur. Per centrum duas lineas ducas, quarum angulus, recto minor, axi bisecatur, et ex harum cum Hyperbola quatuor intersectionibus in alteram lineam perpendiculum demittas; quorum quatuor perpendiculorum pedes puncta erunt Lemniscatae. (vid. Fig. 1).

124. CONSTRUCTIO III. Ex Theoremate II profluens. Pro quocumque radio vectore e foco divergente r, inter limites $a + c$ et $a - c$ sumto, construas tertiam proportionalem r_1 ad r et c. Circulorum e focis respective cum r et r_1 ductorum intersectiones puncta erunt quaesita. Quae constructio generaliter pro *Cassinoidibus* valet. (cf. VECHTMANN, Diss. laud., pag. 17.).

125. CONSTRUCTIO IV. Quae ex aequatione (B) devolvitur, quaeque ex alio principio deducitur a celeberrimo geometrico COLINUS MAC LAURIN in opere Geometria Organica, Part II, Sect. 3, Prop. XIX. Per centrum lineam ducas cum axi angulum 2φ efficientem, in quam perpendiculum e vertice demittas, et in qua ab altera centri parte, inde a centro ipso,

partem semi-axi aequalem abscindas; supra hanc lineam, $a + a\, Cos\, 2\, \varphi$ aequalem, semi-circulum describas, qui in perpendiculo, e centro curvae in radium vectorem erecto, inde a centro partem determinat, quae est radius vector, $r = \sqrt{(a\,.\,a\, Cos\, 2\, \varphi)} = a \sqrt{Cos\, 2\, \varphi}$, ad angulum φ pertinens. (vid. Fig. 16).

126. CONSTRUCTIO V. Ex eadem aequatione deducta.
In semi-axin circulum construas et per curvae centrum duos radios vectores ducas ab utraque axis parte cum eo eundem angulum φ efficientes, circulumque in punctis Z, Z′ secantes. Arcum Z L sumas arcui Z A aequalem, distantiam $O L = a\, Cos\, 2\, \varphi$ in axin demittas in M, e quo perpendiculum in axin erigas. Hujus cum circulo intersectionis ad curvae centrum distantiam in radios vectores transponendo, puncta curvae quatuor invenies. (vid. Fig. 17).

127. CONSTRUCTIO VI. Quae ex eadem aequatione sequens, a doct. VECHTMANN, in Diss. laud., pag. 19, proponitur.

E foco cum excentricitati semi-circulum describas, et e centro in axin perpendiculum erigas, in quo valorem quemvis r sumas, cum cujus extremitatis ad verticem distantia e centro curvae circuli arcum ducas, cujus cum priori semi-circulo intersectionem centro jungas, et in hanc lineam valorem r primitive sumtum transducas. (vid. Fig. 18).

128. CONSTRUCTIO VII. Quam aequatio (E) obfert. In tangentium centralium altera partem sumas O M, focorum distantiae aequalem: in altera partem O L, radio vectori cuivis aequalem. In rectam M L ex L erecti perpendiculi cum prima tangenti centrali intersectionis ad centrum distantia O N erit $\frac{r^2}{2e}$, ergo $O N^2$ erit $x y$ aequale. Restat igitur ut construamus triangulum rectangulum, cujus hypothenusa sit r, et area $\frac{1}{2}\, O N^2$, cujus altitudo p igitur erit tertia proportionalis ad r et O N; in O L ergo semi-circulum describas, et cum O N ex O alterum circuli arcum ducas, e cujus intersectione cum primo perpendiculum in O M demittas, cujus pedis R ad centrum distantiam, $p = \frac{O N^2}{r}$ aequalem, in prolongatam O M transponas, et ex hujus fine S alteri tangenti centrali parallelam ducas. Hujus cum primo circulo intersectionis distantiae ad O et L coordinatae x et y in tangentibus centralibus sunt. (vid. Fig. 19).

129. CONSTRUCTIO VIII. Ex aequatione (F) deducta. In tangenti centrali inde a centro partem sumas, focorum distantiae aequalem, e cujus extremitate perpendiculum demittas in quemcunque radium vectorem, per centrum ductum. Inde a perpendiculi pede in radii vectoris prolongatione partem sumas perpendiculo ipsi aequalem; et in lineam inde a centro usque ad hujus partis extremitatem semi-circulum ducas, cujus intersectionis cum perpendiculo commemorato ad ejus pedem distantia, $\sqrt{(2\, e\, Sin\, \varphi\ .\ 2\, e\, Cos\, \varphi)} = \sqrt{(2\, e^2\, Sin\, 2\, \varphi)}$ aequalis, erit valor ipsius r. (vid. Fig. 19).

150. **CONSTRUCTIO IX.** Profluens ex form. (G'). Supra semi-axin semi-circulum construas, e cujus cum quocunque radio vectore r intersectione perpendiculum in axin demittas, quod aequale erit

$$\frac{r\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}=y\ ;$$

quo igitur in tangentem centralem transposito, lineae ex extremitate axi parallelae ductae cum radio vectore r intersectio erit punctum Lemniscatae. (vid. Fig. 10).

151. **CONSTRUCTIO X.** Quae ex aequationum (H') prima se devolvit. Si e centro cum radio quovis r circulum ducas, hujus cum perpendiculo, e centro in axin erecto, intersectionis ad verticem distantia erit $\sqrt{(a^2+r^2)}$. Si igitur ad $2e$, r et $\sqrt{(a^2+r^2)}$ quartam construas proportionalem, haec erit x correspondens, eamque ab utraque parte inde a centro in axin colloces, et per extremitates perpendicula ducas, quorum cum circulo memorato intersectiones quatuor erunt Lemniscatae puncta.

152. **CONSTRUCTIO XI.** Ex formularum (H') secunda, eadem methodo invenitur

$$y=\frac{r\sqrt{(a^2-r^2)}}{2e}\ .$$

153. **CONSTRUCTIO XII.** Ex Theoremate XIX petita.

Circulos describas, quorum centra in perpendiculo O X, e centro in axin erecto, sita sint, per focos transeuntes; radium ad focum ducas, in quem e centro perpendiculum dimittas, quod in illo radio inde a foco partem determinat $2y$ aequalem, cujus igitur dimidio in O X ab utraque parte centri curvae collocato, ex extremitatibus axi parallelas ducas, quarum cum circulo, e centro curvae cum radio illius circuli primi aequali ducto, intersectiones quatuor Lemniscatae puncta dabunt. (vid. Fig. 4).

154. **CONSTRUCTIO XIII.** Quae e Theoremate XLI sequitur.

In tangentibus centralibus inde a centro partes sumas, quarum rectangulus $4e^2$ aequalis est; si in lineam, harum partium extremitates conjungentem, e centro perpendiculum dimittas, hujus pes erit punctum quaesitum. (cf. Nieuwe Wisk. Voorst. van *Een onvermoeide, enz.*, Tomo II, pag. 316. (vid. Fig. 2.).

155. **CONSTRUCTIO XIV.** Ex Theoremate LXXII, form. (165), deducta.

Si pro quoque R, radio vectore Hyperbolae aequilaterae, r construas tertiam proportionalem ad R et a, hanc in R inde a centro abscindendo, extremitas erit Lemniscatae punctum.

156. **CONSTRUCTIO XV.** Faciliorem vero se profert, secundum Theorema LXXII vel LXXVIII, ex iis, quae vir clar. G. J. Verdam, in opere Opmerkingen over zekere soort van kromme lijnen, etc., Apr. 1845., pag 88, exposuit.

Hyperbolam aequilateram cum illa, quae ad Lemniscatam pertinet, concentricam, sed hujus focos vertices habentem, construas. Radium vectorem primitivae Hyperbolae quemcumque in tangentem centralem transducas, e cujus extremitate alteri tangenti centrali ducas parallelam, in qua Hyperbola auxiliari inde a tangenti centrali pars abscindetur, quae erit Lemniscatae radius vector correspondens radio vectori Hyperbolae primitivae.

137. CONSTRUCTIO XVI. Ex Theoremate XC profluit.

Si e vertice cum excentricate circulum ducas, et ex centro curvae secantes ducas, in quarum quavis inde a centro partes sumas, chordis in circulo determinatis aequales, Lemniscatae punctum habebis.

138. CONSTRUCTIO XVII. Quam doct. HAEDENKAMP in Diario GRUNERT's Archiv, Tomo III, pag. 400, proponit, (cf. Theorema XCII), et *mechanicam* nuncupat, quaeque derivatur e constructione generali pro illis curvis Lemniscatis ordinis superioris, quae in machina, ope aquae vaporis mota, puncto certo bilancis partim describuntur.

E focis cum radio, semi-axi aequali, circulos duos describas et chordam, iis communem, cujus longitudo est $2\,e$, sic moveas, ut extremitates circulorum circonferentias non deserant, tunc hujus chordae medium Lemniscatam gignet. (vid. Fig. 7).

139. CONSTRUCTIO XVIII. Quae generaliter a VECHTMANN, in Diss. laud., pag. 17, pro *Cassinoidibus* proponitur.

Radios vectores e centro, duobusque focis ad idem Lemniscatae punctum divergentes per

$$r\,,\quad \rho\,,\quad \text{et}\quad \sigma$$

denotemus, angulumque polarem radium vectorem r inter et axin per φ, erunt ex Figura 1,

$$\rho^2 = e^2 + r^2 - 2\,e\,r\,Cos\,\varphi\,,$$
$$\sigma^2 = e^2 + r^2 + 2\,e\,r\,Cos\,\varphi\,,$$

unde

$$\rho^2 + \sigma^2 = 2\,(e^2 + r^2)\;;$$

sed

$$2\,\rho\,\sigma = 2\,e^2\,,\quad \text{(cf. Theorema II)}$$

ergo

$$(\rho + \sigma)^2 = 2\,(2\,e^2 + r^2) = 2\,(a^2 + r^2)\,,\qquad (\rho - \sigma)^2 = 2\,r^2\;;$$

unde

$$\left.\begin{matrix}\rho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{a^2 + r^2}{2}} \pm r\sqrt{\tfrac{1}{2}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(194)$$

ex qua formula pro quocunque r valores ρ vel σ construi licet. Hanc vero constructionem minus expeditam esse conspicuum est.

140. **CONSTRUCTIO XIX.** **In semi-axin circulum construas, ex cujus puncto quovis Q perpendiculum Q R in axin demittas. Sumas**

$$O Q^2 = x^2 + y^2 = a \sqrt{(x^2 - y^2)}, \text{ ex form. (A)}.$$

Porro est

$$O Q^2 = O R \times O A = a \, . \, O R \; ;$$

unde

$$O R^2 = x^2 - y^2 \; ,$$

ergo

$$2 x^2 = O Q^2 + O R^2 \; , \qquad 2 y^2 = O Q^2 - O R^2 = Q R^2 \quad \ldots \; (195)$$

In Q R igitur semi-circulum ducamus, cujus cum radio axi parallelo intersectionis S ad R distantiam in R Q transponamus, ex extremitate T axi parallelam ducamus, quae circulum, e curvae centro cum radio O Q aequali ductum, in puncto quaesito intersecabit, cujus ordinata est R S = R T, et igitur abscissa est

$$O T = \sqrt{(O R^2 + R T^2)} = \sqrt{(y^2 + x^2 - y^2)} = x. \quad \text{(vid. Fig. 20).}$$

Haec constructio eo casu aliquid praestare potest, quo pro valore dato radii vectoris, abscissam vel ordinatam puncti quaeramus.

---

141. Denique monendum restat de iis generationis modis, qui, quamquam non ad delineationem apti, tamen una cum praecedentium nonnullis diversitatem generationis ostendunt, de qua in introitu mentionem fecimus.

Ex formula (E) conspicitur aequationem Lemniscatae in tangentibus centralibus coincidere cum aequatione Hyperbolae aequilaterae cum variabili potentia $(r^2 : 2 e)$.

Ex Theoremate XIII sequitur, Lemniscatam locum esse geometricum verticis P trianguli, cujus vertex F constanter in foco manet, lateraque F Q et P Q excentricitati et semi-axi aequalia sunt, dummodo verticis P motus infinite parvus locum habeat secundum circuli huic triangulo circumscripti radium C P. (vid. Fig. 6).

Ex Theoremate LXXI Lemniscata gignitur ex alterius Lemniscatae centri osculationis projectione in radium vectorem, quo casu ratio axes inter erit ut 3 ad 2.

Theorema LXXXVIII docet, Lemniscatam esse involucrum circulorum, qui ex Hyperbolae aequilaterae medio radio vectore cum hoc dimidio radio vectore ducuntur.

Ex Theoremate XCI patet, triangulus F P Q, cujus vertex F est fixus, latera F Q et P Q excentricitati et semi-axi sunt aequalia, quibus oppositi anguli per α et β denotentur, si tali modo varietur, ut, angulo latus P F inter et axin quemdam fixum O F per φ denotato, constans sit relatio

$$Cos\,\varphi = Cos\,(\alpha - 2\beta)\ ,$$

puncti P locum geometricum esse Lemniscatam, cujus axis est O F, et focus punctum illud fixum F. (vid. Fig. 6).

142. Ponas $x^2 + y^2 = v$, $x^2 - y^2 = w$;

unde

$$x = \sqrt{\frac{v+w}{2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{v-w}{2}};$$

fit aequatio (A)

$$v^2 = a^2\, w\ ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (196)$$

quae est aequatio Parabolae, cujus parameter valorem a^2 habet numericum, et e cujus coordinatarum v et w valoribus valores x et y Lemniscatae construi possunt.

Porro ponamus

$$t = \sqrt{(v^2 - w^2)} = 2\,x\,y\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

unde

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(v+t)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(v-t)}\ ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

quae etiam ad coordinatarum x et y e valoribus v et t constructionem ducunt.

Ex praecedentibus vidimus Lemniscatam oriri, si pro ordinata et abscissa Parabolae Apollonicae aequationes Circuli et Hyperbolae aequilaterae respective substituamus. (cf. clar. G. J. VERDAM, in op. laud. Opmerkingen over zekere soort van kromme lijnen, etc. pag. 71).

Porro sequitur, si pro quocunque Lemniscatae radio vectore r, Hyperbolam aequilateram construas, cujus potentia sit $r^2 : 2\,e$, vel semi-axis rationalis $r^2 : a$, hujus cum circulo concentrico, radio r descripto, intersectiones quatuor puncta esse Lemniscatae. Quae generatio deduci potest et ex aequatione Lemniscatae in tangentibus centralibus $x\,y = (r^2 : 2\,e)^2$ (E) et ex aequatione (H) $x^2 - y^2 = (r^2 : a)^2$.

143. Postremo loco monendum est de modo generationis, quem promotor spectatissimus, vir clar. G. J. Verdam, ex theoria sua generali *linearum Lemniscatarum primae ordinis* deduxit, mihique communicare voluit.

Construas Parabolam, cujus parameter sit a, porro Hyperbolas aequilateras, quarum centra in Parabolae vertice sita sint, et semi-axes p cum Parabolae axi coincidant; ex quarum singularum vertice perpendiculi in axin ducti, et usque ad Parabolam sumti, valor erit $y = \sqrt{ap}$, cum quo e centro Hyperbolae circulum ducas, cujus cum posteriori curva quatuor intersectiones, puncta erunt Lemniscatae; pro quibus autem valet tum aequatio Hyperbolae aequilaterae

$$x^2 - y^2 = p^2 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (199)$$

tum circuli

$$x^2 + y^2 = ap \, , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (200)$$

unde eliminatione quantitatis p

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 p^2 = a^2 (x^2 - y^2) \, . \quad (4)$$

CORRIGENDA.

Pag.	*Reg.*	*loco:*	*legatur:*
2	3	connectio	connexio
6	23	earumque	eorumque
9	17	unum	alteram
	30	unumque	alteramque
	31	harum	horum
13	12	$+ \frac{3 y_1{}^2 - x_1{}^2}{3 x_1{}^2 - y_1{}^2} y =$	$+ \frac{3 y_1{}^2 - x_1{}^2}{3 x_1{}^2 - y_1{}^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} y =$
	18	S'	S_ι
15	7	polares	centrales
19	2	contenti,	contentae,
	16	eriges,	erigas,
27	3	τ,	$\partial \tau$
	5	$Tang\ \tau = \frac{3 y^2 - x^2}{3 x^2 - y^2} \cdot \frac{x}{y}$,	$\partial \tau = \frac{3 (y^2 - x^2)}{3 x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial x}{y}$,
28	16	$\ldots . (2 p + 1) =$	$\ldots . (3 p + 1) =$
	19	vero	enimvero
29	5	$r_2 = e \sqrt{}^1$.	$r_2 = e \sqrt{\tfrac{1}{3}}$.
	9	quarti	tertii
	21	in normalem demittendo,	usque ad normalem erigendo,
30	12	n°. 113	n°. 114
	23	$\xi^2 + \eta^2)^2 =$	$(\xi^2 + \eta^2)^2 =$
	25	ystemate	systemate
32	7	$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{21 b^5 \sqrt{3}}{62 \sqrt{2}}$,	$\frac{\partial u'}{\partial \xi} = \frac{21 b^5 \sqrt{3}}{62 \sqrt{2}}$,
	10	ita ut, ... imaginariorum;	nisi quod cuspide primae speciei, a centro aversa, gaudeat;
	14	demittamus in	erigamus ad

Pap.	*Reg.*	*loco:*	*legatur:*
38	4	constructum	constructus
39	9	$+ 8 e^2 r^2) - (3 r^4 + 12 e^2 r^2 - 3 e^4$	$+ 8 e^2) r^2 - (3 r^4 + 12 e^2 r^2 - 3 e^4)$
44	4	$=$	$= \partial \psi .$
45	17	$+ \partial y^2)^2 =$	$+ \partial y^2) =$
55	8	$+ r \sqrt{}$	$+ r_n \sqrt{}$
65	5	pe	ope
67	20	inferior	inferiori
69	8	$- \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$	$+ \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$
	14	$- 2 \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$	$+ 2 \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$
	18	$1 - r$	$1 - r^2$
72	4	T	${}^{\varphi}T$
	5	$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$
73	12	$= {}^{\varphi}S_{l} \sqrt{2} ,$	$= {}^{\varphi}S_{l} \sqrt{\frac{1}{2}} ,$
75	20	$\sigma^4 =$	${\sigma_1}^4 =$
94	9	$= \ldots\ldots -$	$\sqrt{(\partial r^2 + r^2 \partial \varphi^2)} = \ldots\ldots -$

NB. *Si qui sint, qui loco adjectivi* Bernouillana, *legere malint* Bernouilliana, *ita legant.*

INDEX.

14

THESES.

I.

Circa theorias, recentiori tempore de motu *massarum glaciei*, quae Germanis *Gletscher* dicuntur, propositas, sententia doct. W. WHEWELL probanda:

„ The cause of the motion is gravity; the cause of the steadiness of the motion is the „ melting of the lower surface; the cause of the glacier character of the motion is the „ plasticity."

(Vid. Philos. Magaz., Tom. XXVI, pag. 220.).

II.

Non facio cum clar. J. W. DRAPER, ex experimentis quibusdam (vid. Philos. Magaz., Tom. XXVI, pag. 185) concludente: capillaritatem esse phenomenon electricum.

III.

Theoria celeb. C. DARWIN, de *Insulis Madreporis* admittenda.

IV.

Scientiae prodest, theoriam, cujus generalis exactitudo non dubitatur, quamquam non elaboratam, publici juris fieri.

V.

Ad *undulationes fixas* explicandas non opus est ut eas cum cel. N. SAVART ex parietis vibratione petamus: imo ex undulationum directarum et reflexarum interferentia explicentur.

VI.

Actio fermenti in sacchari fermentatione mechanica est.

VII.

Theoria, quae dicitur *Théorie des Couples*, in Mechanica maximi est momenti.

VIII.

Ingeniose ill. A. VON HUMBOLDT in opere Kosmos, Tom. I, pag. 198,

„Die prachtvolle Erscheinung des farbigen Polarlichtes ist der Act der Entladung, „das Ende eines *magnetischen Ungewitters*."

IX.

Incrementum crassitiei plantarum ex gemmarum evolutione peti debet.

X.

Causae antiquitus efficaces in alterandam telluris superficiei partem, quae vulgo *crusta* dicitur, recentiori tempore eaedem agunt.

XI.

Effectus contactus in Electricitate Galvanica negari nequit.

XII.

Recte celeb. G. B. AIRY indicat (vid. Philos. Magaz., Tom. XXIX, pag. 537.)

„The importance in doubtful cases, of using any received theory, as far as it will „go, even if that theory can claim no higher merit than that of being plausible."

XIII.

Oculi objecta magis propinqua, ut et distantiora, distincte perspiciendi facultas, quae dicitur *Accommodationis*, ex lentis crystallinae locomotione explicanda.

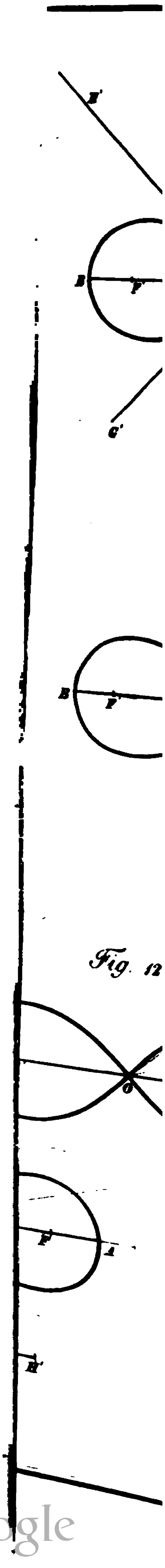
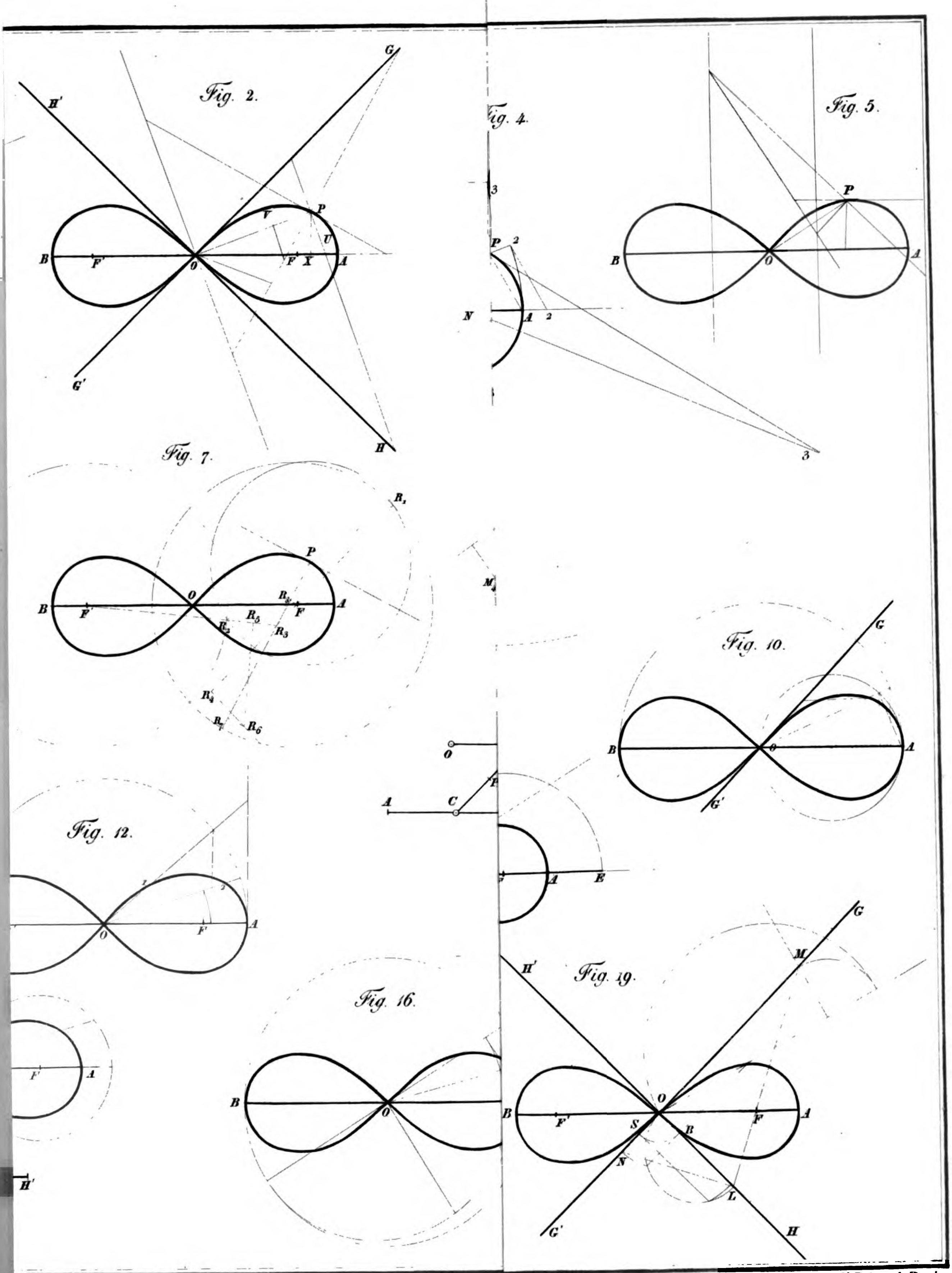


Fig. 12



Dᵗ. Veelwaard Jʳ. sculps.

OVER EENIGE GEVALLEN

BIJ DE

THEORIE

VAN

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN,

WAAR MEN TE ONDERSCHEIDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN GEHEELE OF GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1858.

OVER EENIGE GEVALLEN

BIJ DE

THEORIE

VAN

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN,

WAAR MEN TE ONDERSCHEIDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN' GEHEELEN OF GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR

D^R. BIERENS DE HAAN.

1. Onder de moeijelijkheden in de theorie der bepaalde integralen behoort voorzeker de overgang van het eindige tot het oneindige, en talrijk zijn dan ook de dwalingen, die ontstaan zijn uit het niet behoorlijk letten op de voorzigtigheidsmaatregelen, die hierbij zijn in acht te nemen. Deze overgang kan van tweederlei aard zijn: òf het kan gebeuren, dat eene der beide grenzen van de bepaalde integraal het oneindige tot limiet heeft, òf dit kan het geval zijn met eene standvastige, voorkomende in de functie, die te integreren is. Van elk dezer beide gevallen is het mijn voornemen thans eenige bijzondere voorbeelden te behandelen, en wel zulke, die eensdeels van veel gewigt zijn in de theorie zelve, en ten anderen tot zeer verschillende verklaring en behandeling hebben aanleiding gegeven; deze kunnen niet allen den toets van eene meer bijzondere, strenge overweging doorstaan, en hebben daarom ook tot niet altijd zuivere uitkomsten geleid. Het geldt hier namelijk, hoe vreemd zulks ook in het eerst klinken moge, het onderscheid, dat er somtijds gemaakt moet worden tusschen even en oneven, tusschen geheel en gebroken oneindig

groot; een onderscheid dat meermalen verkeerdelijk over het hoofd werd gezien.

Wanneer men toch eene bepaalde integraal-formule gevonden heeft voor zekere waarden van eene standvastige grootheid h, namelijk $2k$, $2k+1$, ak, pk, (waar a een geheel getal en p een gebroken moet voorstellen) kan het dikwerf voorkomen, dat de gang der redenering juist steunt op dezen bijzonderen overeenkomstigen vorm der standvastige, bijv. het even of oneven zijn, het geheel of gebroken zijn daarvan: is dit het geval, en laat men h tot oneindig aangroeijen, dan gelden de uitkomsten, die alsdan ontstaan, niet algemeen voor $h=\infty$, maar respectivelijk slechts voor $h=2k,=2k+1,=ak,=pk$, met de voorwaarde $k=\infty$.

Uit dit oogpunt nu zullen hier vooreerst te behandelen zijn de integralen van den vorm:

$$\int_a^b Sin.kx.f(x)\,dx \quad \text{of} \quad \int_a^b Cos.kx.f(x)\,dx. \quad (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

Het eerst, ongeveer een vierde eeuw geleden, zijn zulke integralen beschouwd door LEJEUNE-DIRICHLET en wel in CRELLE's *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 4, S. 157: sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

Hij onderscheidde echter teregt, waar het hier juist op aankwam, namelijk het geval, dat h den vorm $2k+1$ bezat en dus oneven was, ook voor $k=\infty$. Zijne opvolgers echter zagen dit bij soortgelijke bespiegelingen dikwerf over het hoofd en geraakten daardoor somtijds tot valsche uitkomsten. Dit onderzoek zal, naar ik meen, tot eenige belangrijke gevolgtrekkingen aanleiding geven.

Vervolgens zullen de Integralen van den vorm

$$\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\,\alpha x,\, Cos.\,\beta x).f(x)\,dx$$

worden nagegaan. Deze integralen zijn van oudere herkomst, en zijn zoowel de aanleiding tot, als het gevolg van zeer verschillende en uiteenloopende, ja zelfs tegenstrijdige, beschouwingen geweest: in lateren tijd heeft vooral RAABE zich veel daarmede bezig gehouden; mijns inziens zijn evenwel somtijds deze uitkomsten, behalve om andere redenen, ook nog daarom niet geldig, omdat de integraal alsdan eigenlijk slechts bestaat onder dezen of dergelijken vorm

$$\int_0^{2\pi k} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x,\,Cos.\,\beta\,x).f(x)\,d\,x.\ \ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

zoodat hier de bovenste grens ∞ van den bijzonderen vorm $2\pi k$ bijv. zijn moet. De aldus verkregen uitkomsten zullen op die wijze somtijds van de gewone, als waar aangenomene, moeten verschillen.

Ik geloof, dat deze beide punten van genoeg belang zijn, dat de opzettelijke behandeling daarvan niet ongeschikt of onnut wezen zal.

I. Over de Integralen $\int_a^b Sin.\,k\,x.f(x)\,d\,x,\ \int_a^b Cos.\,k\,x.f(x)\,d\,x.\ (\text{Lim.}\,k = \infty)$ *

2. Men kan bij deze beschouwing van verschillende integralen uitgaan, wanneer men voor $f(x)$ bijv. schrijft $\frac{1}{x}f(x)$, $\frac{1}{Sin.\,x}f(x)$ enz. Het meest geschikt schijnt daaronder evenwel de afleiding te zijn uit de bepaalde Integralen

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x,\ \ \text{Lim.}\,k = \infty;$$

niet alleen, omdat men bij de FOURIER'sche Integralen regtstreeks tot deze formulen wordt gebragt, maar ook en vooral omdat zich langs dien weg op de meest leerrijke manier telkens de verschillende gevallen opdoen, die bij enkele bijzondere omstandigheden moeten onderscheiden worden.

Ten einde deze integraal na te gaan, kan men gevoegelijk, naar den aard der functie $Sin.\,k x$, drie bijzondere gevallen onderscheiden ten opzigte van a, dat is $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$; en heeft men dus ten eerste:

* Men kan de vroegere beschouwingen, — die echter niet alle met de hier ontwikkelde overeenstemmen, — vooral vinden in de volgende verhandelingen:

LEJEUNE-DIRICHLET, *Journal von Crelle*, Bd. 4. S. 157. — Dezelfde, *Repertorium der Physik. von Dove und Moser*, Bd. 1. S. 152. — Dezelfde, *Journal von Crelle*, Bd. 17. S. 57. — Dezelfde, *Abhandl. Akad. Berlin* 1835.

SCHLÖMILCH, *Grunert's Archiv*, Bd. 1. S. 417. — Dezelfde, *Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale*, Jena, Frommann, 1843. VIII. 103 S. 4°. Abth. I. — Dezelfde, *Analytische Studien*, 2te Abth. Leipzig, Engelmann, 1848. 198 S. 8°.

MEIJER, *Journal von Crelle*, Bd. 43. S. 60.

BONNET, *Journal de Liouville*, T. 14. p. 240.

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\, k\,x}{x} f(x)\, d\,x. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty)$$

Stel hierin $k x = y$ met de grenzen 0 en $\frac{1}{2} k \pi$ voor y, zoo wordt

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2} k \pi$ kan men nu in k deelen verdeelen, die elk $\frac{1}{2}\pi$ bevatten, namelijk 0 tot $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ tot π, π tot $\frac{3}{2}\pi$, ... $\frac{k-1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2} k \pi$; en dan de integraal zelve door eene som van k andere vervangen, die de genoemde deelen tot grensafstanden hebben, zoodat men verkrijgt:

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \ldots + \int_{(c-\frac{1}{2})\pi}^{c\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy +$$

$$+ \int_{c\pi}^{(c+\frac{1}{2})\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y \ldots + \int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty) \ldots\ldots\ldots (a)$$

Deze k integralen zijn ten opzigte der grenzen van tweederlei vorm, naarmate de integratie van de grens $(c-\frac{1}{2})\pi$ tot $c\pi$ of van $c\pi$ tot $(c+\frac{1}{2})\pi$ moet plaats hebben. Men kan nu al deze integralen tot andere terug brengen, die 0 en $\frac{1}{2}\pi$ tot grenzen hebben; daartoe stelle men in het algemeen, als de grenzen van y zijn

$$\left.\begin{array}{lll} (c-\frac{1}{2})\pi \text{ en } c\pi: & y = c\pi - x, dy = -dx, & \text{met } \tfrac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \text{ als grenzen van } x \\ c\pi \text{ en } (c+\frac{1}{2})\pi: & y = c\pi + x, dy = dx, & \text{met } 0 \text{ en } \tfrac{1}{2}\pi \text{ als grenzen van } x \end{array}\right\} \ldots (b)$$

en dan verkrijgt men voor de beide bedoelde integralen, daar

$$Sin.(c\pi \pm x) = Sin.\, c\pi.\, Cos.\, x \pm Cos.\, c\pi.\, Sin.\, x = \pm Cos.\, c\pi.\, Sin.\, x \ldots\ldots (c)$$

is,

$$\int_{(c-\frac{1}{2})\pi}^{c\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.(c\pi - x)}{c\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) dx = -Cos.\, c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\, x}{c\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) d\,x,$$

$$\int_{c\pi}^{(c+\frac{1}{2})\pi} \frac{Sin.\, y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.(c\pi + x)}{c\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) dx = Cos.\, c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\, x}{c\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) d\,x.$$

Door de toepassing dezer herleidingsformulen worden nu alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (a) voorkomen, tot andere terug gebragt,

die 0 en $\frac{1}{2}\pi$ tot grenzen hebben; men kan dus al deze integralen onder één integraalteeken vereenigen, dat is:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\frac{Sin.x}{x}f\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{Sin.x}{\pi - x}f\left(\frac{\pi - x}{k}\right) - \frac{Sin.x}{\pi + x}f\left(\frac{\pi + x}{k}\right) - \frac{Sin.x}{2\pi - x}f\left(\frac{2\pi - x}{k}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{Sin.x}{k\pi + x}f\left(\frac{k\pi + x}{k}\right)\right] dx. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty)$$

Nu kan men tot den limiet van $k = \infty$ overgaan; vooreerst is alsdan de reeks onder het integraalteeken eene oneindige; voorts wordt voor elke $f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right)$

$$\text{Lim.} f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right) = f\left(\frac{c\pi \pm x}{\infty}\right) = f(0) \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

wanneer althans de functie $f(x)$ tusschen de grenzen der integratie 0 en $\frac{1}{2}\pi$ stadig is *.

Men kan dus deze $f(0)$ even als $Sin.x$, als gemeenschappelijke factoren onder het integraalteeken afzonderen, waardoor

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(0)\, Sin.x\, dx \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \ldots\right]$$

wordt; maar in het algemeen is $\frac{1}{c\pi - x} - \frac{1}{c\pi + x} = \frac{2x}{c^2\pi^2 - x^2}$, dus wederom den standvastigen factor $f(0)$ buiten het integraalteeken brengende,

$$I_1 = f(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin.x\, dx \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \ldots\right]$$

Nu weet men dat voor $x < \pi$, (en dit is hier het geval, daar $\frac{1}{2}\pi$ de bovenste grens van x is) de reeks onder het integraalteeken convergeert en $Cosec.x$ tot waarde heeft; daardoor wordt eindelijk

$$I_1 = f(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin.x\, dx.\, Cosec.x = f(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.kx}{x} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0). \quad (\text{Lim.}\, k = \infty) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

---

* Het woord *stadig* wordt hier gebruikt ter vervanging van het fransche *continuë*, even als *onstadig* voor *discontinuë* staat.

Vervolgens zij

$$I_2 = \int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx \;,\; 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

zoo heeft men wederom, even als boven $k\,x = y$ stellende,

$$I_2 = \int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{ak} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \;(\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Stel nu dat het grootste veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$, dat in $a\,k$ begrepen is, $m.\frac{1}{2}\pi$ zij, en f (die dus kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is) de rest, zoodat $a\,k = m.\frac{1}{2}\pi + f$ is, — dan zal hierbij m, hoezeer kleiner dan k, (daar a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is ondersteld) toch met k moeten aangroeijen en daarmede ∞ tot limiet hebben. Verdeelt men nu den grensafstand o tot $a\,k$ in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}m\,\pi$ en $\frac{1}{2}m\,\pi$ tot $\frac{1}{2}m\,\pi + f$, zoo wordt

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}m\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \;(\text{Lim.}\,k = \infty \;\;,\; \text{Lim.}\,m = \infty)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijking heeft, even als bij de formule (I) $\frac{1}{2}\pi f(0)$ tot waarde: de tweede integraal kan men tot eenen meer geschikten vorm terug brengen door de onderstelling $y = \frac{1}{2}m\,\pi + x$; alsdan wordt $d\,y = d\,x$ en de grenzen voor de nieuwe veranderlijke x worden 0 en f; daardoor wordt dus die integraal

$$\int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^f \frac{Sin.\,(\frac{1}{2}m\,\pi + x)}{\frac{1}{2}m\,\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}m\,\pi + x}{k}\right) dx;$$

en derhalve

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\pi f(0) + \int_0^f \frac{Sin.\,(\frac{1}{2}m\,\pi + x)}{\frac{1}{2}m\,\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}m\,\pi + x}{k}\right) dx. \;(\text{Lim}\;k = \infty \;\;,\; \text{Lim.}\,m = \infty)$$

Maar in de laatste integraal is $Sin.\,(\frac{1}{2}m\,\pi + x)$ ook voor $m = \infty$ steeds kleiner dan de eenheid; $f\left(\frac{\frac{1}{2}m\,\pi + x}{k}\right)$ wordt $f\left(\frac{\frac{1}{2}m\,\pi}{k}\right) = f(a)$; de noemer $\frac{1}{2}m\,\pi + x$ wordt oneindig, en daarmede vervalt de geheele functie onder het integraalteeken, zoodat die integraal zelve nul wordt. Men heeft dus ook hier

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi.\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\ldots\ldots \text{(II)}$$

Eindelijk zij

$$I_3 = \int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty\ ,\ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

zoo wordt

$$I_3 = \int_0^{ak} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy,$$

als men hier wederom $y = k\,x$ stelt. Deze vorm is volkomen dezelfde als die voor I_2 verkregen: slechts is hier a grooter dan $\frac{1}{2}\pi$, en wordt dus bij herhaling der vorige redenering m grooter dan k; maar dit is dan ook het eenige verschil en de slotsom blijft dezelfde, dat is

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\ldots\ldots \text{(III)}$$

Wanneer men nu, hetgeen in de vergelijkingen (I), (II) en (III) gevonden is, te zamentrekt, komt men tot de algemeene uitkomst:

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Op dezelfde wijze is evenzeer

$$\int_0^b \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < b < \infty\ ,\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\quad ,$$

en derhalve, wanneer men de laatste integraal van de integraal (IV) aftrekt,

$$\int_b^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = 0\ ,\ 0 < b < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\ \ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Hierbij wordt telkens ondersteld dat de functie $f(x)$ stadig zij tusschen de grenzen der integratie.

Bij deze integralen ziet men dat de standvastige k, die het oneindige tot limiet heeft, geheel willekeurig in vorm is, zoodat hier de vroeger gemaakte aanmerking niet te pas komt.

3. Voor de bepaalde integraal

$$\int_0^a \frac{Cos.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

moet men evenzeer als bij de vorige de drie gevallen onderscheiden, dat $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$ is.

Is $a = \frac{1}{2}\pi$, dan stelle men weder $k\,x = y$, met 0 en $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ als grenzen voor y, en dan wordt:

$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Cos.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x = \int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Cos.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ verdeele men in k deelen, zoodat men eene dergelijke vergelijking (a) verkrijgt als in N°. 2, waarin slechts $Cos.\,y$ voor $Sin.\,y$ komt te staan: men gebruike dezelfde substitutien (b), $y = c\,\pi \pm x$, dan verkrijgt men hier, — daar

$$Cos.(c\,\pi \pm x) = Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,c\,x \mp Sin.\,c\,\pi.\,Sin.\,x = Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,x$$

is, — wanneer men nog alle integralen, die nu dezelfde grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ hebben verkregen, onder hetzelfde integraalteeken vereenigt:

$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{Cos.\,x}{x} f\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{Cos.\,x}{\pi - x} f\left(\frac{\pi - x}{k}\right) - \frac{Cos.\,x}{\pi + x} f\left(\frac{\pi + x}{k}\right) + \frac{Cos.\,x}{2\pi - x} f\left(\frac{2\pi - x}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Cos.\,x}{2\pi + x} f\left(\frac{2\pi + x}{k}\right) - \ldots\ldots + (-1)^k \frac{Cos.\,x}{k\pi + x} f\left(\frac{k\pi + x}{k}\right)\right] d\,x. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Stel hierin $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,y$, waardoor de grenzen van y worden π en 0, terwijl $dy = -dx$ is, zoo wordt:

$$I_4 = \int_\pi^0 -dy \left[\frac{Sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) + \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Sin\,\frac{1}{2}y}{2\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{2\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \ldots + (-1)^k \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{(k+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right)\right]. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Hierin tot de limiet ∞ van k overgaande, wordt dadelijk de reeks eene oneindige en tevens

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{k}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{\infty}\right) = f(0) \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

Derhalve wordt $f(0)$ wederom een standvastige factor, die nu buiten het integraalteeken kan vallen; evenzoo wordt $Sin. \frac{1}{2}y$ een factor, die echter onder het integraalteeken moet blijven; daardoor wordt

$$I_4 = f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\left[\frac{2}{\pi - y} - \frac{2}{\pi + y} - \frac{2}{3\pi - y} + \frac{2}{3\pi + y} + \frac{2}{5\pi - y} - \ldots\right]$$

$$= f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\left[\frac{4y}{\pi^2 - y^2} - \frac{4y}{9\pi^2 - y^2} + \frac{4y}{25\pi^2 - y^2} - \ldots\right], \text{ (Lim. } k = \infty),$$

wanneer men in de reeks onder het integraalteeken elke twee opvolgende termen optelt, die $c\pi \pm y$ tot noemers hebben. Nu heeft, tusschen de hier geldende grenzen, de laatst verkregen reeks onder het integraalteeken $\frac{\pi}{y} Sec. \frac{1}{2}y$ tot waarde; van daar is

$$I_4 = f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\frac{\pi}{y}Sec.\tfrac{1}{2}y = \pi f(0)\int_0^\pi \frac{Tang.\frac{1}{2}y\,dy}{y}, \text{ (Lim. } k = \infty),$$

of $x = \frac{1}{2}y$ stellende, waardoor de grenzen van x worden 0 en $\frac{1}{2}\pi$,

$$I_4 = \pi f(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Tang.x\,dx}{x}, \quad \text{(Lim. } k = \infty).$$

Maar het is gemakkelijk in te zien, dat deze integràal eene oneindige waarde heeft; want wanneer men ze, volgens de oorspronkelijke bepaling eener bepaalde integraal, als eene oneindige som van oneindig kleine producten beschouwt, zoo wordt voor de bovenste grens $\frac{1}{2}\pi$ de geïntegreerde functie $\frac{Tang.x}{x}$ hier $\frac{Tang.(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta}$ en heeft dus oneindig tot limiet: het product $\delta.\frac{Tang.(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta}$ wordt $\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - \delta}\,\frac{\delta}{Cot.(\frac{1}{2}\pi - \delta)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi - \delta}\,\frac{1}{-Cosec.^2(\frac{1}{2}\pi - \delta)} =$ $= \frac{-Sin.^2(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\frac{1}{2}\pi - \delta} = \frac{-1}{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{2}{\pi}$, niet meer oneindig klein; zoodat de bedoelde integraal oneindig groot wordt. Daardoor heeft men

$$I_4 = \infty \,.\, \pi f(0) \quad , \quad \text{(Lim. } k = \infty).$$

Deze waarde is in het algemeen oneindig, zoo lang $f(x)$ stadig blijft tus-

schen de grenzen van het integreren. Wordt $f(0)$ nul, dan wordt de waarde van I_4 onbepaald, en kan op deze wijze niet nader worden gevonden. Verder is het duidelijk, in verband met hetgeen in N°. 2 werd aangemerkt, dat ook voor andere waarden van de bovenste grens der integratie a, namelijk voor $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$, de integraal dezelfde waarde behoudt; men mag dus tot de algemeene formule besluiten

$$\int_0^a \frac{Cos.\,kx}{x} f(x)\,dx = \infty.\pi f(0); \quad (\text{Lim.}\, k = \infty) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \text{(VI)}$$

en hierin is de waarde onbepaald of oneindig, naarmate $f(0)$ nul is of niet. Ook hier wordt de functie stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

4. Men kan nu overgaan om voor $f(x)$ bijzondere waarden in de plaats te stellen, die nu aan de gegevene voorwaarde moeten voldoen. Het eerst doet zich de onderstelling voor $f(x) = x\,F(x)$: dan geven de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) bij stadigheid der functie $F(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^a Sin.\,kx.\,F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\Big[x\,F(x)\Big]_{x=0} = \frac{\pi}{2}0.f(0) = 0 \\ &\int_0^a Cos.\,kx.\,F(x)\,dx = \infty.\,\pi\Big[x\,F(x)\Big]_{x=0} = \infty.\pi.0.f(0) \end{aligned}\right\} (\text{Lim.}\,k = \infty)\,.\,.\,.\,(g)$$

Deze laatste nu is onbepaald; ten einde daaromtrent, zoowel als ten opzigte der eerste, eenige meerdere bijzonderheden te leeren kennen, beschouwe men ze op zich zelve, bijv. de laatste, en stelle deze daartoe onder den vorm

$$I_5 = \int_b^a Cos.\,kx.\,F(x)\,dx \quad . \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Hierin zij nu $kx = y$, waardoor bk en ak de grenzen van y worden; men zoeke het laagste veelvoud van π, stel $p\pi$, grooter dan bk, en evenzoo het hoogste veelvoud van π, stel $q\pi$, kleiner dan ak; en noeme de beide resten r en s, (die dus beide kleiner dan π moeten zijn), dat is:

$$bk = p\pi - r \quad , \quad r < \pi; \quad ak = q\pi + s \quad , \quad s < \pi.$$

Alsdan verdeele men den grensafstand bk tot ak in drie deelen, namelijk van $p\pi - r$ tot $p\pi$, van $p\pi$ tot $q\pi$, van $q\pi$ tot $q\pi + s$, waardoor alzoo

$$I_5 = \int_b^a Cos.kx.F(x)dx = \int_{p\pi-r}^{p\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_{q\pi}^{q\pi+s} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx, (\text{Lim.}\,k = \infty)\,.\,(i)$$

Stel in de eerste der integralen, die in het laatste lid dezer vergelijking voorkomen, $x = p\pi - y$, zoodat $Cos.\,x = Cos.\,p\pi.\,Cos.\,y + Sin.\,p\pi.\,Sin.\,y = Cos.\,p\pi.\,Cos.\,y$, $dx = -dy$ is, terwijl r en 0 de grenzen van y worden. Evenzoo moet men in de laatste dier integralen $x = q\pi + y$ stellen, zoodat $dx = dy$ en $Cos.\,x = Cos.\,q\pi.\,Cos.\,y$ wordt, met de grenzen 0 en s voor y. Op de onderstelling $p\pi = bk + r$, $q\pi = ak - s$ lettende, heeft men alzoo

$$I_5 = \int_r^0 \frac{1}{k} Cos\,p\pi.\,Cos.y.\,F\left(\frac{p\pi - y}{k}\right)(-dy) + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + \int_0^s \frac{1}{k} Cos.q\pi.\,Cos.\,y.\,F\left(\frac{q\pi + y}{k}\right) dy$$

$$= Cos.p\pi.\int_0^r \frac{1}{k} Cos\,y.F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) dy + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right) dx + Cos.q\pi.\int_0^s \frac{1}{k} Cos.y.F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right) dy,\ (\text{Lim}.k = \infty).\ (k)$$

Is nu $f(x)$ tusschen de grenzen a en b stadig, zoo blijkt reeds uit de vorige vergelijking (i), zoowel als uit de laatste, dat iedere integraal in het tweede lid op zich zelve nul wordt, uithoofde van den factor $\frac{1}{k}$; zoodat dan ook:

$$I_5 = \int_b^a Cos.kx.\,F(x)\,dx = 0 \quad . \quad (\text{Lim}.\,k = \infty) \; \ldots\ldots\ldots \; (\text{VII})$$

Maar de vergelijking (k) leert ons meer. Want indien slechts Lim. $\delta F(b + \delta)$ nul is (voor Lim. $\delta = 0$), waarbij toch $F(b + \delta)$ zelve oneindig kan zijn en er dus stadigheid bij de grens b kan plaats hebben, zoo is voor $\delta = \frac{r - y}{k}$:

$$\text{Lim}.\,\delta\,F(b + \delta) = \text{Lim}.\frac{r - y}{k} F\left(b + \frac{r - y}{k}\right) = \text{Lim}.\,\frac{r - y}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0\,,$$

dus

$$\text{Lim}.\,\frac{1}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0, (\text{Lim}\ k = \infty)\,,$$

daar r — als grens der overeenkomstige eerste integraal in het tweede lid van (k) — grooter dan y en toch kleiner dan π zijnde, (zie verg. (h)) $r - y$ een positief eindig getal is; die integraal wordt dus ook in dit geval nul. Indien ook evenzeer Lim. $\delta f(\alpha - \delta) = 0$ is (voor Lim. $\delta = 0$), waarbij ook $F(\alpha - \delta)$ wederom op zich zelve oneindig kan zijn, wanneer de onstadigheid voor de bovenste grens a plaats grijpt, zoo is voor $\delta = \frac{s - y}{k}$:

$$\text{Lim}.\,\delta\,F(\alpha - \delta) = \text{Lim}.\frac{s - y}{k} F\left(a - \frac{s - y}{k}\right) = \text{Lim}.\frac{s - y}{k} F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right) = 0\,,$$

dus

$$\text{Lim.}\,\frac{1}{k}\,\text{F}\left(\frac{ak-s+y}{k}\right)=0\quad,\quad(\text{Lim.}\,k=\infty)$$

daar bij de laatste integraal in de formule (k) s als grens der y grooter dan elke y is en toch kleiner dan π moet blijven (zie verg. (h)), zoodat $s-y$ een eindig positief getal is. — De integraal zelve is dus ook nul en in plaats van (VII) wordt hier meer algemeen volgens (k):

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}_s=\displaystyle\int_b^a Cos.\,kx.\,\text{F}(x)\,dx=\int_{p\pi}^{q\pi}\frac{1}{k}\,Cos.\,x.\,\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx, \\ \text{als Lim.}\,\delta\,\text{F}(b+\delta)=0\,,\ \text{Lim.}\,\delta\,\text{F}(a-\delta)=0\quad\text{en}\quad\text{Lim.}\,\delta=0\ \text{is.}\end{array}\right\}\ (\text{Lim.}\,k=\infty)\,.\,(l)$$

Nu verdeele men zoo als vroeger den grensafstand van $p\pi$ tot $q\pi$ in $p-q$ andere, die telkens π groot zijn, dan wordt bij de onderstellingen, waaronder (l) bestaat, en die wij gemakshalve niet telkens zullen overschrijven:

$$\text{I}_s=\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\int_{(p+1)\pi}^{(p+2)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\ldots+\int_{c\pi}^{(c+1)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\ldots$$
$$\int_{(q-1)\pi}^{q\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m)$$

Stel nu in eene integraal, die $c\pi$ en $(c+1)\pi$ tot grenzen heeft, $x=c\pi+y$, dan wordt $Cos.\,x=Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,y$, $dx=dy$, en de grenzen van y worden 0 en π; zoodat die algemeene integraal wordt:

$$\int_{c\pi}^{(c+1)\pi}\frac{1}{k}\,Cos.\,x.\,\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx=Cos.\,c\,\pi.\int_0^\pi\frac{1}{k}\,Cos.\,y.\,\text{F}\left(\frac{c\pi+y}{k}\right)dy.$$

Bij alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (m) voorkomen, deze substitutie aanwendende, verkrijgt men voor alle integralen dezelfde grenzen 0 en π, zoodat men ze allen onder een integraalteeken vereenigen kan; daarenboven is $\frac{1}{k}Cos.y$ een factor, die aan alle integralen gemeen is. Derhalve

$$\text{I}_s=\int_0^\pi\frac{1}{k}Cos.y\,dy\left[\text{F}\left(\frac{p\pi+y}{k}\right)-\text{F}\left(\frac{(p+1)\pi+y}{k}\right)+\ldots+Cos.\{(q-1)\pi\}.\text{F}\left(\frac{(q-1)\pi+y}{k}\right)\right]\,.\,(n)$$

Is nu F (x) tusschen de grenzen 0 en π eene afdalende functie, zoo is de

reeks onder het integraalteeken convergent en begrepen tusschen nul en den eersten term dier reeks, dat is, voor $p\pi$ hare waarde $bk+r$ in de plaats stellende,

$$0 < I_5 < \int_0^\pi \frac{1}{k} Cos. y\, dy\, F\left(\frac{bk+r+y}{k}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (o)$$

Maar wegens Lim. $\delta F(b+\delta) = 0$ is ook Lim. $\frac{r+x}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$, en dus ook, daar $x < r < \pi$ is, Lim. $\frac{1}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$; derhalve $0 < I_5 < 0$, dat is $I_5 = 0$.

Was $F(x)$ daarentegen tusschen de grenzen 0 en π eene opklimmende functie, zoo is de reeks onder het integraalteeken nog convergent, mits men haar in omgekeerde orde neme; hare waarde is alsdan begrepen tusschen nul en den laatsten term dier reeks, zoo als zij in de vergelijking (n) geordend is; dus voor $q\pi$ hare waarde $ak-s$ stellende, wordt

$$0 < I_6 < \int_0^\pi \frac{1}{k} Cos. y\, dy\, F\left(\frac{ak-s-\pi+y}{k}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

Nu is Lim. $\delta f(a-\delta) = 0$ ondersteld, dus ook Lim. $\frac{\pi+s-y}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$; maar $y < s < \pi$, dus $0 < \pi+s-y < 2\pi$ en daarom Lim. $\frac{1}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$, derhalve ook in dit geval $0 < I_6 < 0$, dat is $I_6 = 0$.

Was $F(x)$ verder eene functie, die dan eens opklimmend dan eens afdalend werd, zoude men de integratie van elk maximum tot elk volgend minimum afzonderlijk moeten uitvoeren, en zoude van elke zulke integraal dus het boven gezegde gelden. Werd $F(x)$ voor eenige dier grensafstanden negatief, zoo behoefde men slechts eene nieuwe functie $F_1(x) = -F(x)$ in te voeren, om weder de vorige redenering te doen gelden. Men heeft dus altijd

$$\left.\begin{array}{l}\int_b^a Cos.\, kx. F(x)\, dx = 0\ , \\ \text{als Lim.}\, \delta F(b+\delta) = 0,\ \text{Lim.}\, \delta F(a-\delta) = 0\ \text{en Lim.}\, \delta = 0\ \text{is.}\end{array}\right\} (\text{Lim.}\, k = \infty) \ldots . (\text{VIII})$$

wanneer de functie $F(x)$ tusschen de grenzen (uitgesloten) stadig is.

Maar ook wanneer zij voor eenige waarde van x bijv. h (zoodanig dat $b < h < a$ is) onstadig werd, is het gemakkelijk te bepalen, welken invloed dit zal uitoefenen. Men moet alsdan volgens de voorschriften van de theorie

der bepaalde integralen de, naar CAUCHY aldus genoemde, *singuliere* integraal

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} Cos.\,k\,x.\,F(x)\,d\,x\ ,\quad (\text{Lim.}\,\varepsilon = 0)\ ,$$

van de vroegere waarde aftrekken.

Stel ook hier $k\,x = y$, zoo wordt die correctie

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{kh-k\varepsilon}^{kh+k\varepsilon} \frac{1}{k}\,Cos.y.\,F\left(\frac{y}{k}\right)d\,y\ ,\quad (\text{Lim.}\,\varepsilon = 0\ ,\ \ \text{Lim.}\,k = \infty).$$

Is $k\,\varepsilon = \infty\,.\,0$, zoo wordt van zelf $\Delta = 0$; is dit produkt echter niet nul, zoo heeft men hier eene dergelijke formule als in vergelijking (VIII), en Δ zal dus nul zijn, mits Lim. $\delta\,F\,(h \pm \delta)$ zelve nul is. Daardoor wordt de vergelijking (VIII) eindelijk

$$\int_b^a Cos.\,k\,x.\,F\,(x)\,d\,x = 0.\quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Wordt F (x) voor b, a, of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. $\delta F\,(b + \delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(a - \delta) = 0$, Lim. $\delta F\,(h \pm \delta) = 0$ zijn voor Lim. $\delta = 0$; hierbij kan b ook nul wezen. . (IX)

5. Men heeft dus bepaald, wat er van de onbepaalde uitkomst was, die in de laatste der vergelijkingen (g) gevonden werd. Op dezelfde wijze redenerende ten opzigte van de eerste der integralen (g) zal men die uitkomst nog eenigzins kunnen uitbreiden. En dit zal niet moeijelijk zijn, wanneer men nagaat welke verandering in de formule van het vorige N°. plaats grijpt, wanneer men *Sin.* kx voor *Cos.* $k\,x$ schrijft en evenzeer *Sin.* y voor *Cos.* y. In vergelijking (k) zal de eerste integraal negatief worden, maar daardoor zal (VII) niet veranderen, evenmin als (l) tot (p); de vergelijkingen (VIII) en (IX) blijven dus bestaan (altijd bij het veranderen van *Cos.* in *Sin.*); dat is

$$\int_b^a Sin.\,k\,x.\,F\,(x)\,d\,x = 0.\quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Wordt F (x) voor b, a of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. δ F $(b + \delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(a - \delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(h \pm \delta) = 0$ zijn, voor Lim. $\delta = 0$. Hierin kan ook $b = 0$ zijn. . (X)

In deze vergelijkingen (I) tot (X) is de vorm van k nog geheel onbepaald.

6. Men kan in de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) voor $f(x)$ ook nog andere onderstellingen invoeren, zoodat de noemer x vervangen worde bijv. door $Sin. x$ of $Cos. x$; en dit zal tot vier verschillende formulen leiden. Zij vooreerst in (IV) $fx = \frac{x}{Sin. x} F(x)$, dan wordt zij

$$\int_0^a \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \left[\frac{x}{Sin. x} F(x)\right]_{x=0} . \quad (\text{Lim.} k = \infty)$$

Voor $x = 0$ wordt wel is waar $\frac{x}{Sin. x} = \frac{0}{0}$ en schijnt dus onbepaald, doch uit de leer der limieten weet men dat Lim. $\frac{x}{Sin. x} = 1$ voor Lim. $x = 0$. Maar de bovenstaande vergelijking geldt slechts, wanneer $f(x)$, dat is $\frac{x}{Sin. x} F(x)$, stadig is tusschen de grenzen 0 en a; wanneer dit zelfde nu ook met $F(x)$ het geval moet zijn, zoo dient noodzakelijk $\frac{x}{Sin. x}$ mede stadig te wezen; deze breuk wordt onstadig voor $x = \pi$; derhalve geldt de bovenstaande vergelijking vooreerst slechts voor a kleiner dan π, dat is:

$$I_6 = \int_0^a \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x)\, dx = \frac{\pi}{2} F(0). \quad a < \pi. \quad (\text{Lim.} k = \infty) \; \ldots\ldots \; (XI)$$

Er is dus eene nieuwe onderzoeking noodig, wanneer a gelijk of grooter dan π is; daartoe onderscheide men hier drie gevallen $a = \pi$, $a = b\pi$, $a = b\pi + c$, (waar $c < \pi$ zij), zoodat wij ons eerstens hebben bezig te houden met de integraal

$$I_7 = \int_0^\pi \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x)\, dx \quad . \quad (\text{Lim.} k = \infty)$$

Men ontbinde den grensafstand 0 tot π in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ tot π; dat is

$$I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x)\, dx \; . \; (\text{Lim.} k = \infty)$$

Verder stelle men in de laatste integraal $x = \pi - y$, dus $dx = -dy$, $Sin. x = Sin. y$, $Sin. kx = -Cos. k\pi. \, Sin. ky = Cos. \{(k-1)\pi\} . Sin. ky$, terwijl de grenzen van y worden $\frac{1}{2}\pi$ en 0; alsdan wordt:

$$I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x + Cos.\,\{(k-1)\pi\}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(\pi - x)\,d\,x \quad . \ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Ten opzigte van beide deze integralen kan men nu de formule (XI) aanwenden, waardoor

$$I_7 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x = \frac{\pi}{2} F(0) + Cos.\,\{(k-1)\pi\}.\frac{\pi}{2} F(\pi - 0)\ , \ (\text{Lim.}\,k = \infty)\ . \ (\text{XII})$$

wordt. Men ziet hieruit, dat de uitkomst in zoo verre van k afhangt, dat de factor $\{Cos.\,(k-1)\,\pi\}$ voor k even of oneven gelijk wordt aan de negatieve en positieve eenheid. Zoodra men dus weet, dat k de limiet is van eene evene of onevene grootheid, heeft men

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{Sin.\,2\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x = \frac{\pi}{2}\{F(0) - F(\pi)\} \qquad , \\ \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{Sin.\,\{(2\,k-1)\,x\}}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x = \frac{\pi}{2}\{F(0) + F(\pi)\}. \end{array}\right\}, \ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots (\text{XIII})$$

Is daarentegen de oorsprong van k niet bekend, zoodat men niet geregtigd is, om k even of oneven aan te nemen, zoo heeft men, naarmate $F(\pi)$ altijd nul is of niet, uit de vergelijking (XII)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x = \frac{\pi}{2} F(0)\ , \quad \text{als } F(\pi) = 0 \text{ is;} \\ \qquad\qquad\qquad = \text{onbepaald, als } F(\pi) \text{ niet} = 0 \text{ is.} \end{array}\right\}, \ (\text{Lim.}\,k = \infty). \ (\text{XIV})$$

Vervolgens beschouwe men het geval dat $a = b\,\pi$ is, dat is de integraal

$$I_8 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x; \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

hier verdeele men den grensafstand 0 tot $b\,\pi$ in b deelen, die elke eenen afstand π bevatten, dan is

$$I_8 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x + \ldots + \int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x + \ldots +$$

$$+ \int_{(b-1)\pi}^{b\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,d\,x\ , \ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Stel in eenige dier integralen, wier grenzen in het algemeen $c\pi$ en $(c+1)\pi$ mogen zijn, $x = c\pi + y$, $dx = dy$, met de grenzen 0 en π voor y, dan is

$$Sin.x = Cos.c\pi.Sin.y\,,$$

$$Sin.kx = Sin.(kc\pi + ky) = Cos.kc\pi.Sin.ky = Cos.\{(k-1)c\pi\}.Cos.c\pi.Sin.ky\,,$$

Substitueert men telkens deze uitkomsten in de vergelijking (q), zoo heeft men eerst in het algemeen:

$$\int_{c\pi}^{(c-1)\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = Cos.\{(k-1)c\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.ky}{Sin.y} F(c\pi+y)\,dy$$

en dus wordt (q)

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)dx + Cos.\{(k-1)\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(\pi+x)dx + Cos.\{(k-1)2\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(2\pi+x)dx + \ldots$$

$$+ Cos.\{(k-1)(b-1)\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F\{(b-1)\pi+x\}\,dx\,, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

of, daar $Cos.\{(k-1)2c\pi\} = 1$, $Cos.\{(k-1)(2c-1)\pi\} = Cos.\{(k-1)\pi\}$ is, wanneer men tevens de uitkomst van vergelijking (XII) gebruikt:

$$I_2 = \frac{\pi}{2}[F(o) + Cos.\{(k-1)\pi\}.f(\pi)] + \frac{\pi}{2}Cos.\{(k-1)\pi\}.[F(\pi) + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(2\pi)] +$$

$$+ \frac{\pi}{2}Cos.\{(k-1)2\pi\}.[F(2\pi) + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(3\pi)]$$

$$+ \ldots + \frac{\pi}{2}Cos.\{(b-1)(k-1)\pi\}.[F\{(b-1)\pi\} + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(b\pi)];$$

of daar $Cos.\{l(k-1)\pi\}.Cos.\{(k-1)\pi\} = Cos.\{(l-1)(k-1)\pi\}$ is,

$$I_2 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)dx = \frac{\pi}{2}[F(o) + 2Cos.\{(k-1)\pi\}.F(\pi) + 2F(2\pi) + 2Cos.\{(k-1)\pi\}.F(3\pi) +$$

$$+ \ldots + 2\,Cos.\{(b-1)(k-1)\pi\}.F\{(b-1)\pi\} + Cos.\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\{F(o) + 2F(2\pi) + 2F(4\pi) + \ldots\} + 2\,Cos.\{(k-1)\pi\}.\{F(\pi) + F(3\pi) + \ldots\} +$$

$$+ Cos.\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)].\quad \text{Lim.}\,k = \infty \ldots\ldots\ldots\ldots (XV)$$

Hier komt weder het onderscheid tusschen k even en oneven te pas; want de factor $Cos.\{(k-1)\pi\}$ hangt daarvan af; is k even, zoo is die factor -1, terwijl hij $+1$ wordt voor k oneven. Daarenboven wordt voor k even

3

Cos. $\{b(k-1)\pi\}$ gelijk ± 1 naarmate b even of oneven is, omdat daarmede tevens $b(k-1)$ even of oneven is; was k daarentegen oneven zoo is $b(k-1)$ altijd even, en dus in dat geval *Cos.* $\{b(k-1)\pi\}$ gelijk $+1$. Dit te zamenvattende komt men tot de drie volgende uitkomsten:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{b\pi}\frac{Sin.\{(2k-1)x\}}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[F(o)+2F(\pi)+2F(2\pi)+\dots+2F\{(b-1)\pi\}+F(b\pi)\Big],\\
&\int_0^{2b\pi}\frac{Sin.\,2kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\dots-2F\{(2b-1)\pi\}+F(2b\pi)\Big],\\
&\int^{(2b+1)\pi}\frac{Sin.\,2kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\dots+2F(2b\pi)-F\{(2b+1)\pi\}\Big].
\end{aligned}\right\}\text{,(Lim.}k=\infty)\quad\dots\text{(XVI)}$$

Weet men daarentegen niet of k even, dan wel oneven zij, zoo wordt de uitkomst van vergelijking (XV) eene onbepaalde, tenzij altijd $F\{(2h+1)\pi\}=0$ is (voor $2h+1<b$); men moet dan nog onderscheiden of b even zij of niet wegens den laatsten term van (XV) namelijk *Cos.* $\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)$. Is b toch even, zoo wordt *Cos.* $\{b(k-1)\pi\}=1$; is b oneven, zoo wordt die factor wel onbepaald (dat is ± 1), maar $F(b\pi)$ verdwijnt alsdan. Daardoor is:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2b\pi}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[F(o)+2F(2\pi)+\dots+2F\{(2b-2)\pi\}+F(2b\pi)\Big],\\
&\int_0^{(2b+1)\pi}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[F(o)+2F(2\pi)+\dots+2F(2b\pi)\Big],\\
&\qquad\qquad\text{als } F\{(2h+1)\pi\}=0\text{ , } h\leq b\text{; anders is}\\
&\int_0^{b\pi}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\text{onbepaald, als niet altijd } F\{(2h+1)\pi\}=0\text{ is.}(2h+1<b).
\end{aligned}\right\}\text{,(Lim.}k=\infty)\quad\dots\text{(XVII)}$$

Eindelijk blijft er nog het geval over, dat $a=b\pi+c$ is $(c<\pi)$; alsdan kan men den grensafstand o tot $b\pi+c$ gevoegelijk in twee deelen verdeelen, namelijk van o tot $b\pi$ en van $b\pi$ tot $b\pi+c$, dat is:

$$I_9=\int_0^{b\pi+c}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx=\int_0^{b\pi}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx+\int_{b\pi}^{b\pi+c}\frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx\text{ . (Lim. }k=\infty)$$

Stel in de laatste integraal dezer vergelijking $x=b\pi+y$, dan worden

o en c de grenzen van y; verder is $dx = dy$, $\frac{Sin.kx}{Sin.x} = \frac{Sin.\{kb\pi + ky\}}{Sin.(b\pi + y)} = \frac{Cos.kb\pi.Sin.ky}{Cos.b\pi.Sin.y}$ $= \frac{Cos.kb\pi.Sin.ky.Cos.b\pi}{Cos.^2 b\pi.Sin.y} = \frac{Cos.\{(k-1)b\pi\}.Sin.ky}{Sin.y}$; dit alles substituerende komt er:

$$I_9 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx + Cos.\{(k-1)b\pi\}.\int_0^c \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(b\pi + x)\,dx \quad . \text{ (Lim. } k = \infty)$$

En nu zijn de beide integralen tot eenen vorm terug gebragt, waarin zij reeds vroeger bepaald zijn, namelijk de eerste door de formulen (XV), (XVI), (XVII) en de tweede door de formule (XI); men moet dus ook hier een onderscheid maken tusschen de verschillende gevallen, die in de vergelijkingen (XVI) en (XVII) voorkomen, en heeft alzoo:

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^{b\pi+c} \frac{Sin.\{(2k+1)x\}}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(\pi) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(b\pi)\right], \\
\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin.2kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \ldots + 2F(2b\pi)\right], \\
\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin.2kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \ldots - 2F\{(2b+1)\pi\}\right], \\
\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(2b\pi)\right], \\
\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(2b\pi)\right], \\
\text{De beide laatste integralen gelden, wanneer altijd } F\{(2h+1)\pi\} = 0 \text{ is,} \\
\text{voor } h \leqq b\text{; anders is:} \\
\int_0^{b\pi+c} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \text{onbepaald, indien niet altijd } F\{(2h+1)\pi\} = 0 \\
\qquad \text{is. } (2h + 1 \leqq b).
\end{array}\right\} \text{, (Lim. } k = \infty) \quad . . \text{ (XVIII)}$$

En hiermede is de integraal voor alle gevallen overwogen, waarbij gebleken is, welken invloed het even of oneven zijn van k uitoefent, en hoe daarbij nog de toestand der grenzen in aanmerking moet genomen worden. Om te zien of het geval van $a = \infty$ zich uit het vorige laat afleiden, dient men zich tot de vergelijkingen (XVIII) te wenden, waar a den vorm $b\pi + c$ heeft;

men moet dan daarin b tot oneindig laten aangroeijen; men kan alsdan geen onderscheid meer maken tusschen b even of oneven, en dit behoeft hier ook niet, daar de tweede en derde, evenzoo de vierde en vijfde der vergelijkingen (XVIII) telkens tot dezelfde uitkomsten leiden, als b oneindig wordt; men heeft dus eindelijk:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \frac{Sin.\{(2k+1)x\}}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)+2F(\pi)+2F(2\pi)+\ldots.],\\ \int_0^\infty \frac{Sin.2kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\ldots.],\\ \int^\infty \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)+2F(2\pi)+2F(4\pi)+\ldots.];\ \text{wanneer steeds}\\ \qquad F\{(2h+1)\pi\}=0\ \text{is}, (0<h<\infty),\ \text{anders is die integraal}\\ \qquad =\infty.\end{array}\right\}, (\text{Lim}\,k=\infty) \quad \ldots (XIX)$$

Bij alle de vergelijkingen (XI) tot (XIX) wordt ondersteld, dat $F(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie.

7. Verder in de algemeene vergelijking (VI) $f(x) = \frac{x}{Cos.\,x} F(x)$ stellende, heeft men de integraal

$$\int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Cos.\,x} F(x)\,dx\,, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

te beschouwen. Deze kan men geschiktelijk afleiden uit de integraal in het vorige nummer behandeld; en wel door het stellen van $x = \frac{\pi}{2} + y$; dan is $dx = dy$, met $-\frac{\pi}{2}$ en $a - \frac{\pi}{2}$ als grenzen van y; verder is $Cos.x = -Sin.y$, $Cos.kx = Cos.(\frac{1}{2}k\pi + ky)$. En hierin zullen de uitkomsten geheel verschillende vormen verkrijgen, naarmate k is van den vorm $4k'$, $4k'+1$, $4k'+2$, $4k'+3$ respectievelijk, want voor

$$\left.\begin{array}{llll}1°\ k=4k',\ \text{is}\ Cos.(\frac{1}{2}k\pi+ky) & = Cos.\{2k'\pi+4k'y\} & = Cos.4k'y & ,\\ 2°\ k=4k'+1, & = Cos.\{2k'\pi+\frac{1}{2}\pi+(4k'+1)y\} & = -Sin.\{(4k'+1)y\}, \\ 3°\ k=4k'+2, & = Cos.\{(2k'+1)\pi+(4k'+2)y\} & = -Cos.\{(4k'+2)y\},\\ 4°\ k=4k'+3=4k'-1 & = Cos.\{2k'\pi-\frac{1}{2}\pi+(4k'-1)y\} & = Sin.\{(4k'-1)y\}.\end{array}\right\}, (r)$$

Bij de tweede en vierde onderstelling wordt de integraal van denzelfden

vorm, als in N°. 6 behandeld is: bij de eerste en derde onderstelling daarentegen komt er eene *Cosinus* in den teller; men zal dus beide soort van vormen afzonderlijk moeten nagaan, en daartoe met de tweede en vierde der onderstellingen (r) moeten aanvangen. Alsdan is

$$\left.\begin{aligned}
I_{10} &= \int_0^a \frac{Cos.\{(4k+1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{-Sin.\{(4k+1)y\}}{-Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy \\
&= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k+1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.\{(4k+1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy, \\
I_{11} &= \int_0^a \frac{Cos.\{(4k-1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{-Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy \\
&= -\int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy.
\end{aligned}\right\},(\text{Lim}.k=\infty)$$

Stelt men in de laatste integralen dezer beide vergelijkingen, $y=-x$, $dy=-dx$, met $\frac{1}{2}\pi$ en 0 als grenzen van x, zoo worden zij:

$$\left.\begin{aligned}
I_{10} &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx, \\
I_{11} &= -\int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k-1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx;
\end{aligned}\right\},(\text{Lim}.k=\infty) \quad \ldots\ldots (s)$$

en nu kan men beide laatste integralen uitdrukken door $\frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ volgens de waarde in vergelijking (XI) gevonden. Wat de eerste integralen betreft, moet vooreerst $a-\frac{\pi}{2}$ positief zijn; ten einde vervolgens tot de verschillende gevallen van het vorige nummer te komen, stelle men:

$$\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}\ ,\ a=\frac{3\pi}{2}\ ,\ a=\frac{2b+1}{2}\pi\ ,\ a=\frac{2b+1}{2}\pi+c\ ,\ a=\infty\ ;$$

want dan wordt de bovenste grens der integratie respective:

$$0<a-\frac{\pi}{2}<\pi\ ,\ a-\frac{\pi}{2}=\pi\ ,\ a-\frac{\pi}{2}=b\pi\ ,\ a-\frac{\pi}{2}=b\pi+c\ ,\ a-\frac{\pi}{2}=\infty\ ;$$

en men heeft dus naar de vergelijkingen (XI), (XIII, 2), (XVI, 1), (XVIII, 1), (XIX, 1), die hier alleen gebruikt kunnen worden omdat $4k+1$ en $4k-1$ oneven zijn, — wanneer men de beide integralen I_{10} en I_{11} onder éénen vorm met het teeken $\pm$ vereenigt:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^a \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right)\;,\; \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2};\\
&\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],\\
&\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right],\\
&\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi+c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right],\\
&\int_0^{\infty} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots\right].
\end{aligned}\right\}\;,\; (\text{Lim. } k = \infty) \;\ldots\ldots (XX)$$

Er blijft nog een geval over, wanneer namelijk $a = \frac{1}{2}\pi$ is; alsdan $a - \frac{1}{2}\pi = 0$, en verdwijnen dus de eerste integralen in de vergelijkingen (s), zoodat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) \;.\; (\text{Lim. } k = \infty) \ldots\ldots (XXI)$$

Wat de beide andere onderstellingen aanbelangt, deze voeren tot integralen van den vorm

$$\int_0^a \frac{Cos.kx}{Sin.x} F(x)\,dx \quad,\quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

die eerst naderhand zullen worden behandeld; men moet hier dus anders te werk gaan. Uit de goniometrische vergelijkingen

$$Cos. 4kx = Cos. \{(4k+1)x\}. Cos. x + Sin. \{(4k+1)x\}. Sin. x,$$
$$Cos. \{(4k+2)x\} = Cos. \{(4k+1)x\}. Cos. x - Sin. \{(4k+1)x\}. Sin. x,$$

volgt vooreerst

$$\left.\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^a \frac{Cos. 4kx}{Cos. x} F(x)\,dx = \int_0^a Cos. \{(4k+1)x\}. F(x)\,dx + \\ &\quad + \int_0^a \frac{Sin. \{(4k+1)x\}}{Cos. x} Sin. x. F(x)\,dx, \\ I_{13} &= \int_0^a \frac{Cos. \{(4k+2)x\}}{Cos. x} F(x)\,dx = \int_0^a Cos. \{(4k+1)x\}. F(x)\,dx - \\ &\quad - \int_0^a \frac{Sin. \{(4k+1)x\}}{Cos. x} Sin. x. F(x)\,dx. \end{aligned}\right\} ,(\text{Lim.} k = \infty) \quad \ldots\ldots (\iota)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijkingen is nul, volgens de formule (VIII) van N°. 4: de tweede integraal moet men uit de formulen in N°. 5 en 6 afleiden door aldaar respective $F(x) = Tang. x. F(x)$ en $F(x) = Sin. x \dfrac{Sin. x}{Cos. x} F(x) = \dfrac{Sin.^2 x}{Cos. x} F(x)$ aan te nemen.

De integraal

$$I_{14} = \int_0^a \frac{Sin. kx}{Cos. x} Sin. x. F(x)\,dx = \int_0^a Sin. kx. Tang. x. F(x)\,dx$$

wordt onstadig voor $x = \dfrac{2b+1}{2}\pi$; en men moet dus eerst het theorema (X) raadplegen, in hoeverre hier aan de vergelijking Lim. $\delta F(k \pm \delta)$ voldaan wordt. Deze toch wordt hier

$$0 = \text{Lim.}\delta. \frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right)}{Cos.\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right)} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = \text{Lim.}\delta. \frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right). Cos.\delta}{\mp Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right). Sin.\delta} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) =$$

$$= \text{Lim.} \frac{\delta}{\mp Tang.\delta} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = \mp \text{Lim.} \frac{\delta}{Tang.\delta}. \text{Lim.} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) \quad . \ (\text{Lim.}\ \delta = 0)$$

Om aan deze voorwaardensvergelijking te voldoen, waarin Lim. $\frac{\delta}{Tang.\,\delta} = 1$ is, moet Lim.$F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = 0$ zijn, dat is $F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0$; derhalve

$$I_{14} = \int_0^a Sin.\,kx.\,Tang.\,x.\,F(x)\,dx = 0, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0 \text{ is. (Lim. } k = \infty) \quad \ldots \text{(XXII)}$$

Wanneer daarentegen $F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ niet altijd nul is, zoo leert ons de vergelijking (X) niets meer, en men moet tot N°. 6 overgaan. Vooreerst volgt uit (XI), daar voor a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ de functie $\frac{Sin.^2 x}{Cos.\,x}F(x)$ stadig blijft, en die vergelijking alzoo hier geldig is:

$$\int_0^a Sin.\,kx.\,Tang.\,x.\,F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{Sin.^2\,o}{Cos.\,o}F(o) = 0\ ,\ a < \tfrac{1}{2}\pi\ . \quad \text{(Lim. } k = \infty) \ldots \text{(XXIII)}$$

Voor alle volgende vergelijkingen is $F(b\pi)$

$$\frac{Sin.^2\,b\pi}{Cos.\,b\pi}F(b\pi) = \frac{0}{1}F(b\pi) = 0,$$

als $F(x)$ stadig is, en worden dus de waarden der integralen allen nul; maar voor alle waarden van $x = \frac{2b+1}{2}\pi$ wordt dezelfde $F(x)$

$$\frac{Sin.^2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{Cos.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{+1}{0}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \infty, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ niet altijd nul is;}$$

en daaruit volgt:

$$\int_0^a Sin.\,kx.\,Tang.\,x.\,F(x)\,dx = \infty, \text{ als } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ niet altijd nul is. (Lim. } k = \infty) \ . \text{(XXIV)}$$

Volgens deze vergelijkingen (XXII) tot (XXIV) gaan nu de vergelijkingen (t) over in de volgende:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^a \frac{Cos.\,4\,k\,x}{Cos.\,x}\,F(x)\,d\,x = 0 && ,\ a < \tfrac{1}{2}\pi\,; \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \left.\begin{aligned} &= 0\,, \\ &= \infty\,. \end{aligned}\right\} && ,\ \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty,\ \text{naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \\
&\int_0^a \frac{Cos.\{(4k+2)x\}}{Cos.\,x}F(x)dx = 0\,, && \text{altijd of niet altijd nul is.} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = -\infty, && \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = 0 && ,\ a < \tfrac{1}{2}\pi\,;
\end{aligned}\right\} ,\ (\text{Lim. } k = \infty) \quad \ldots . \ (\text{XXV})$$

Dit verschil tusschen de stelsels vergelijkingen (XX) en (XXV) doet genoegzaam den invloed van den vorm van k op de waarde der hier behandelde integraal kennen, waarbij altijd F (x) stadig is ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

8. Stellen wij nu in de integraal (IV) $f(x) = \frac{x}{Cos.\,x}.F(x)$, dan wordt deze

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{Cos.\,x}\,F(x)\,d\,x = 0 \quad , \quad 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi\,; \ (\text{Lim. } k = \infty). \ldots . \ (\text{XXVI})$$

maar dit alleen zoo lang $f(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie; daar nu voor $x = \frac{1}{2}\pi$, $Cos.\,x$ nul en dus de functie oneindig wordt, moet in de vorige vergelijking a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ blijven. Voor a grooter dan, of gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ is dus eene nieuwe onderzoeking noodig; daartoe gebruike men de goniometrische formule

$$Sin.\,k\,x = Sin.\,\{(k-1)\,x\}.\,Cos.\,x + Cos.\,\{(k-1)\,x\}.\,Sin.\,x\,;$$

dan is:

$$I_{15} = \int_0^a Sin.\{(k-1)x\}.\,F(x)\,d\,x + \int_0^a \frac{Cos.\{(k-1)\,x\}}{Cos.\,x}\,Sin.x.\,F(x)\,dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)\ .\ (u)$$

De algemeene vergelijking (X) leert ons, dat de eerste integraal nul is, zoo lang F (x) stadig blijft tusschen de grenzen van het integreren, en dit zal men toch bij de tweede integraal moeten onderstellen, want deze is een bijzonder geval van de formulen van het vorige nummer: men moet dáár slechts voor F (x) stellen $Sin.\,x$. F (x). Zij dus vooreerst in (u) $k' = 4\,k \pm 1$, dan wordt $k' - 1 = 4\,k$ of $4\,k - 2$, en derhalve volgens de vergelijkingen (XXV):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^a \frac{Sin.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.\,x} F(x)\,dx = 0\ , && a \leqq \tfrac{1}{2}\pi\ ;\\
&\qquad\qquad \begin{aligned}&= 0\ ,\\ &= \pm\,\infty.\end{aligned} \left\}\begin{aligned}&, \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty\ ,\ \text{naarmate}\ F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\\ &\text{altijd nul is of niet.}\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} ,(\text{Lim.}k=\infty) \ \ldots\ (\text{XXVII})$$

Zij vervolgens $k' = 4k$ of $= 4k+2$, zoo wordt $k' - 1 = 4k \mp 1$ en dus naar de vergelijkingen (XXI) en (XX), daar $F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ hier

$$Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right).\,F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = Cos.\,b\pi.\,F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ wordt, } \ldots\ldots \ (v)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\int_0^a \frac{Sin.\,4kx}{Cos.\,x}F(x)\,dx = +\int_0^a \frac{Sin.\,\{(4k+2)x\}}{Cos.\,x}F(x)\,dx =\\
&= \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) && , a = \tfrac{1}{2}\pi\ ;\\
&= \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right) && , \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}\ ;\\
&= \frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] && , a = \frac{3\pi}{2}\ ;\\
&= \frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots - 2\,Cos.\,b\pi.\,F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + Cos.\,b\pi.\,F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] && , a = \frac{2b+1}{2}\pi\ ;\\
&= \pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots + Cos.\,b\pi.\,F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] && , a = \frac{2b+1}{2}\pi + c\ ;\\
&= \pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots\right] && , a = \infty\ .
\end{aligned}\right\} ,(\text{Lim.}k=\infty)\ .\ (\text{XXVIII})$$

$F(x)$ zij steeds stadig tusschen de grenzen der integratie.

9. Eindelijk moet men nog in het theorema (VI) $\frac{x}{Sin.\,x}F(x)$ voor $f(x)$ aannemen om de integraal

$$I_{16} = \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx\ \ ,\ \ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

te verkrijgen, waarover reeds in N°. 7 gesproken werd. Ten einde hare waarde uit het vorige af te leiden, gebruike men de goniometrische formule

$$Cos.kx = Cos.\{(k+1)x\}.Cos.x + Sin.\{(k+1)x\}.Sin.x\,,$$

zoodat

$$I_{16} = \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Sin.x} Cos\,x.F(x)\,dx + \int_0^a Sin.\{(k+1)x\}.F(x)\,dx\,, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)\;.\;(w)$$

wordt. Zoolang F (x) tusschen de grenzen 0 en a stadig blijft, en bij deze onderstelling zijn wij toch gedwongen ons te bepalen, wordt de waarde der laatste integraal nul volgens formule (X). Wat de eerste integraal in het tweede lid der vergelijking (w) betreft, namelijk

$$I_{17} = \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Sin.x} Cos.x.F(x)\,dx = \int_0^a Cos.\{(k+1)x\}.Cot.x.F(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Cos.x} \cdot \frac{Cos.^2 x}{Sin.x} F(x)\,dx\,,$$

hierin blijkt vooreerst dat voor $x = b\pi$ telkens de geintregeerde functie onstadig wordt; het theorema (IX) zal ons dus moeten leeren, van welken invloed dit op de waarde der integraal zij. De voorwaarden-grensvergelijking Lim. $\delta F(h \pm \delta) = 0$, wordt dus hier:

$$0 = \text{Lim.}\delta Cot.(b\pi \pm \delta).F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim.}\delta \frac{Cos.(b\pi \pm \delta)}{Sin.(b\pi \pm \delta)} F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim.}\delta \frac{Cos.b\pi.Cos.\delta}{\pm Cos.b\pi.Sin.\delta} F(b\pi \pm \delta)$$

$$= \pm\,\text{Lim.}\frac{\delta}{Tang.\delta}.\text{Lim.}F(b\pi \pm \delta)\;. \qquad (\text{Lim.}\,\delta = 0)$$

Nu is (even als vroeger N°. 7) Lim. $\frac{\delta}{Tang.\delta} = 1$, dus moet Lim. $F(b\pi \pm \delta) = 0$, dat is $F(b\pi) = 0$ zijn, om aan de vergelijking (IX) te kunnen voldoen; maar alsdan wordt ook:

$$\int_0^a Cos.kx.Cot.x.F(x)\,dx = 0, \text{ als } F(b\pi) \text{ altijd 0 is. } (\text{Lim.}\,k = \infty)\,.\,.\,.\,.\,(XXIX)$$

Wanneer daarentegen niet altijd F $(b\pi)$ nul wordt, moeten wij ons wenden tot N°. 7. Aldaar is dan in het algemeen

$$F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.^2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{0}{Cos.b\pi}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=0;$$

maar dezelfde functie wordt reeds onstadig voor $x=\pi$, en verder voor alle $x=b\pi$; want dan is:

$$F(b\pi)=\frac{Cos.^2 b\pi}{Sin.b\pi}F(b\pi)=\frac{1}{0}F(b\pi).$$

Is dan $F(b\pi)$ niet altijd nul, zoo wordt

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a Cos.kx.Cot.x.F(x)\,dx&=0\quad,a<\pi;\\&=\infty,\pi<a<\infty,\ \text{indien } F(b\pi)\text{ niet altijd nul is.}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,(\text{Lim.}k=\infty)\\&\ldots(\text{XXX})\end{aligned}$$

Deze uitkomsten (XXIX) en (XXX) in (w) overbrengende, komt er eindelijk

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a \frac{Cos.kx}{Sin.x}F(x)\,dx&=0\quad,a<\pi;\\&\left.\begin{aligned}=0,\\=\infty.\end{aligned}\right\},\pi<a<\infty,\ \text{naarmate } F(b\pi)\text{ altijd nul is of niet.}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,(\text{Lim.}k=\infty)\\&\ldots(\text{XXXI})\end{aligned}$$

Ook hier wordt $F(x)$ ondersteld stadig te blijven tusschen de grenzen van de integratie.

Het is opmerkelijk, dat deze integraal, die zooveel overeenkomst heeft met die van het vorige nummer, tot geheel andere uitkomsten leidt, in zoo verre hier de vorm van k niet in aanmerking kwam, hetgeen daar wel het geval was: overigens bestaat in dit opzigt een groot verschil tusschen de vier gelijkvormige integralen van N°. 6, 7, 8 en 9.

10. Het aangevoerde moge genoegzaam zijn, om te staven wat in den aanvang beweerd is omtrent de oplettendheid, die men moet wijden aan den toestand van de grootheid k, of deze van den vorm $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ zij; men heeft gezien, hoe zeer in sommige gevallen deze vorm invloed had op de waarde, en in andere gevallen de waarde voor alle k dezelfde blijft. Men mag hierbij niet over het hoofd zien, dat k altijd als een geheel getal werd beschouwd, zoodra daarbij bijzondere vormen werden aangenomen, terwijl anders k geheel willekeurig is.

Uit de gegevene theorie van de algemeene integralen

$$\int_0^a Sin.\,kx.f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a Sin.\,kx.f(x)\frac{dx}{x}\,,\quad \int_0^a \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a \frac{Sin.\,kx}{Cos.\,x}f(x)\,dx\,,$$

$$\int_0^a Cos.\,kx.f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a Cos.\,kx.f(x)\frac{dx}{x}\,,\quad \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Cos.\,x}f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Sin.\,x}f(x)\,dx\,,$$

waarbij zich nog voordeden de beide bijzondere vormen

$$\int_0^a Sin.\,kx.\,Tang.\,x.f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_0^a Cos.\,kx.\,Cot.\,x.f(x)\,dx\,,$$

(waar overal Lim. $k = \infty$), kunnen nu voor elk bijzonder geval de verandering der integralen worden afgeleid.

Men konde zich nog de vraag voorstellen, of niet in plaats van de functie *Sin.* kx of *Cos.* kx eenige andere goniometrische functie *Tang.* kx, *Cot.* kx, *Sec.* kx of *Cosec.* kx in te voeren ware: men ziet echter gemakkelijk in, dat alsdan de uitkomst oneindig zoude worden. Want daar deze laatste functiën of voor $kx = \frac{2b+1}{2}\pi$ of voor $kx = b\pi$ oneindig worden, zoo zal er voor elke x hoe klein deze ook worde aangenomen, k zoo groot kunnen genomen worden, dat kx eene van bovengenoemde waarden verkrijgt, en dus de integraal oneindig wordt. Dit bezwaar zoude vervallen zoodra de bovenste grens van de integratie oneindig klein ware, maar dan worden de integralen tot eene bijzondere soort teruggebragt, die door CAUCHY *Integrales définies singulières* genoemd zijn, en hier niet verder zullen worden nagegaan.

Omdat te gelijk met iedere integraal waarin de factor *Sin.* kx voorkomt, eene andere gelijksoortige gevonden is, die slechts daarin verschilt dat de factor *Cos.* kx den vorigen vervangt, zoo is wegens de formule

$$e^{\pm kxi} = Cos.\,kx \pm i\,Sin.\,kx$$

ook

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x)\,dx = \int_0^a Cos.\,kx.f(x)\,dx \pm i\int_0^a Sin.\,kx.f(x)\,dx.$$

Daardoor geven de theorema's (IX) en (X):

$$\int_b^a e^{\pm kxi}\,F(x)\,dx = 0. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty).$$

Wordt $F(x)$ voor $b, a,$ of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. $\delta F(b+\delta) = 0$, Lim. $\delta F(a-\delta) = 0$, Lim. $\delta F(h \pm \delta) = 0$ wezen voor Lim. $\delta = 0$; b kan ook nul zijn. (XXXII)

Evenzoo (IV) en (VI):

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x) \frac{dx}{x} = \infty \,.\, \pi f(0) \,. \quad (\text{Lim.} k = \infty) \ldots\ldots \text{(XXXIII)}$$

Verder uit de theorema's (XI), (XII), (XV), (XVIII) en (XIX) verbonden met (XXXI):

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a e^{\pm kxi} F(x) \frac{dx}{Sin.\, x} &= \pm \frac{1}{2} \pi i F(0) \quad , \quad 0 < a < \pi; \\ &= \pm \tfrac{1}{2}\pi i F(0), \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} , \pi < a < \infty \text{, naarmate } F(b\pi) \text{ altijd of} \\ &= \infty \qquad\qquad\quad \text{niet altijd nul is.}\end{aligned}\right\} , (\text{Lim.} k = \infty) \quad \text{(XXXIV)}$$

Eindelijk geven (XX), (XXI) en (XXV) verbonden met (XXVI,) (XXVII) en (XXVIII):

$$\left.\begin{aligned}\int^a e^{\pm kxi} F(x) \frac{dx}{Cos.\, x} &= 0 \\ &= \infty\end{aligned}\right\} , (\text{Lim.} k = \infty), 0 < a < \infty, \text{ naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd nul is of niet.} \quad \text{(XXXV)}$$

Het is opmerkelijk, dat hier alle onderscheid tusschen de verschillende vormen van k ten eenenmale wegvalt, hetgeen dan eens aan de integralen met *Cos.* kx, dan weder aan die met *Sin.* kx te wijten is.

11. Hoewel in het voorgaande reeds onderscheidene toepassingen voorkomen van de hoofdvergelijkingen zelve, zal het misschien niet ondienstig zijn eene regtstreeksche toepassing aan te voeren, die meermalen voorkomt, maar dikwerf met uitkomsten, die van de hier gegevene verschillen. Zij daartoe:

$$F_1(x) = \frac{Sin.\, x}{1 - 2p\, Cos.\, x + p^2} f(x) \text{ of } F_2(x) = \frac{Cos.\, x}{1 - 2p\, Cos.\, x + p^2} fx.$$

Opdat deze functie stadig blijve tusschen de grenzen der integratie zal men moeten nagaan: wanneer de noemer $1 - 2p\, Cos.\, x + p^2$ nul kan worden; stelt men daarin $Cos.\, x = 1 - 2\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$, zoo komt er $(1 - p)^2 + 4p\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$, dus de som van twee vierkanten; derhalve moet elk vierkant op zich zelf nul worden: met den tweeden term $4p\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$ is dit steeds het geval, zoodra $x = 2b\pi$, dus $Sin.^2 \tfrac{1}{2} x = Sin.^2 b\pi$ is; met den eersten term daarentegen slechts dan, wanneer $p = 1$ is. Om de onstadigheid derhalve te voorkomen, heeft men slechts het geval van $p = +1$ uit te sluiten, dus de voorwaarde te stellen $-\infty < p < +1$, $+1 < p < \infty$. Hierbij is natuurlijk ondersteld, dat $f(x)$ weder stadig blijve tusschen de grenzen van het integreren.

Nu heeft men:

$$F_1(0)=0, F_1(b\pi)=0, F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.\,b\pi}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right),$$

$$F_2(0)=\frac{1}{(1-p)^2}f(0),\ F_2(2b\pi)=\frac{1}{(1-p)^2}f(2b\pi),$$

$$F_2\{(2b+1)\pi\}=\frac{-1}{(1+p)^2}f\{(2b+1)\pi\},\ F_2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=0.$$

En daaruit volgt, naar de vergelijkingen (IV), (IX), (X):

$$\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\frac{dx}{x}=0,\quad 0<a<\infty,\ (\text{Lim.}\,k=\infty).\ \ldots\ (1)$$

$$\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\frac{dx}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1-p)^2}f(0),\ \ldots\ (2)$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx.\,Sin\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (3)$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx.\,Cos.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (4)$$

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (5)$$

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx.\,Cos.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0. \quad (6)$$

Wordt $f(x)$ voor b, a, of h $(a>h>b)$ onstadig, zoo moet nog respective $\text{Lim.}\,\delta f(b+\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(a-\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(h\pm\delta)=0$ zijn, voor $\text{Lim.}\,\delta=0$; b kan ook nul zijn. $(\text{Lim.}\,k=\infty)$.

De vergelijkingen (5) en (6) zoowel als (4) en (5), door optelling en aftrekking te zamen verbonden, geven, wanneer men voor $k-1$ of $k+1$ weder eenvoudiger k schrijft:

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0 \quad (7)$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0 \quad (8)$$

Wordt $f(x)$ voor b,a, of h $(a>h>b)$ onstadig, zoo moet nog respective $\text{Lim.}\,\delta f(b+\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(a-\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(h\pm\delta)=0$ zijn, voor $\text{Lim.}\,\delta=0$. b kan ook nul zijn. $(\text{Lim.}\,k=\infty)$.

Vergelijking (XI) voor $a<\pi$, (XIV, 1) voor $a=\pi$, (XVII, 1) voor $a=2b\pi$, (XVII, 2) voor $a=(2b+1)\pi$, (XVIII, 4) voor $a=2b\pi+c$, (XVIII, 5) voor

$a=(2b+1)\pi+c$ en (XIX, 3) voor $a=\infty$, geven voor de onderstelling $F_1(x)$ nul tot waarde, en dit is reeds in (7) gevonden. Bij de onderstelling $F_2(x)$ daarentegen geven de vergelijkingen (XI), (XIII), (XVI), (XVIII, 1—3) (XIX, 1, 2) het volgende, waarbij somtijds nog het even of oneven zijn van b te onderscheiden viel:

$$\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1-p)^2}f(0) \quad , \quad a<\pi; \quad \ldots \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{(1-p)^2}f(0)+\frac{1}{(1+p)^2}f(\pi)\right], \quad \ldots \quad (10)$$

$$\int_0^\pi \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{(1-p)^2}f(0)-\frac{1}{(1+p)^2}f(\pi)\right], \quad \ldots \quad (11)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f\{(2b-2)\pi\}+f(2b\pi)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \quad . \quad (12)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(1+p)^2}\left[2f(\pi)+2f(3\pi)+\ldots+2f\{(2b-1)\pi\}+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \quad . \quad (13)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f\{(2b-2)\pi\}+f(2b\pi)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \quad . \quad (14)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1+p)^2}\left[2f(\pi)+2f(3\pi)+\ldots+2f\{(2b-1)\pi\}+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \quad . \quad (15)$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \quad . \quad (16)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c}\frac{Sin.\{(2k+1)x\}.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{1}{(1-p)^2}\big[f(o)+2f(2\pi)+..+2f(2b\pi)\big]-$$

$$-\frac{2}{(1+p)^2}\big[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b+1)\pi\}\big]\Big\},\ldots(17)$$

$$\int_0^{2b\pi+c}\frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{1}{(1-p)^2}\big[f(o)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\big]+$$

$$+\frac{2}{(1+p)^2}\big[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\big]\Big\},\ldots(18)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c}\frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{1}{(1-p)^2}\big[f(o)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\big]+$$

$$+\frac{2}{(1+p)^2}\big[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b+1)\pi\}\big]\Big\},\ldots(19)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{Sin.\{(2k-1)x\}.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{1}{(1-p)^2}\big[f(o)+2f(2\pi)+\ldots\big]-$$

$$-\frac{2}{(1+p)^2}\big[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots\big]\Big\},\ldots(20)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos\,x+p^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{1}{(1-p)^2}\big[f(o)+2f(2\pi)+\ldots\big]+$$

$$+\frac{2}{(1+p)^2}\big[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots\big]\Big\};\ldots(21)$$

overal is Lim. $k=\infty$.

Verder voert bij de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV, 1, 2, 4, 6) de onderstelling $F_2(x)$ steeds tot eene waarde nul, zoo als reeds in verg. (8) gevonden werd. Daarentegen geeft de andere onderstelling $F_1(x)$ nieuwe uitkomsten. Omdat $F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.b\pi}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ is, moet men somtijds onderscheid maken tusschen:

$$F_1\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)=\frac{1}{1+p^2}f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)\text{ en }F_1\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)=\frac{-1}{1+p^2}f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right);$$

en dan verkrijgt men door de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Cos.\{(4k\pm1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2}f(x)\,dx=\pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ldots\ldots(22)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}; \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+p^2}\left\{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}, \quad \ldots\ldots (24)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+p^2}\left[\left\{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+2f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)+f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)\right\}-2\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\right], (25)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+p^2}\left[2\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\left\{2f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+2f\left(\frac{4b-5}{2}\pi\right)+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\right], \quad . . (26)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi+c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\right], \quad . . (27)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi+c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\right)\pi\right\}\right], \quad . . (28)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.\,Tg.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots\right\}-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots\right\}\right], (29)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.\,4kx.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = 0, \quad a<\tfrac{1}{2}\pi; \quad \ldots\ldots (30)$$

$$\left.\begin{array}{l} =0, \\ =\infty, \end{array}\right\}, \ \tfrac{1}{2}\pi \leq a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is.} \quad (31)$$

$$\int_0^a \frac{\{Cos.\,(4k+2)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \left.\begin{array}{l} 0, \\ =-\infty, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (32)$$

$$=0. \qquad a<\tfrac{1}{2}\pi \quad \ldots\ldots (33)$$

alwaar overal Lim. $k=\infty$.

Wanneer men $F_2(x)$ in de vergelijkingen (XXVI), (XXVII) en (XXVIII) invoert, wordt men wederom tot de integraal (7) gevoerd; maar de onderstelling $F_1(x)$ geeft integendeel bij die zelfde vergelijkingen:

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi; \ldots \ldots \ldots (34)$$

$$\int_0^a \frac{Sin.\{(4k\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = 0\,, \quad = \pm\infty, \left.\begin{matrix} , \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty \text{, naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd} \\ \text{nul is of niet} \ldots \ldots \ldots (35) \end{matrix}\right\}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots \ldots \ldots (36)$$

$$\int_0^a \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}, \ldots (37)$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right], \ldots (38)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}\left[2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+2f\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right)+f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right], \ldots (39)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi+c} \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right], (40)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{(4k+1\pm1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\ldots\right] \ldots (41)$$

Hier is ook overal Lim. $k=\infty$.

Eindelijk gebruike men de formule (XXXI). Bij de onderstelling $F_1(x)$, komt men wederom terug tot de integraal (8); bij de andere $F_2(x)$ daarentegen hier tot de uitkomsten

$$\int_0^a \frac{Cos.\,k\,x.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos\,x+p^2} f\,x\,dx = 0 \quad , \quad a < \pi, (\text{Lim. } k = \infty) \ldots \ldots \ldots (42)$$

$$\left.\begin{matrix} = 0, \\ = \infty. \end{matrix}\right\} \begin{matrix} , \pi < a < \infty \text{, naarmate } f(b\,\pi) \text{ steeds nul is of niet.} \\ , (\text{Lim. } k = \infty) \ldots \ldots \ldots (43) \end{matrix}$$

Nog kunnen de hulpformulen (XXII) tot (XXIV) en (XXIX), (XXX) hier worden toegepast. Het eerste stel leidt voor $F_2(x)$ tot de integraal (5); het tweede voor de onderstelling $F_1(x)$ tot de integraal (4); wanneer men daarentegen in de eerste formulen $F_1(x)$ en in de laatste $F_2(x)$ invoert, zoo is

$$\int_0^a \frac{Sin.kx.Sin.x.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \tfrac{1}{2}\pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (44)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (45)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.kx.Cos.x.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (46)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \pi < a < \infty, \text{ naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (47)$$

Daar

$$Sin.x.\,Tang.x = \frac{Sin.^2 x}{Cos.x} = \frac{1-Cos.^2 x}{Cos.x} = \frac{1}{Cos.x} - Cos.x\,,$$

en
$$Cos.x.\,Cot.x = \frac{Cos.^2 x}{Sin.x} = \frac{1-Sin.^2 x}{Sin.x} = \frac{1}{Sin.x} - Sin.x$$

is, zoo volgt uit de verbinding van de integralen (6) met (44) en (45), en van (3) met (46) en (47):

$$\int_0^a \frac{Sin.kx.Sec.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \tfrac{1}{2}\pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (48)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (49)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.kx.Cosec.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (50)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \pi < a < \infty, \text{naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \ldots (51)$$

Bij al deze formulen is even als vroeger steeds $f(x)$ stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie, uitgezonderd bij die, waar het tegendeel uitdrukkelijk wordt opgegeven; ook is p gebonden door de ongelijkheden $-\infty < p < +1$, $+1 < p < \infty$, dat is p ongelijk aan $+1$.

Men heeft hier tevens eene wederzijdsche bevestiging van sommige der gevondene theoremata, in de omstandigheid dat de formulen (IX), (X), (XI), (XIV), (XVII), (XVIII), (XIX), (XXVI), (XXVII), (XXVIII), hoezeer zij ook mogen verschillen, bij geschikte onderstellingen allen tot dezelfde integraal (7) voeren; evenzoo de formules (IX), (X), (XX), (XXI), (XXV), (XXXI) tot de integraal (8), de formulen (X), (XXII) tot (XXIV) tot de integraal (5) en de formulen (IX), (XXIX), (XXX) tot de integraal (4).

Van de hier bepaalde integralen komen, als $f(x)=1$ wordt genomen, N°. 8 en 35 voor op Table 84 N°. 11 en 12 mijner *Tables d'Intégrales Définies* *.

---

* Wilde men bijv. de integraal $I = \int_0^\pi \frac{Sec.x\,dx}{1-2p\,Cos.x+p^2}$ nagaan, (zie *Tables d'Intégrales Déf.* T. 85. N°. 4, 5, zoo kan men daartoe de bekende ontwikkeling van *Sec. x* in eenen reeks gebruiken:

$$Sec.x = -2\sum_1^{k-1}(-1)^n\,Cos.\{(2n-1)x\} - \frac{Cos.2kx}{Cos.x}(-1)^k.$$

Dan wordt

$$I = -2\sum_1^{k-1}(-1)^n\int_0^\pi \frac{Cos.(2n-1)x\,dx}{1-2p\,Cos.x+p^2} - (-1)^k\int_0^\pi \frac{Cos.2kx}{1-2p\,Cos.x+p^2}\,\frac{dx}{Cos.x}$$

Ten einde dit uit te werken late men k oneindig worden. Alsdan is naar *Tables d'Int. Déf.* T. 84. 3 de eerste term van het eerste lid

$$= -2\sum_1^{k-1}(-1)^n\frac{\pi}{1-p^2}p^{2n-1} = \frac{-2\pi}{1-p^2}\sum_1^{k-1}(-1)^n p^{2n-1} = \frac{-2\pi}{1-p^2}\,\frac{-p}{1+p^2} = \frac{2p\pi}{1-p^4}.$$

Voor den tweeden term wende men zich tot de hiervoor gevonden formulen en wel tot 30—33. Stellende aldaar $f(x) = Cosec.x = \frac{1}{Cos.x.\,Tang.x}$ wordt, daar $a = \pi$ hier grooter dan $\frac{1}{2}\pi$ is, voor alle evene k

$$\int_0^\pi \frac{Cos.2kx}{1-2p\,Cos.x+p^2}\,\frac{dx}{Cos.x} = (-1)^k\,\infty, \text{ daar } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = Cosec.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \pm 1,$$

niet nul is. Dientengevolge is de waarde van onze integraal oneindig groot, en niet $\frac{2p\pi}{1-p^2}$, zoo als SCHLÖMILCH vindt.

Evenzeer geven ons de gevondene theoremata o. a. dat b. v. de bekende integralen, *Tables etc.*, T. 205. N°. 13, 16, T. 17. N°. 10, 1:

$$\int_0^\infty \frac{Tang.px\,dx}{q^2+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{Cot.px\,dx}{q^2+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{Sec.px\,dx}{q^2+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{x\,Cosec.px\,dx}{q^2+x^2}$$

alle oneindig moeten zijn.

En hiermede mogen wij de theorie van de bepaalde integralen

$$\int_a^b Sin.kx.f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_a^b Cos.kx.f(x)\,dx\;, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)\;,$$

als afgehandeld beschouwen, daar men in ieder bijzonder geval zich tot de gevondene theoremata kan wenden, en daaruit de overeenkomstige uitkomst afleiden. Voor het beweren, dat men dikwerf op den bijzonderen vorm van k te letten heeft, hebben de bewijzen niet ontbroken: dáár, waar zulks te pas kwam, is gewezen op het verschil, dat er in dit opzigt dikwijls bestaat tusschen integralen, die oogenschijnlijk tot uitkomsten van denzelfden aard moesten aanleiding geven, maar waarbij dan eens k geheel algemeen bleef, dan weder in twee of vier afzonderlijke vormen werd gesplitst; ja, men heeft gezien, dat ook bij de grenzen der integratie dikwerf bijzondere vormen moesten onderscheiden worden. Wij moeten nu nagaan, welken invloed de bijzondere vormen van het oneindige uitoefenen, wanneer zij als grenzen der integratie zich voordoen.

II. Over de Integraal $\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx$.

12. Over deze soort van bepaalde integralen zijn zeer verschillende meeningen geopperd, en deze hebben tot zeer verschillende uitkomsten geleid; vele dier meeningen berusten echter op verkeerde gronden en valsche voorstellingen van het wezen eener bepaalde integraal. Zoo werd bijv. in eene bepaalde integraal

$$\int_0^\infty f(ax)\,\mathrm{F}(b,x)\,dx = \psi(a,b)\,,\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x)$$

waar de functie van dien aard was, dat $f(0) = 1$ werd, $a = 0$ gesteld, en daaruit afgeleid

$$\int_0^\infty \mathrm{F}(b,x)\,dx = \psi(o,b)\,;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (y)$$

terwijl men daarbij vergat, dat de vergelijking (x) bepaaldelijk was ontwikkeld onder de voorwaarde, dat a grooter dan 0 moest blijven. De afleiding van de integraal (y) uit (x) op die wijze was dus ongeoorloofd, al konde het

soms gebeuren, dat zij tot eene ware uitkomst voerde ten gevolge van bijzondere eigenschappen der integraal (x); maar het waren juist deze, somtijds met anders verkregene overeenstemmende, uitdrukkingen, die tot het aanwenden der bovengemelde, niet steek houdende, methode verleid hebben.

Later heeft RAABE gedeeltelijk in navolging van POISSON * in het *Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle*, Bd. 15. S. 355, *über die Summation periodischer Reihen* † zich meer bepaaldelijk met deze soort van integralen bezig gehouden, maar is daarbij van niet geldige gronden uitgegaan. Hij beschouwde eene reeks

$$\begin{aligned} y = a_1 &+ a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1} \\ &+ a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + a_3 x^{p+2} + \ldots + a_p x^{2p-1} \\ &+ a_1 x^{2p} + a_2 x^{2p+1} + \ldots \end{aligned},$$

die uit perioden bestaat, elke van p termen, waarbij zich dezelfde coëfficienten $a_1, a_2 \ldots a_p$ telkens in dezelfde orde herhalen, zoodat

$$y = (1 + x^p + x^{2p} + \ldots)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1})$$

is. Wordt $x = 1$, zoo stelt hij

$$1 + x^p + x^{2p} + \ldots = \frac{1}{1 - x^p}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (z)$$

zoodat

$$y = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1}}{1 - x^p}$$

wordt: bij de onderstelling

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = 0,$$

waardoor de teller der vorige breuk door $1 - x$ deelbaar wordt, verkrijgt hij voor $x = 1$:

$$y = \frac{(p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \ldots + 3a_{p-3} + 2a_{p-2} + a_{p-1}}{p}.$$

Deze uitkomst echter geldt niet, daar (z) slechts voor x kleiner dan de eenheid geldig is en niet meer voor x gelijk één, en het daarop gebouwde resultaat:

---

* Zie diens beschouwingen over de *Sommation des Séries de Quantités périodiques*, voorkomende in het *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 19, p. 404. N°. 45—56.

† Zie nog zijne verhandeling *über die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen*, in het *Journal von Crelle*, Bd. 23. S. 105 en Bd. 25. S. 160.

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\frac{k}{2\,\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,k\,x, Cos.\,\beta\,k\,x)\,x\,d\,x,\\ \text{als}\quad \int_0^{2\pi}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,k\,x, Cos.\,\beta\,k\,x)\,d\,x = 0 \text{ is,}\end{array}\right\}\ldots (aa)$$

vervalt daarmede reeds, behalve wegens hetgeen nog op de verdere redenering aan te merken is. In den grond der zaak verschilt dan ook eigenlijk deze methode weinig van de straks afgekeurde.

Op de volgende wijze ontgaat men daarentegen het gebruik van divergente reeksen, en derhalve het onware, althans onzekere, van de daarop gebouwde redeneringen; men komt echter daarbij niet tot zulke algemeene uitkomsten, wat de grens oneindig betreft; of liever, men ziet, welke beteekenis men in het vorige aan die grens te hechten had.

13. Het is bekend, dat de definitie van eene bepaalde integraal door de formule

$$\int_\varepsilon^q f(x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\{f(\varepsilon)+f(\varepsilon+\delta)+f(\varepsilon+2\,\delta)+\ldots+f\,(q-\delta)\},(q=n\,\delta),(\text{Lim.}\,\delta=0)\,.\,(\text{A})$$

wordt uitgedrukt. Neemt men hierin δ voor de onderste grens ε, zoo is

$$\int_\delta^q f(x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\{f(\delta)+f(2\,\delta)+f(3\,\delta)+\ldots+f[(n-1)\,\delta]\}\,\ldots\ldots\ldots\,(\text{A}_1)$$

Wanneer men nu hierin $f\,x = r^{\frac{x}{\delta}}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x,\ Cos.\,\beta\,x)$ aanneemt, — het zal later blijken, waarom hier de exponentiele factor bij de goniometrische functie is gevoegd, — zoo wordt dit:

$$\int_\delta^q r^{\frac{x}{\delta}}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\Big[r\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta)+r^2\,\varphi\,(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta)+$$
$$+\,r^3\,\varphi\,(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta)+\ldots+r^{n-1}\,\varphi\,(Sin\,\{(n-1)\,\alpha\,\delta\}, Cos\,\{(n-1)\,\beta\,\delta\})\Big].$$

Nu kan men de bovenste grens $q = n\,\delta$ nader gaan bepalen; daartoe zij $n = 2\,a\,\pi\,b + 1$, dus $q = 2\,a\,\pi\,b\,\delta + \delta$; daar $n\,\delta$ een eindig getal was ondersteld, moest n oneindig zijn, en men kan aannemen, dat dit bij de nadere bepaling van n door den factor b ontstaat, die dan oneindig is, terwijl de factor $2\,a\,\pi$ eindig blijft. Neemt men dus $b\,\delta$ wederom $= c$, dan kan deze eene eindige grootheid wezen (even als vroeger q), hoezeer het oneindig zijn van c in het algemeen niet uitgesloten wordt. Men heeft derhalve

$$q = 2 a \pi c + \delta, \quad n = 2 a b \pi + 1, \quad b \delta = c;$$

en de integraal wordt dus:

$$\int_{\delta}^{2a\pi c+\delta} r^{\frac{x}{\delta}} \varphi (Sin. \alpha x, Cos. \beta x)\, d x = \text{Lim.}\, \delta r \left[\varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r \varphi (Sin. 2\, \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \right.$$

$$\left. + r^2 \varphi (Sin. 3\, \alpha \delta, Cos. 3 \beta \delta) + \ldots + r^{2ab\pi-1} \varphi (Sin. 2\, a b \pi \alpha \delta, Cos. 2\, a b \pi \beta \delta)\right].$$

Hierin is a nog geheel willekeurig: men neme deze grootheid zoodanig aan dat $a\alpha$ en $a\beta$ beide geheele getallen worden; en dit is altijd mogelijk, zoo lang α en β slechts rationele grootheden zijn, want dan behoeft men voor a b. v. slechts het kleinste gemeene veelvoud van de noemers te nemen, die in de waarden van α en β voorkomen; het is echter duidelijk, dat a even goed elk veelvoud van dit gemeene veelvoud kan zijn. Bij deze onderstelling wordt, wanneer e eenig gedeelte van b voorstelt, zoodanig dat $e\delta$ 1, 2, 3 tot c wordt:

$$Sin. \left\{(2 \pi e a + f) \alpha \delta\right\} = Sin. (2 \pi . a \alpha . e \delta + f \alpha \delta) = Sin. f \alpha \delta,$$

$$Cos. \left\{(2 \pi e a + f) \beta \delta\right\} = Cos. (2 \pi . a \beta . e \delta + f \beta \delta) = Cos. f \beta \delta;$$

en derhalve ook:

$$\varphi \left[Sin. \left\{(2 \pi e a + f) \alpha \delta\right\}, Cos. \left\{(2 \pi e a + f) \beta \delta\right\}\right] = \varphi (Sin. f \alpha \delta, Cos. f \beta \delta).$$

Hierdoor verkrijgt de integraal den volgenden vorm:

$$\int_{\delta}^{2a\pi c+\delta} r^{\frac{x}{\delta}} \varphi (Sin. \alpha x, Cos. \beta x)\, d x = \text{Lim.}\, \delta r.$$

$$\left[\varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r \varphi (Sin. 2\, \alpha \delta, Cos. 2\, \beta \delta) + \ldots + r^{2a\pi-1} \varphi (Sin. 2\, a \pi \alpha \delta, Cos. 2\, a \pi \beta \delta)\right.$$

$$+ r^{2a\pi} \varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r^{2a\pi+1} \varphi (Sin. 2 \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \ldots + r^{4a\pi-1} \varphi (Sin. 2 a \pi \alpha \delta, Cos. 2 a \pi \beta \delta)$$

$$+ r^{4a\pi} \varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r^{4a\pi+1} \varphi (Sin. 2 \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \ldots + r^{6a\pi-1} \varphi (Sin. 2 a \pi \alpha \delta, Cos. 2 a \pi \beta \delta)$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\left. + r^{(c-1)2a\pi} \varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r^{(c-1)2a\pi+1} \varphi (Sin. 2 \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \ldots + r^{2ca\pi-1} \varphi (Sin. 2 a \pi \alpha \delta, Cos. 2 a \pi \beta \delta)\right]$$

$$= \text{Lim.}\, \delta r (1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \ldots + r^{(c-1)2a\pi}).$$

$$\left[\varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r \varphi (Sin. 2\, \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \ldots + r^{2a\pi-1} \varphi (Sin. 2\, a \pi \alpha \delta, Cos. 2\, a \pi \beta \delta)\right]. \quad \text{(B)}$$

$$= \text{Lim.}\, \delta r \frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} \times$$

$$\left[\varphi (Sin. \alpha \delta, Cos. \beta \delta) + r \varphi (Sin. 2\, \alpha \delta, Cos. 2 \beta \delta) + \ldots + r^{2a\pi-1} \varphi (Sin. 2\, a \pi \alpha \delta, Cos. 2\, a \pi \beta \delta)\right]. \quad \text{(C)}$$

Om hier van de vergelijking (B) tot de volgende (C) te kunnen besluiten, heeft men evenwel nog enkele voorwaarden noodig, die men niet over

het hoofd mag zien, zoo als onder anderen door RAABE in het straks aangehaalde stuk is gedaan. Hier toch wordt eene reeks in eene geslotene uitdrukking getransformeerd, en het komt er dus op aan, om te weten of de reeks oneindig, en in dat geval, of zij convergent zij: immers, als de reeks oneindig en divergent tevens is, zoo wordt gezegde transformatie volstrekt onwettig; is de reeks daarentegen eindig, zoo mag men altijd daartoe overgaan. In het onderhavige geval heeft men dus daarop te letten, of r kleiner dan de eenheid zij; want alsdan is de reeks altijd convergent, en de gevolgtrekking is dus geoorloofd. Maar is r gelijk of grooter dan één, zoo geldt dit besluit niet langer, tenzij de reeks eindig zij, dat is c eene eindige waarde hebbe; want was daarbij c oneindig, en dus de reeks eene oneindige, zoo was zij divergent, althans niet meer convergerende. Het geval van $r = 1$ en c eindig willen wij dus het eerst beschouwen.

Ten eerste is alsdan onder het integraalteeken de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ na te gaan: deze wordt $1^{\frac{x}{\delta}}$ dus 1. Vervolgens heeft men in het tweede lid den factor $\frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}}$ en deze wordt $\frac{0}{0}$ voor $r = 1$; men moet dus teller en noemer ten opzigte van r differentiëren, en daarna wederom $r = 1$ stellen: deze bewerking geeft hier:

$$\frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} = \frac{-2ca\pi r^{2ca\pi-1}}{-2a\pi r^{2a\pi-1}} = c\, r^{(c-1)2a\pi} = c.$$

Men heeft derhalve, — daar de grenzen voor de limiet nul van δ worden: 0 en $2a\pi c$, en r gelijk één is ondersteld —:

$$\int_0^{2a\pi c} \varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = \text{Lim.}\,\delta.\,c\big[\varphi\,(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + \varphi\,(Sin.\,2\,\alpha\delta, Cos.\,2\,\beta\delta) + \ldots$$
$$+ \varphi\,(Sin.\,2\,a\pi\,\alpha\delta, Cos.\,2\,a\pi\,\beta\delta)\big]$$
$$= c\,\text{Lim.}\,\delta\big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + \varphi(Sin.\,2\,\alpha\delta, Cos.\,2\,\beta\delta) + \ldots + \varphi(Sin.\,2\,a\pi\,\alpha\delta, Cos.\,2\,a\pi\,\beta\delta)\big];$$

of wanneer men het tweede lid dezer vergelijking volgens de grondformule (A_1) tot eene bepaalde integraal herleidt, waarbij dan even goed de grenzen 0 en $2\,a\pi$ kunnen worden gesteld in plaats van δ en $2a\pi + \delta$ — en dit is werkelijk geoorloofd, wanneer ten minste φ $(Sin.\,\alpha x,\ Cos.\,\beta x)$ voor de grens nul niet oneindig wordt, welke voorwaarde reeds in de integraal van het eerste lid ligt opgesloten — ook de vergelijking:

$$\int_0^{2a\pi c} \varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = c\int_0^{2a\pi} \varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx, \text{(c eindig)} \;\ldots\ldots \;(XXXVI)$$

Men kan ook in dezelfde vergelijking (C), altijd bij de onderstelling dat c eindig blijft, $1-f\delta$ als waarde voor r aannemen; alsdan verkrijgt de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ onder het integraalteeken eene andere waarde voor Lim. $\delta = 0$ namelijk

$$\text{Lim.}\, r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1-f\delta)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left[(1-f\delta)^{\frac{1}{f\delta}}\right]^{fx} = \left[\text{Lim.}\,(1-f\delta)^{\frac{1}{f\delta}}\right]^{fx} = (e^{-1})^{fx} = e^{-fx},$$

zoo als uit de theorie der limieten genoegzaam bekend is.

Tevens wordt alsdan:

$$\frac{1-r^{2ca\pi}}{1-r^{2a\pi}} = \frac{1-(1-f\delta)^{2ca\pi}}{1-(1-f\delta)^{2a\pi}} = \frac{1-\left\{1-\frac{2ca\pi}{1}f\delta+\frac{2ca\pi}{1}.\frac{2ca\pi-1}{2}f\delta^2-\ldots\right\}}{1-\left\{1-\frac{2a\pi}{1}f\delta+\frac{2a\pi}{1}.\frac{2a\pi-1}{2}f\delta^2-\ldots\right\}} =$$

$$= \frac{\frac{2ca\pi}{1}-\frac{2ca\pi}{1}\frac{2ca\pi-1}{2}f\delta+\ldots}{\frac{2a\pi}{1}-\frac{2a\pi}{1}.\frac{2ca\pi-1}{2}f\delta+\ldots} = \frac{2ca\pi}{2a\pi} = c;$$

zoodat hier dezelfde uitkomst verschijnt, als straks door het differentiëren van teller en noemer. Hierdoor wordt de vergelijking (C):

$$\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = \text{Lim.}\delta c\Big[(1-f\delta)\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta)+(1-f\delta)^2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta)+\ldots$$
$$+(1-f\delta)^{2a\pi}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\Big]$$

of, als men de derde of hoogere magten van δ verwaarloost:

$$\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = c\Big\{\text{Lim.}\,\delta\Big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta)+\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta)+\ldots$$
$$+\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\Big]$$
$$-f\,\text{Lim.}\delta\Big[\delta\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta)+2\delta\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta)+\ldots+2a\pi\delta\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big]\Big\}.$$

Voert men hier wederom naar de grondvergelijking (A_1) bepaalde integralen in, zoo blijkt, dat de beide termen van het laatste lid dezer vergelijking, die elk door de limiet van eene reeks worden gevormd, kunnen worden voorgesteld door de bepaalde integralen

$$\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx \quad\text{en}\quad \int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,x\,dx;$$

zoodat de vorige vergelijking wordt:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = c\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx - cf\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)x dx \\ = c\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)(1 - fx)\,dx, (c \text{ niet } \infty).\end{aligned}\right\} . \text{(XXXVII)}$$

Bij de theoremata XXXVI en XXXVII moeten $a\alpha$ en $a\beta$ steeds geheele getallen zijn.

14. Wanneer c ook oneindig zijn kan, mag men de vergelijking (C) niet meer gebruiken, maar moet men zich dadelijk tot de vergelijking (B) wenden. Het tweede lid daarvan bevat onder anderen twee factoren, die beide reeksen zijn: de eerste daarvan

$$y = 1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \ldots + r^{(c-1)2a\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (ab)$$

wordt met c oneindig, en derhalve ook divergent, zoodra r gelijk of grooter dan één is. Opdat dus de waarde der integraal niet oneindig worde, dat is, opdat de integraal zelve bestaan kunne, is het vooreerst noodzakelijk, dat de tweede reeks

$$z = \delta\left[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + r\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + r^2\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots \right.$$
$$\left. + r^{2a\pi-1}\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\right] \ldots (ac)$$

nul worde. Aan deze voorwaarde wordt voldaan door de volgende onderstelling:

$$\text{Lim.}\,\delta\left[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + \varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \ldots + \varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\right] = 0;. \text{(D)}$$

dat is, wanneer men deze reeks volgens de grondformule (A_1) in eene bepaalde integraal overbrengt:

$$\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Dat deze onderstelling wezenlijk de gewenschte uitwerking heeft, althans voor het geval dat r juist één is, of de eenheid tot limiet heeft, hetgeen hier slechts te pas komt, blijkt op de volgende wijze. Wanneer men toch de formule (D) van (ac) aftrekt, zoo komt er:

$$z = -\delta\Big[(1-r)\varphi(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + (1-r^2)\,\varphi(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots + (1-r^{2a\pi-1})\,\varphi(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big]$$

$$= -(1-r)\,\delta\Big[\varphi(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + \frac{1-r^2}{1-r}\varphi(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\varphi(Sin.\,2a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big].$$

Ten einde de waarde van z onder meer symmetrischen vorm te brengen, telle men daarbij den getallenvorm (D), waarvan de waarde nul is; dan wordt

$$Z = -(1-r)\delta\Big[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \left(1+\frac{1-r^2}{1-r}\right)\varphi(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots + \left(1+\frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\pi\,\beta\,\delta)\Big] \ldots\ldots\ldots (ad)$$

Substitueert men deze waarde in de vergelijking (B) en bedenkt men, dat het produkt van den factor $(1-r)$ uit de waarde van z met de reeks y vermenigvuldigd, nu ook voor $r=1$ convergent moet zijn, en dat men dus *nu* ook hier stellen mag, dat

$$(1-r^{2a\pi})(1+r^{2a\pi}+r^{4a\pi}+\ldots+r^{(c-1)2a\pi}) = 1-r^{2ca\pi}$$

is, zoo heeft men eindelijk voor de formule (B):

$$\int_{\delta}^{2\pi ac+\delta} r^{\frac{x}{\delta}}\varphi(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,dx = -\text{Lim.}\,\delta\,r\,\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}}(1-r^{2ca\pi})$$

$$\Big[\varphi(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + 2\,\varphi(Sin.2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + \left(1+\frac{1-r^2}{1-r}\right)\varphi(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots + \left(1+\frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\beta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big], \ldots\ldots\ldots (ae)$$

en deze vergelijking geldt nu in het algemeen, hetzij c oneindig zij of niet, hetzij r één zij of niet, wanneer slechts de onderstelling (D) of (E) als waarheid kan worden aangenomen.

Wordt hierin vooreerst $r=1$, zoo is $\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} = \frac{0}{0}$, dus teller en noemer ten opzigte van r differentierende $\frac{-1}{-2\,a\,\pi\,r^{2a\pi-1}} = \frac{1}{2\,a\,\pi}$; $1-r^{2ac\pi}$ wordt $1-1=0$, zoo lang c eindig is althans; eindelijk is, even als vroeger $\text{Lim.}\, r^{\frac{x}{\delta}} = 1$. De

vergelijking wordt dus, wanneer men bij de grenzen ook Lim. $\delta = 0$ neemt:

$$\int_0^{2\pi ac} \varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = -1.\frac{1}{2a\pi}.0.\,\text{Lim.}\,\delta\Big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + \ldots$$

$$+\left(1+\frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\Big]$$

$$= 0 \qquad (c \text{ eindig}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXVIII)}$$

en dit komt, bij de onderstelling (E), die hier is aangenomen, geheel met het theorema (XXXVI) overeen.

Wordt daarentegen $r = 1 - \frac{\delta}{c}$, zoo is, zoo lang c eindig blijft,

$$\text{Lim.}\,r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left[\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{x} = \left[\text{Lim.}\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{c}{\delta}}\right]^{\frac{x}{c}} = (e^{-1})^{\frac{x}{c}} = e^{-\frac{1}{c}x}, \ldots (af)$$

volgens eene bekende stelling uit de theorie der limieten. Vervolgens

$$\text{Lim.}\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} = \text{Lim.}\frac{1-\left(1-\frac{\delta}{c}\right)}{1-\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{2a\pi}} = \text{Lim.}\frac{\frac{\delta}{c}}{1-\left\{1-\frac{2a\pi}{1}\frac{\delta}{c}+\frac{2a\pi}{1}.\frac{2a\pi-1}{2}\frac{\delta^2}{c^2}-\ldots\right\}} =$$

$$= \text{Lim.}\frac{1}{\frac{2a\pi}{1}-\frac{2a\pi}{1}\frac{2a\pi-1}{2}\frac{\delta}{c}+\ldots} = \frac{1}{2a\pi}, \ldots (ag)$$

en

$$\text{Lim.}\frac{1-r^{2ca\pi}}{\delta} = \text{Lim.}\frac{1-r^{2ba\pi\delta}}{\delta} = \frac{0}{0}, (\text{Lim}\,\delta = 0),$$

(wanneer men de waarde $c = b\delta$ substitueert) en dit wel voor elke eindige waarde van r. Men moet dus hier ten opzigte van δ den teller en den noemer differentiëren, en verkrijgt dan:

$$\text{Lim.}\frac{1-r^{2ba\pi\delta}}{\delta} = \text{Lim.}\frac{-r^{2ba\pi\delta}\,2ba\pi\,l\,r}{1} = \text{Lim.}(-2a\pi bl r.\,r^{2ba\pi\delta}) = \text{Lim.}(-2a\pi b\,l\,r.\,r^{2ca\pi}),$$

wanneer men in den laatsten factor $c = b\delta$ substitueert. Nu is:

$$\text{Lim.}\,b\,l\,r = \text{Lim.}\frac{c}{\delta}l\left(1-\frac{\delta}{c}\right) = \text{Lim.}\,c\frac{l\left(1-\frac{\delta}{c}\right)}{\delta} = \frac{0}{0};$$

dus wederom teller en noemer ten aanzien van δ differentierende:

$$\text{Lim.}\, b\, l\, r = \text{Lim.}\, c \frac{\left\{\dfrac{-\frac{1}{c}}{1-\frac{\delta}{c}}\right\}}{1} = \text{Lim.} \frac{-1}{\left\{1-\frac{\delta}{c}\right\}} = -1\,,$$

en

$$\text{Lim.}\ r^{2ca\pi} = \left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{2ca\pi} = 1\,;$$

waaruit eindelijk volgt

$$\text{Lim.} \frac{1-r^{2ca\pi}}{\delta} = -2\,a\,\pi.(-1).(1) = +2\,a\,\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ah)$$

Wanneer men nu deze uitkomsten (af), (ag) en (ah) in de vergelijking (ae) overbrengt, en daarbij bedenkt, dat voor $r = 1 - \frac{\delta}{c}$ naar de formule (ag)

$$1 + \frac{1-r^{s-1}}{1-r} = 1 + (s-1) = s$$

is, zoo heeft men ten laatste:

$$\int_0^{2\pi ac} e^{-\frac{1}{c}x} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = -\text{Lim.}\delta.\frac{1}{2a\pi}.(2a\pi)\delta\left[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \right.$$
$$\left. + 3\,\varphi\,(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots + 2\,a\,\pi\,\varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\right]$$
$$= -\text{Lim.}\,\delta\left[\delta\,\varphi\,(Sin.\alpha\,\delta, Cos.\beta\,\delta) + 2\,\delta\,\varphi\,(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + 3\,\delta\,\varphi\,(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta) + \ldots\right.$$
$$\left. + 2\,a\,\pi\,\delta\,\varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\right];$$

of, wanneer men de laatste reeks naar de algemeene grondformule tot eene bepaalde integraal herleidt:

$$\int_0^{2\pi ac} e^{-\frac{1}{c}x} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x. \quad (c \text{ eindig}) \ . \ (\text{XXXIX})$$

En dit komt wederom overeen met de formule (XXXVII), als men daar $f = \frac{1}{c}$ neemt, waardoor $c\,f = 1$ wordt, en men tevens bedenkt dat hier, volgens de voorwaardevergelijking (E) de eerste integraal in het tweede lid dier vergelijking (XXXVII) verdwijnt.

Wanneer eindelijk c oneindig wordt, zoo verandert de vorige redenering niet, dan ten opzigte van den factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ onder het integraalteeken. Reeds da-

delijk konde men wel is waar in dat geval voor $e^{-\frac{1}{c}x}$ aannemen e^{-c} dat is 1, maar tot dezelfde uitkomst kan men ook op eene meer zekere wijze aldus geraken. In aanmerking nemende, dat men, zoo c oneindig is, ook daarvoor $\frac{1}{\delta}$ stellen kan, heeft men $r = 1 - \frac{\delta}{c} = 1 - \delta^2$, en vervolgens:

$$\text{Lim.}\, r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1-\delta^2)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1+\delta)^{\frac{x}{\delta}}(1-\delta)^{\frac{x}{\delta}} = \left[\text{Lim.}\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^x \left[\text{Lim.}\,(1-\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^x$$
$$= \left[e^1\right]^x \left[e^{-1}\right]^x = e^x . e^{-x} = 1 .$$

In plaats van de vergelijking XXXIX komt hier dus, als men k voor c schrijft:

$$\int_0^{2\pi a k} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x, \quad (k = \infty)\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(XL)}$$

Bij de theoremata (XXXVIII), (XXXIX) en (XL) moet men niet vergeten, dat steeds de formules (D) of (E) als voorwaarde zijn aangenomen, en tevens even als vroeger $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen moeten zijn.

15. Tot nog toe behandelden wij slechts de integralen die 0 en $2\pi a c$, eenig veelvoud van 2π, tot grenzen hadden; thans kunnen wij evenwel de beschouwing verder uitstrekken, en aan dezelfde integralen de grenzen 0 en $2\pi a c + b$ toekennen, waar dan b natuurlijk kleiner dan 2π moet zijn. In de theoremata XXXVI tot XL komen twee vormen van integralen voor, die dan hier worden:

$$\int_0^{2\pi ac+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,dx = \int_0^{2\pi ac} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x,$$

$$\int_0^{2\pi ac+b} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = \int_0^{2\pi ac} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} e^{-fx}\varphi\,(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx,$$

wanneer men den grensafstand 0 tot $2\pi a c + b$ in twee andere verdeelt, eenen van 0 tot $2\pi a c$ en den anderen van $2\pi a c$ tot $2\pi a c + b$. De beide eerste integralen in het tweede lid dezer vergelijkingen zijn nu dezelfde als in de genoemde theoremata worden bepaald; de beide laatsten laten zich gemakkelijk vereenvoudigen, en wel door $2\pi a c + y$ voor x te nemen. Daardoor wordt $d\,x = d\,y$, terwijl men 0 en b als grenzen voor y verkrijgt: verder is:

$$\begin{aligned}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x) &= \varphi\,(Sin.\,\{\alpha\,(2\,\pi\,a\,c+y)\}\,,\,Cos.\,\{\beta\,(2\,\pi\,a\,c+y)\})\\ &= \varphi\,(Sin.\,\{2\,\pi\,c\,a\,\alpha+\alpha\,y\}\,,Cos.\,\{2\,\pi\,c\,a\,\beta+\beta\,y\})\\ &= \varphi\,(Sin.\,\alpha\,y, Cos.\,\beta\,y)\,,\end{aligned}$$

daar volgens de onderstelling $a\alpha$, en $a\beta$ beide geheele getallen moeten blijven. Verder is

$$e^{-fx} = e^{-f(2\pi ac+y)} = e^{-2\pi acf-fy} = e^{-2\pi acf}e^{-fy};$$

en dus worden de boven behandelde integralen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi ac+b}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = \int_0^{2\pi ac}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x + \int_0^b\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x,\\ &\int_0^{2\pi ac+b}e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx = \int_0^{2\pi ac}e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x,Cos\,\beta x)dx + e^{-2\pi acf}\int_0^b e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx.\end{aligned}\right\}.(ai)$$

In deze transformatie-formulen (ai) voor de eerste integralen van het tweede lid de verschillende uitkomsten substituerende, die in de theoremata (XXXVI) tot (XL) verkregen zijn, komt er achtervolgens:

$$\int_0^{2a\pi c+b}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx = c\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx + \int_0^b\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx (c\text{ eindig}).(XLI)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b}e^{-fx}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = c\int_0^{2a\pi}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x - cf\int_0^{2a\pi}\varphi\,(Sin.\,a\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x$$

$$+\,e^{-2\pi acf}\int_0^b e^{-fx}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x,\quad (c\text{ eindig})\;\;..\;(XLII)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = \int_0^b\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x\quad (c\text{ eindig})\;.......\;(XLIII)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b}e^{-\frac{1}{c}x}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\int_0^{2a\pi}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x\,+$$

$$+\,e^{-2a\pi}\int e^{-\frac{1}{c}x}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x\quad (c\text{ eindig})\;.\;(XLIV)$$

$$\int_0^{2a\pi k+b}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx = -\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)xdx + \int_0^b\varphi(Sin.\alpha x,Cos.\beta x)dx, (k=\infty).(XLV)$$

Bij deze vijf vergelijkingen is het volgende op te merken:

1°. $b < 2\pi$.

2°. $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen.

3°. De drie laatste vergelijkingen bestaan slechts onder de voorwaarde

$$\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

De onderlinge vergelijking der beide theoremata (XL) en (XLV) leert nu, dat de integraal

$$\int_0^{\infty} \varphi\,(Sin.\,\alpha x,\; Cos.\,\beta x)\,dx$$

verschillende waarden verkrijgt, naarmate ∞ van den vorm $2a\pi k$ of $2a\pi k + b$ is, voor $k = \infty$, en hiermede is hetgeen in N°. 1 is aangevoerd genoegzaam bewezen. Het behoeft naauwelijks te worden opgemerkt, dat de vergelijkingen (XXXVII) en (XLII) respective in (XXXVI) en (XLI) overgaan, zoodra f gelijk nul wordt gesteld.

16. Neemt men als toepassing

$$\varphi\,(Sin.\,\alpha x,\; Cos.\,\beta x) = Sin.\frac{px}{q} \text{ en } = Cos.\frac{px}{q},$$

zoo is respective

$$\alpha = \frac{p}{q}, \beta = 0 \text{ en } \alpha = 0, \beta = \frac{p}{q};$$

om derhalve de produkten $a\alpha$ en $a\beta$ tot geheele getallen te maken, behoeft men, als p en q geheele getallen voorstellen, slechts $a = q$ te nemen. In deze gevallen is zoowel bij de eene als bij de andere onderstelling:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2q\pi} Sin.\frac{px}{q}\,dx = q\int_0^{2\pi} Sin.py\,dy = -\frac{q}{p}\int_0^{2\pi}\frac{d.Cos.py}{dy}\,dy = -\frac{q}{p}\Big\{Cos.py\Big\}_0^{2\pi} = -\frac{q}{p}(1-1) = 0,\\
&\int_0^{2q\pi} Cos.\frac{px}{q}\,dx = q\int_0^{2\pi} Cos.py\,dy = \frac{q}{p}\int_0^{2\pi}\frac{d\;Sin.py}{dy}\,dy = \frac{q}{p}\Big\{Sin.py\Big\}_0^{2\pi} = \frac{q}{p}(0-0) = 0;
\end{aligned}\right\}(ak)$$

— wanneer men eerst $x = qy$ stelt, en vervolgens verder herleidt. —

Aan de voorwaardenvergelijking (E) wordt dus hier voldaan, en dien ten gevolge geven de theoremata (XXXVIII) en (XL):

$$\int_0^{2\pi qc} Sin.\frac{p\,x}{q}\,d\,x = 0\,, \quad \ldots\ldots (52)$$

$$\int_0^{2\pi qc} Cos.\frac{p\,x}{q}\,d\,x = 0\,, \quad \ldots\ldots (53)$$

$$\int_0^{2\pi qk} Cos.\frac{px}{q}dx = -\int_0^{2q\pi} Cos.\frac{px}{q}.xdx = -\frac{q^2}{p^2}\int_0^{2p\pi} Cos.y.ydy = 0, (\text{V.T.255. N}^\circ.1), (k=\infty), (54)$$

$$\int_0^{2\pi qk} Sin.\frac{p\,x}{q}\,d\,x = -\int_0^{2q\pi} Sin.\frac{p\,x}{q}\,x\,d\,x = -\frac{q^2}{p^2}\int_0^{2p\pi} Sin.\,y.\,y\,d\,y\,,\ (k=\infty).$$

In de beide laatste is $x = \frac{q}{p}y$ genomen. Om de laatste bepaalde integraal te vinden, zal men den grensafstand 0 tot $2p\pi$ in p andere moeten verdeelen, die elk 2π bedragen, namelijk van 0 tot 2π, van 2π tot 4π, enz. van $c.2\pi$ tot $(c-1).2\pi$ en van $(p-1).2\pi$ tot $p.2\pi$. Verder in eenige integraal, van $c.2\pi$ tot $(c+1).2\pi$ genomen, moet men $y = 2c\pi + x$ stellen, dan worden de grenzen van x: 0 en 2π; met $dx = dy$, $Sin.x = Sin.y$; daar verder voor de factor y onder het integraalteeken $2c\pi + x$ komt, kan men zoodanige integraal in twee andere ontbinden, eene met $2c\pi$ als factor, (die als constant buiten het integraalteeken te brengen is), en eene andere, waar x als factor onder het integraalteeken blijft staan, dat is

$$\int_{c.2\pi}^{(c+1).2\pi} Sin.y.y\,d\,y = 2\,c\,\pi\int_0^{2\pi} Sin.\,x\,d\,x + \int_0^{2\pi} Sin.\,x.\,x\,d\,x\,.$$

De integralen der eerste soort zijn alle van denzelfden vorm als de eerste der integralen (ak) en verdwijnen dus. Die der tweede soort zijn daarentegen alle gelijk, en hebben volgens mijne Tafels T. 250. N°. 1 tot waarde -2π; zulke zijn er p en dus is:

$$\int_0^{2p\pi} Sin.\,x.\,x\,d\,x = -2\,p\,\pi\,; \quad \ldots\ldots (55)$$

en derhalve

$$\int_0^{2\pi qk} Sin.\frac{p\,x}{q}\,d\,x = \frac{2\,q^2\,\pi}{p}\,,\ (k=\infty) \quad \ldots\ldots (56)$$

Vervolgens geven de theoremata (XLIII) en (XLV), met behulp der reeds gevonden uitkomsten:

$$\int_0^{2\pi qc+b} Sin.\frac{px}{q}\,dx = \int_0^b Sin.\frac{px}{q}\,dx = \frac{q}{p}\left(1 - Cos.\frac{pb}{q}\right), \quad \ldots\ldots (57)$$

$$\int_0^{2\pi qc+b} Cos\frac{px}{q}\,dx = \int_0^b Cos.\frac{px}{q}\,dx = \frac{q}{p}Sin.\frac{pb}{q}, \quad \ldots\ldots (58)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{2\pi qk+b} Sin.\frac{px}{q}\,dx = \frac{2q^2\pi}{p} + \int_0^b Sin.\frac{px}{q}\,dx = \frac{2q^2\pi}{p} + \frac{q}{p}\left(1 - Cos.\frac{pb}{q}\right), \\ \int_0^{2\pi qk+b} Cos.\frac{px}{q}\,dx = \int_0^b Cos.\frac{px}{q}\,dx = \frac{q}{p}Sin.\frac{pb}{q}. \end{array}\right\} \begin{array}{l} ,(k=\infty).\ (59) \\ \ldots\ldots (60) \end{array}$$

Hieruit ziet men, dat de gewoonlijk gebruikte uitkomsten

$$\int_0^\infty Sin.x\,dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_0^\infty Cos.x\,dx = 0,$$

zie *Tables etc.*, T. 96, N°. 2, 3, niet geldende kunnen zijn.

3

4566

OVER EENIGE

NIEUWE HERLEIDINGSFORMULEN

BIJ DE

THEORIE DER BEPAALDE INTEGRALEN.

DOOR

David
D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1870.

OVER EENIGE
NIEUWE HERLEIDINGSFORMULEN
BIJ DE
THEORIE VAN BEPAALDE INTEGRALEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Onder de zoo verschillende methoden ter herleiding van bepaalde integralen, bekleedt die eene voorname plaats, waar de integratie mogelijk wordt door het ontwikkelen van eenen factor der functie onder het integraalteeken in eene eindige of in eene oneindige reeks. Reeds meer dan eenmaal is door mij over deze belangrijke en vruchtbare beschouwingen gehandeld; daarbij kwamen van zelf enkele punten van gewicht ter sprake, ten opzichte van de voorzichtigheids-maatregelen, waarom het hier vooral te doen is; ook zijn er door hare bemiddeling geheele reeksen van nieuwe uitkomsten voor den dag gekomen.

Aan den anderen kant mag het bekend worden ondersteld, hoe de theorie der bepaalde integralen omgekeerd een krachtig hulpmiddel aanbiedt voor de leer der reeksen, en alles wat daarmede in verbinding staat. Vandaar dan ook dat er tusschen beide hoofddeelen der Analysis zulk een nauw, wederkeerig verband bestaat, dat het soms niet met juistheid is uit te maken, of eenig opstel eerder tot de theorie der bepaalde integralen, dan wel tot die der reeksen behoort. Daarom is het ook gansch niet zeldzaam, in eene of andere, doode of levende taal, aan het hoofd van zulk opstel te lezen; „over bepaalde integralen en over reeksen".

Bij dit alles heeft men echter vóór alles te letten op de convergentie der reeksen, die gebruikt, verkregen of behandeld moeten worden; en het is voorzeker te recht een vaste regel, zulke reeksen geheel uit te sluiten, die tusschen de grenswaarden van zekere argumenten, waarover de

behandeling loopt, divergent worden. En dit natuurlijk, omdat men slechts in het geval van convergente reeksen te doen krijgt met doorloopende integralen; terwijl daarentegen in den regel ondoorloopende integralen, die zich dientengevolge aan alle redeneering onttrekken, zamenhangen met divergente reeksen, en evenzoo ook omgekeerd.

Vreemd moge het dus wel geacht worden, wanneer men bij dergelijke onderzoekingen eene soort van ondoorloopende reeksen invoert; en men zoude allicht geneigd zijn, reeds vooruit aan de aldus verkregen uitkomsten alle wetenschappelijke waarde te ontzeggen. En toch meen ik, dat deze wijze van doen soms geoorloofd is, mits men daarbij natuurlijk die noodzakelijke maatregelen van voorzorg niet verwaarloost, die door de methode zelve als onmisbaar, maar dan ook als genoegzaam, worden aangegeven.

Het doel nu van deze verhandeling is daarvan eenige voorbeelden bij te brengen en wel eerst in den vorm van eenige algemeene stellingen, die dan later zullen worden toegepast bij het onderzoek van eenige nieuwe bepaalde integralen.

§ 1. VOORLOOPIGE BESCHOUWINGEN.

1. Eene functie, die zich naar de sinussen of cosinussen van opvolgende veelvouden der veranderlijke x of liever van het produkt sx laat ontwikkelen, kan men algemeen aldus voorstellen, indien men ten opzichte van het ordegetal n sommeert,

$$f_1(x) = \sum_1^a A_n \,Sin\, nsx\,, \;.\;.\;.\; (a) \qquad\qquad f_2(x) = B_0 + \sum_1^a B_n \,Cos\, nsx\,; \;.\;.\;.\;.\; (b)$$

alwaar de B_0 niet onder het sommatieteeken is opgenomen, omdat somtijds die B_0 of de integralen die later daarvan afhangen mogten, niet gehoorzaamt aan de algemeene wet der B_n.

Stelt vervolgens $\varphi(x)$ eene geheel willekeurige functie van x voor, zoo heeft men voor willekeurige grenzen p en q van x,

$$\int_p^q \varphi(x) f_1(x)\, dx = \sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x) \,Sin\, nsx\, dx, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

$$\int_p^q \varphi(x) f_2(x)\, dx = B_0 \int_p^q \varphi(x)\, dx + \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x) \,Cos\, nsx\, dx \;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (B)$$

Hierbij is ondersteld, vooreerst dat de integralen, die als factoren der coefficienten A en B voorkomen, op zichzelve doorloopend zijn, en vervolgens dat, indien de reeksen onder de sommatieteekens oneindige worden, — dat is voor $a = \infty$, — die reeksen convergent zijn, alles tusschen de grenzen p en q van x. Zijn toch de integralen ondoorloopend, dan kan er wel geene sprake van zijn om ze te sommeeren. Zijn de integralen wel doorloopend, maar leveren zij eene divergente reeks, zoo kan er tusschen het eerste en tweede lid van ieder der bovenstaande vergelijkingen geen teeken van gelijkheid staan: die divergente reeksen toch kunnen niet als de voorstelling van eenige bepaalde of gegevene functie worden beschouwd.

Is eenmaal aan die voorwaarden voldaan, dan komt alles hier neder op het bepalen der integralen

$$\int_p^q \varphi(x)\,dx, \ldots (c) \qquad \int_p^q \varphi(x)\,Sin\,ux\,dx, \ldots (d) \qquad \int_p^q \varphi(x)\,Cos\,ux\,dx. \ldots (e)$$

Zoodra evenwel deze integralen bekend zijn, — en met het oog daarop zal men de functie $\varphi(x)$ en de grenzen van het integreeren p en q moeten kiezen, — dan kan men deze methode nog verder uitbreiden.

2. Zij toch eene andere functie, die kan worden voorgesteld door eene reeks van sinussen of cosinussen der opvolgende veelvouden van het produkt tx, dan kan men m voor het ordegetal aannemen ten opzichte waarvan men sommeert, en zoo wordt dan die functie

$$f_3(x) = \sum_1^c C_m\,Sin\,mtx, \ldots (f) \qquad f_4(x) = D_0 + \sum_1^c D_m\,Cos\,mtx \ldots (g)$$

En nu heeft men in de algemeene stellingen (A) en (B) de $\varphi(x)$ slechts te vervangen door $\varphi(x)f_3(x)$ of door $\varphi(x)f_4(x)$, om tot de uitbreiding der methode te geraken, die men op het oog had. Want de produkten der sinussen en cosinussen, die hierbij ontstaan, en oogenschijnlijk tot andere eindintegralen zouden aanleiding geven dan de (c), (d) en (e), kunnen gemakkelijk worden herleid, zoodanig dat er juist de vermelde sommen weder te voorschijn komen. Daartoe heeft men slechts noodig de bekende goniometrische formulen

$$Sin\,ax.\,Sin\,bx = \frac{1}{2}\left[Cos.\{(a-b)x\} - Cos\{(a+b)x\}\right], \ldots (h)$$

$$Sin\,ax.\,Cos\,bx = \frac{1}{2}\left[Sin\{(a+b)x\} + Sin\{(a-b)x\}\right] = \frac{1}{2}\left[Sin\{(a+b)x\} - Sin\{(b-a)x\}\right], \ldots (i)$$

$$Cos\,ax.\,Cos\,bx = \frac{1}{2}\left[Cos\{(a+b)x\} + Cos\{(a-b)x\}\right] \ldots (k)$$

Dientengevolge leveren toch de vergelijkingen (A) en (B) de vier volgende

$$\int_p^q \varphi(x) f_1(x) f_3(x)\,dx = \sum_1^a A_n \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x)\,Sin\,nsx.\,Sin\,mtx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^a A_n \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x)\,dx\left[Cos\{(ns-mt)x\} - Cos\{(ns+mt)x\}\right], \ldots (C)$$

$$\int_p^q \varphi(x) f_1(x) f_4(x)\,dx = D_0 \sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\,Sin\,nsx\,dx + \sum_1^a A_n \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\,Sin\,nsx.\,Cos\,mtx\,dx =$$

$$= D_0 \sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\,Sin\,nsx\,dx + \frac{1}{2}\sum_1^a A_n \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\,dx\left[Sin\{(ns+mt)x\} + Sin\{(ns-mt)x\}\right], (D)$$

$$\int_p^q \varphi(x) f_2(x) f_3(x)\, dx = B_0 \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x) \, Sin\, mtx\, dx + \sum_1^a B_n \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, nsx . Sin\, mtx\, dx =$$

$$= B_0 \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x)\, Sin\, mtx\, dx + \frac{1}{2} \sum_1^a B_n \sum_1^c C_m \int_p^q \varphi(x)\, dx \Big[Sin\{(ns+mt)x\} - Sin\{(ns-mt)x\}\Big], \quad (E)$$

$$\int_p^q \varphi(x) f_2(x) f_4(x)\, dx = B_0 D_0 \int_p^q \varphi(x)\, dx + B_0 \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, mtx\, dx + D_0 \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, nsx\, dx +$$

$$+ \sum_1^a B_n \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, nsx . Cos\, mtx\, dx =$$

$$= B_0 D_0 \int_p^q \varphi(x)\, dx + B_0 \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, mtx\, dx + D_0 \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, nsx\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^a B_n \sum_1^c D_m \int_p^q \varphi(x)\, dx \Big[Cos\{(ns+mt)x\} + Cos\{(ns-mt)x\}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

En het blijkt, dat nu onze integralen in het eerste lid wederom afhangen van dezelfde hulpintegralen (c), (d) en (e), even als boven de integralen (A) en (B): maar dan ook, zoo als niet verder behoeft te worden aangetoond, gelden deze vier algemeene stellingen slechts onder dezelfde voorwaarden.

Deze stellingen geven al dadelijk aanleiding tot eenige opmerkingen.

3. Zoodra de functie $\varphi(x)$ van dien aard is, dat de integraal (c) een bijzonder geval wordt van de andere (e), wanneer men daarin $u = 0$ stelt; en wanneer bovendien de coefficienten B_0 en D_0 uit de waarde van B_n en D_m voortvloeijen, zoodra men daarin het ordegetal n of m gelijk nul neemt; — dan kunnen onze vier stellingen iets eenvoudiger worden voorgesteld, wanneer men den lossen term onder de overeenkomstige sommatie opneemt: en zulks geschiedt dan zeer eenvoudig, door die overeenkomstige sommatie bij $n = 0$ of bij $m = 0$ te beginnen. Dikwerf gebeurt het in zulk geval, dat de waarde der integraal (d) voor $u = 0$ verdwijnt, dat is nog voor die waarde blijft gelden: alsdan kan men ook, ter wille van de symmetrie, de sommatie dier integralen bij $n = 0$ of bij $m = 0$ doen aanvangen.

Maar nog van eenen anderen kant brengt vermelde eigenschap van $\varphi(x)$ eene niet onbelangrijke vereenvoudiging aan: bij de integralen namelijk in de herleide tweede leden van de vergelijkingen (C), (D), (E) en (F), waar men te maken heeft met de goniometrische functien van $ns - mt$, — zoodra dit verschil juist nul wordt. In dit geval immers kan men die termen onder de algemeene sommatie behandelen: en dit geldt evenzeer, wanneer $ns - mt$ negatief wordt: zoodra de hulpintegralen (d) en (e) ook voor negatieve u blijven gelden.

Indien integendeel de waarde dier integralen (d) en (e) afhangt van het teeken van u, en ook wanneer de integraal (c), voor $ns - mt = 0$ geldende, niet meer voortvloeit uit (e), verkrijgt de formule een geheel ander aanzien. Men moet dan bij die integralen, die een factor $Sin\{(ns-mt)x\}$ of $Cos\{(ns-mt)x\}$ bevatten, zeer voorzichtig zijn: en de integralen onder het sommatieteeken in twee groepen scheiden, al naarmate $ns - mt$ positief of negatief, of wel nul is. In het algemeen zijn sx en tx eenvoudige veelvouden van de veranderlijke x, en bestaat er derhalve eene eenvoudige

betrekking tusschen s en t; zoodra men deze gesubstitueerd heeft, zal het teeken van $(ns - mt)x$ afhangen van eene even eenvoudige betrekking tusschen n en m, waarop dan te letten is, met het oog op de grenzen 1 en a, of 1 en c bij de sommatien naar de grootheden n en m. Maar ook zelfs in dat geval zal de verdeeling van de dubbelreeksen, die ontstaan door de vermenigvuldiging van de onderscheidene reeksen f onderling, niet zonder bezwaar zijn.

Is vooreerst de dubbelreeks eindig (dus ook de grenzen a en c), zoo wordt zij in twee helften gescheiden door eene reeks van diagonaaltermen, die dan over het algemeen tot andere waarden voor de overeenkomstige integralen aanleiding geven: de eene helft der reeks bevat dan de termen voor eene positieve waarde van het verschil $ns - mt$; terwijl de andere helft is zamengesteld uit de termen, die overeenkomen met eene negatieve waarde van dat verschil. Maar, bovendien nog, deze diagonaaltermen komen er niet in alle horizontale of vertikale reien der dubbelreeks voor, zoodra niet juist $s = t$ is. De sommatie zal dus hier met veel behoedzaamheid moeten geschieden en hare uitkomst in het algemeen niet door eene algemeene formule zijn uit te drukken. En hetgeen hier van eene eindige dubbelreeks gezegd is, geldt nog des te meer, wanneer die dubbelreeks in eene of twee richtingen oneindig wordt, voor $a = \infty$ (of voor $c = \infty$), of ook voor $a = \infty$ en $c = \infty$.

Deze dubbelreeks verkeert derhalve in een dergelijken toestand als eene dubbele integraal, waar de functie onder het integraalteeken ondoorloopend wordt voor waarden van de beide veranderlijken, die tusschen hare grenzen zijn gelegen; men weet, dat het in zulk geval ongeoorloofd is, de orde van het integreeren om te keeren, of ook, dat deze herleiding eene verbetering ten gevolge heeft, die in den regel niet verdwijnt en zelfs oneindig of onbepaald kan worden, maar ook zeer wel eene eindige bepaalde waarde kan verkrijgen. Hier ontmoet men dus een geval, dat met het vermelde eenige overeenkomst heeft; de dubbelreeks wordt ondoorloopend, en de voorgeschreven voorzichtigheidsmaatregelen zijn derhalve geenszins overbodig te achten.

4. Maar wanneer men tot de toepassing wil overgaan voor bijzondere vormen van eene der functien f, dan stuit men op groote moeijelijkheid bij het zoeken naar eenen algemeenen vorm voor de uitkomst; en men zal in den regel veel beter doen alsdan de toepassing dezer leerwijze in hare twee achtereenvolgende bewerkingen te splitsen. De maatregelen, die men noodzakelijk te nemen heeft, om zich voor misslagen te vrijwaren, blijven, wel is waar, ook hier dezelfde, maar zij laten zich nu gemakkelijker op eene algemeene wijze invoeren. Langs denzelfden weg, als in N°. 2 de vergelijkingen (C) tot (F) werden afgeleid, verkrijgt men ook de volgende.

$$\int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux.\, f_1(x)\, dx = \sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux.\, Sin\, nsx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\, dx \Big[Cos\,\{(ns - u)x\} - Cos\,\{(ns + u)x\}\Big], \quad \ldots\ldots \text{(G)}$$

$$\int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux.\, f_1(x)\, dx = \sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux.\, Sin\, nsx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^a A_n \int_p^q \varphi(x)\, dx \Big[Sin.\,\{(ns + u)x\} + Sin.\,\{(ns - u)x\}\Big], \quad \ldots \text{(H)}$$

$$\int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux . f_2(x)\, dx = B_0 \int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux\, dx + \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux . Cos\, nsx\, dx =$$

$$= B_0 \int_p^q \varphi(x)\, Sin\, ux\, dx + \frac{1}{2} \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, dx \left[Sin\left\{(ns+u)x\right\} - Sin\left\{(ns-u)x\right\}\right], \quad . \text{ (I)}$$

$$\int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux . f_2(x)\, dx = B_0 \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux\, dx + \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux . Cos\, nsx\, dx =$$

$$= B_0 \int_p^q \varphi(x)\, Cos\, ux\, dx + \frac{1}{2} \sum_1^a B_n \int_p^q \varphi(x)\, dx \left[Cos\left\{(ns+u)x\right\} + Cos\left\{(ns-u)x\right\}\right] \quad . \text{ (K)}$$

Hierbij hangen wederom alle integralen in het tweede lid af van de integralen (*c*), (*d*), (*e*): werkt men de sommen uit, dan zullen de termen dier reeksen in het algemeen andere waarden verkrijgen, naarmate het verschil $ns - u$ een ander teeken verkrijgt.

Deze vier vergelijkingen kan men gebruiken ter vervanging van de vorige (A) en (B). Hier is een factor $Sin\, ux$ of $Cos\, ux$ ingevoerd, opdat men naderhand, bij het bezigen van den factor $f_3(x)$ of $f_4(x)$, slechts die $Sin\, ux$ of $Cos\, ux$ te sommeeren hebbe, om tot stellingen te geraken, die met de (C) tot (F) overeenkomen. Het spreekt van zelf, dat men zulk een factor $Sin\, ux$ of $Cos\, ux$ niet behoeft in te voeren, als misschien reeds de $\varphi(x)$ zulk een factor bevatte, want dan was daardoor immers hetzelfde doel bereikt; mits althans die standvastige grootheid u alleen in dien factor voorkomt, en ook op geenerlei wijze met andere standvastige grootheden zamenhangt, die in den factor $\varphi(x)$ mogten aangetroffen worden. In zulk een geval blijven de stellingen (A) en (B) voldoende; en hare eerste leden verkrijgen dan den vorm der eerste leden van de vergelijkingen (G) tot (K).

Het komt er nu op aan, voor eenen bepaalden vorm van $\varphi(x)$, vooreerst deze vier formulen op te stellen, de integralen in het tweede lid te berekenen en, zoo mogelijk, de sommation uit te voeren. Op die wijze verkrijgt men even zoo vele bepaalde integralen, die voor ons verder doel geschikt zijn gemaakt.

Schrijft men nu daarin mt voor u, vermenigvuldigt de vergelijkingen respectieve met C_m en met D_m, — waarbij men ook op den lossen term D_0 te letten heeft, — en sommeert men ten opzichte van m, dan geven de eerste leden, zoo als reeds werd aangemerkt, die van de formulen (C) tot (K) terug; maar de herleidingen in de tweede leden zijn nu gesplitst in twee achtereenvolgende bewerkingen. En dit stelden wij ons juist ten doel.

§ 2. ALGEMEENE HERLEIDINGSFORMULEN.

5. Ten einde nu naar deze methode algemeene herleidingsformulen af te leiden, hebben wij allereerst eene keuze der $\varphi(x)$ te doen, zoodat tusschen gegevene grenzen p en q de ver-

schillende hulpintegralen reeds bekend zijn en gemakkelijk voor onze sommatien gebruikt kunnen worden. Hier kiezen wij $\varphi(x)$ zoo, dat tusschen de grenzen $p=0$ en $q=\infty$, behalve een factor *sinus* of *cosinus*, nog een andere factor $\frac{q}{q^2-x^2}$ of $\frac{x}{q^2-x^2}$ kome. Alsdan heeft men

$$\int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = 0\,,\ .\ (l)\quad \int_0^\infty \frac{q\,Cos\,nsx}{q^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,Sin\,nqs\,,\ .\ (m)\quad \int_0^\infty \frac{x\,Sin\,nsx}{q^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,Cos\,nqs,\ .\ (n)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos\,nsx}{q^2-x^2}\,dx = Cos\,nqs.\,Ci\,(nqs) + Sin\,nqs.\,Si\,(nqs),\ \ldots\ldots\ldots\ (o)$$

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin\,nsx}{q^2-x^2}\,dx = Sin\,nqs.\,Ci\,(nqs) - Cos\,nqs.\,Si\,(nqs)\,;\ \ldots\ldots\ldots\ (p)$$

waarin $Ci\,(y) = -\int_y^\infty \frac{Cos\,x}{x}\,dx$ en $Si\,(y) = \int_0^y \frac{Sin\,x}{x}\,dx$ de bekende Integraalcosinus en Integraalsinus voorstelt. Voor de afleiding dezer integralen zij verwezen naar de *Nouvelles Tables d'Intégrales Définies*, Leiden, P. ENGELS, 1867; alwaar zij voorkomen in Table 17, N°. 1, Table 161, N°. 5, 4, 6 en 3.

Gebruikt men hier verder de goniometrische herleidingsformulen (h) tot (k), zoo leidt men daaruit de volgende af

$$\int_0^\infty Sin\,px.\ Sin\,nsx\ \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\,Cos\,pq.\ Sin\,nqs\ [p > ns],$$

$$= -\frac{\pi}{2}\,Sin\,pq.\,Cos\,nqs\,[p < ns],\ = -\frac{\pi}{4}\,Sin\,2pq\ [p = ns]\,;\ \ldots\ (q)$$

$$\int_0^\infty Sin\,px.\ Cos\,nsx\ \frac{x\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\,Cos\,pq.\,Cos\,nqs\,[p > ns],$$

$$= \frac{\pi}{2}\,Sin\,pq.\ Sin\,nqs\,[p < ns],\ = -\frac{\pi}{4}\,Cos\,2pq\ [p = ns]\,;\ \ldots\ (r)$$

$$\int_0^\infty Cos\,px.\ Sin\,nsx\ \frac{x\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,Sin\,pq.\ Sin\,nqs\,[p < ns],$$

$$= -\frac{\pi}{2}\,Cos\,pq.\ Cos\,nqs\,[p < ns],\ = -\frac{\pi}{4}\,Cos\,2pq\ [p = ns]\,;\ \ldots\ (s)$$

$$\int_0^\infty Cos\,px.\ Cos\,nsx\ \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,Sin\,pq.\ Cos\,nqs\,[p < ns],$$

$$= \frac{\pi}{2}\,Cos\,pq.\,Sin\,nqs\,[p < ns],\ = \frac{\pi}{4}\,Sin\,2pq\,[p = ns]\,;\ \ldots\ (t)$$

$$\int_0^\infty Sin\, px.\ Sin\, nsx \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \Big[Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} - Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{2} Cos\, pq. \Big[Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} \Big], \quad (u)$$

$$\int_0^\infty Sin\, px.\ Cos\, nsx \frac{q dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \Big[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} + Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} Cos\, pq. \Big[- Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} \Big], \quad (v)$$

$$\int_0^\infty Cos\, px.\ Sin\, nsx \frac{q dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \Big[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} + Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} Cos\, pq. \Big[- Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} \Big], \quad (w)$$

$$\int_0^\infty Cos\, px.\ Cos\, nsx \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \Big[Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} - Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} Cos\, pq. \Big[Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} \Big]. \quad (x)$$

Men ziet, dat het er bij de waarde van de vier laatste integralen (u) tot (x) in het algemeen niet op aankomt, welk teeken de grootheid $ns - p$ verkrijgt, terwijl de invloed hiervan op de vier eerste integralen (q) tot (t) zeer groot is; de reden hiervan is, dat bij deze gemakkelijke herleidingen konden plaats hebben, die tot zulke eenvoudige uitkomsten voerden, terwijl deze herleidingen bij gene mislukten, ten deele ook omdat de theorie van de integraalsinus en integraalcosinus daartoe nog niet genoeg ontwikkeld is.

Wat meer in het bijzonder den invloed van het positief, negatief of nul zijn van $ns - p$ op de vier vergelijkingen (u) tot (x) betreft, zij het volgende opgemerkt. Bij de integraalsinus heeft dit volstrekt geen bezwaar, omdat de theorie dier functie ons leert dat $Si(0) = 0$ is. Bij de integraalcosinus komt wel eene zwarigheid voor, omdat bij haar de theorie ons aanwijst, dat de $Ci(0)$ niet meer doorloopend is; ten einde nu die integraalcosinus te vermijden, behoeft men slechts aan te nemen, dat $ns - p$ nimmer nul kan worden; en hieraan voldoet men door de voor-

waarde, dat $\frac{p}{s}$ niet een geheel getal kan zijn. In de volgende redeneringen toch wordt n altijd als een geheel getal beschouwd, en zoo is dan altijd voldaan aan de vereischte voorwaarde. Bij het volgende zal dus altijd deze onderstelling gelden.

De vier integralen (q) tot (t) vindt men in de *Nouvelles Tables d'Intégrales Définies* in Table 166 onder N°. 1, 2 en 3.

6. Door middel van (p), van (m) en (l), van (n) en van (o) geven ons de vergelijkingen (A) en (B)

$$\int_0^\infty f_1(x)\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \sum_1^a A_n\left[Sin\,nqs.\,Ci(nqs) - Cos\,nqs.\,Si(nqs)\right], \dots \dots \text{(I)}$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\sum_1^a B_n\,Sin\,nqs = \frac{\pi}{2}f_1(q), \dots \dots \text{(II)}$$

$$\int_0^\infty f_1(x)\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\sum_1^a A_n\,Cos\,nqs = -\frac{\pi}{2}\{f_2(q)-A_0\}, \dots \dots \text{(III)}$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = \infty \dots \dots \text{(IV)}$$

De laatste integraal blijkt ondoorloopend te zijn, en dat wel wegens den term $B_0\int_0^\infty\frac{x\,dx}{q^2-x^2}=\infty$,

daar $\int_0^\infty\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{1}{2}l(q^2-x^2)\Big\}_0^\infty = -\infty$ is. Het is evenwel mogelijk, ook hier eene eindige uitkomst te verkrijgen, wanneer men namelijk

$$f'_2(x) = \sum_1^a B_n\,Cos\,nsx \dots \dots (y)$$

invoert, in plaats van de $f_2(x)$ uit (b): daartoe zoude bijv. kunnen dienen $f_2(x) - B_0 = \sum_1^a B_n\,Cos\,nsx$. Alsdan vervalt toch de oorzaak der ondoorloopendheid van de integralen in (IV), en men verkrijgt

$$\int_0^\infty f'_2(x)\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = \sum_1^a B_n\left[Cos\,nqs.\,Ci(nqs) - Sin\,nqs.\,Si(nqs)\right] \dots \dots (IV_a)$$

Maar met denzelfden vorm van $\varphi(x)$ kan men ook de stellingen (G) tot (K) gebruiken, waarbij

2

de u door p vervangen worde; bij de herleidingen komen nu alleen de hulpintegralen (m) tot (x) voor, niet meer de (l), zoodat hier geene der integralen ondoorloopend worden. Hier komt evenwel het teeken van $ns - p$ ter sprake, en wel bij het gebruik der integralen (q) tot (t), niet meer bij dat der integralen (v) tot (x). Zoo lang $p > us$ blijft, is altijd, tot voor de grootste waarde van n, $n = a$, de coefficient $p - ns$ positief, en heeft men dan slechts de eerste waarden der integralen (q) tot (t) noodig. Wordt juist $p = as$, zoo geldt het vorige voor de geheele sommatie van $n = 1$ tot $n = a - 1$, maar voor den laatsten term der sommatie, die voor $n = a$, wordt $p - ns$ gelijk nul; en men behoort dus voor dien term, de derde waarden van genoemde integralen te gebruiken. Is eindelijk $p < as$, dan zal voor eene zekere waarde van n, $n = d$, (die tusschen 1 en a gelegen is, $1 < d < a$), nog $p - ds > 0$, maar voor de opvolgende waarde van n, $n = d + 1$, integendeel $p - (d + 1)s < 0$ wezen: en nu behoort men voor $n = 1$ tot $n = d$, bij de sommatie de eerste waarden der hulpintegralen te gebruiken voor $n = d + 1$ tot $n = a$ integendeel de tweede waarden dier zelfde integralen. En hierbij kan nog eene uitzondering plaats hebben, wanneer namelijk juist $p = ds$ is. Dan moet men de sommatie in drie afzonderlijke gedeelten splitsen; de eerste loopt van $n = 1$ tot $n = d - 1$, met de eerste waarden der overeenkomstige integralen; daarop volgt een losse term voor $n = d$, waarvoor de laatste waarden dier integralen gelden; eindelijk volgt nu hetgeen er van de sommatie nog overblijft, namelijk voor $n = d + 1$ tot $n = a$, en hierbij moet men de tweede waarden der hulpintegralen invoeren. In deze beide laatste gevallen is onze d juist het grootste geheele getal, dat begrepen is in $\frac{p}{s}$; men schrijve dus naar gewoonte $d = \mathcal{E}\frac{p}{s}$; maar het onderscheid tusschen beide toestanden ligt daarin, dat $\frac{p}{s}$ zelf of eene breuk, of een geheel getal is. In plaats van $dp < s < (d + 1)p$ kan men dus de notatie gebruiken $d = \mathcal{E}\frac{p}{s}$, *breuk*, en in plaats van $dp = s < (d+1)p$ de volgende $d = \mathcal{E}\frac{p}{s}$, *geheel*; waarbij men er op dient te letten, dat de woorden *breuk* en *geheel* niet op d slaan, maar op de grootheid $\frac{p}{s}$.

Op deze wijze is het nu mogelijk geworden, om bij de eerste soort van algemeene vergelijkingen, die uit de formulen (G) tot (K) zullen moeten afgeleid worden, tot zekere, ware uitkomsten te geraken, en die uitkomsten ook op eenvoudige, licht te begrijpen, wijze voor te stellen. En hierin ligt, men zal het later kunnen opmerken, het eigenaardige karakter van deze splitsing der opvolgende herleidingen, waarover vroeger werd gesproken. Wanneer toch eenmaal de hier bedoelde bewerking en herleiding is afgeloopen, dan verkrijgt men wel onderscheidene waarden voor dezelfde integraal, naarmate van de betrekkelijke waarden van verschillende standvastigen; maar dan is daarentegen ook de weg gebaand tot de volgende bewerking, de invoering namelijk van $f_3(x)$ of van $f_4(x)$.

7. Gebruikt men de formule (q) met $f_1(x)$ en (r) met $f_2(x)$, zoo komt er

$$\int_0^\infty f_1(x)\, Sin\, px \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs = -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. f_1(q), \qquad [p \geqq as], . (V_a)$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^d A_n\, Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, nqs, \quad \ldots\ldots\ldots (V_b)$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Sin\, \{(ns-p)q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. f_1(q) + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Sin\, \{(ns-p)q\}, \qquad \left[\begin{array}{c} p < as, \\ d = \mathcal{E}\frac{p}{s} \end{array}\right] ,.(V_c)$$

$$= -\frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^a A_n\, Cos\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_1^d A_n\, Sin\, \{(ns-p)q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} Sin\, pq. \{f_2(q) - A_0\} - \frac{\pi}{2} \sum_1^d A_n\, Sin\, \{(ns-p)q\}; \quad \ldots\ldots\ldots (V_d)$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\, Sin\, px \frac{x\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n Cos\, nqs = -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. f_2(q), \; [p > as], . (VI_a)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{4} B_a Cos\, 2pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^{a-1} B_n Cos\, nqs = \quad \ldots\ldots (VI_b)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0\, Cos\, pq + \frac{\pi}{4} B_a - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n\, Cos\, nqs = \qquad [p = as],$$

$$= -\frac{\pi}{2} f_2(q) + \frac{\pi}{4} B_a, \quad \ldots\ldots (VI_c)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0\, Cos\, pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^d B_n\, Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_{d+1}^a B_n\, Sin\, nqs, \quad \ldots\ldots\ldots (VI_d)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n Cos\, \{(ns-p)q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. f_2(q) + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n\, Cos\, \{(ns-p)q\}, \qquad \left[\begin{array}{c} p > as, \\ d = \mathcal{E}\frac{p}{s}. \\ \text{breuk} \end{array}\right] ..(VI_e)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^d B_n Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_1^a B_n Cos\, \{(ns-p)q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0\, Cos\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. f_1(q) - \frac{\pi}{2} \sum_1^d B_n\, Cos\, \{(ns-p)q\}, \quad \ldots (VI_f)$$

$$\int_0^\infty f_2(x) Sin\, px \frac{x dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^{d-1} B_n Cos\, nqs - \frac{\pi}{4} B_d Cos\, 2pq + \\ + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_{d+1}^{n} B_n Sin\, nqs, \quad \ldots\ldots (VI_g)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq + \frac{\pi}{4} B_d - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n Cos\{(ns-p)q\} = \\ = -\frac{\pi}{2} Cos\, pq. f_2(q) + \frac{\pi}{4} B_d + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n Cos\, \{(ns-p)q\}, \quad \left[p < as,\ d = \mathcal{E}\frac{p}{s},\ \text{geheel} \right], \ldots (VI_h)$$

$$= -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{4} B_d + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^a B_n Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_1^{d-1} B_n Cos\{(ns-p)q\} = \\ = -\frac{\pi}{2} B_0 Cos\, pq - \frac{\pi}{4} B_d + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. f_1(q) - \frac{\pi}{2} \sum_1^{d-1} B_n Cos\{(ns-p)q\}. \quad \ldots\ldots (VI_i)$$

Voor dat men verder gaat, mogen hier een paar opmerkingen hare plaats vinden. Vooreerst is de derde waarde van (q) voor $p = ns$ begrepen in de beide vorige als grenswaarde, omdat dan $-\frac{\pi}{2} Sin\, nqs. Cos\, nqs = -\frac{\pi}{4} Sin\, 2nqs = -\frac{\pi}{4} Sin\, 2pq$ is; vandaar, dat in de formulen (V_a) tot (V_d) geen onderscheid behoefde gemaakt te worden tusschen $p > as$ en $p = as$, of tusschen $\frac{p}{s}$ breuk of geheel. Dit was daarentegen bij de volgende integraal wel degelijk noodzakelijk, omdat in (r) de derde waarde niet uit eene der beide eerste volgt; vandaar dan ook het onderscheid tusschen (VI_a) en (VI_b), tusschen (VI_d) tot (VI_f) en (VI_g) tot (VI_h). Waar somtijds de sommatie konde herleid worden tot $f_1(q)$ of tot $f_2(q)$ is dit gedaan; daarbij is echter, waar het zijn moest, afgezien van het onderscheid tusschen de coefficienten A_n en B_n; zoodat bij de formulen (V) bij f_2 de coefficienten B_n, in de formulen (VI) bij f_1 daarentegen de coefficienten A_n moeten gedacht worden. Eindelijk is, waar eene sommatie voorkwam van bijv. $d+1$ tot a, de formule ook zoo herleid, dat die sommatie vervangen werd door eene van 1 tot d; men heeft dan de keus, naarmate $a-d$ grooter of kleiner is dan d, of naarmate a grooter of kleiner is dan $2d$, de laatste of de eerste sommatie te gebruiken, die dan het spoedigst te berekenen is.

Evenzoo geven de vergelijkingen (u) met $f_1(x)$ en (v) met $f_2(x)$ de volgende stellingen, waarbij nu geene bijzondere gevallen ter sprake kunnen komen, tengevolge van het algemeene karakter der hulpintegralen (u)

$$\int_0^\infty f_1(x)\, Sin\, px \frac{x dx}{q^2-x^2} = \\ = \frac{1}{2} Sin\, pq. \sum_1^a A_n \Big[Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} - Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} \Big] - \\ - \frac{1}{2} Cos\, pq. \sum_1^a A_n \Big[Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} \Big]; . (VII)$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\, Sin\, px \frac{q dx}{q^2-x^2} = B_0 \big[Sin\, pq. Ci(pq) - Cos\, pq. Si(pq) \big] + \\ + \frac{1}{2} Sin\, pq. \sum_1^a B_n \Big[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} + Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} \Big] - \\ - \frac{1}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n \Big[Cos\, nqs. \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} - Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} \Big]. (VIII)$$

In de vergelijkingen (VI) en (VIII) werden de integralen, die B_0 tot coefficient hebben, bepaald door de formulen (*n*) en (*p*).

Even als de vorige herleidingsformulen, die alle den factor *Sin px* bezitten, kan men er ook dergelijke afleiden met de factor *Cos px*. Daartoe moet men de vergelijkingen (*s*) met $f_1(x)$ en (*t*) met $f_2(x)$ gebruiken; terwijl in dit laatste geval de B_0 tot coefficient verkrijgt de integraal (*m*). Hier gelden wederom dergelijke opmerkingen als er straks ten opzichte der formulen (V) en (VI) werden gemaakt. Bij de hulpintegralen (*t*) is voor $p = ns$ de waarde slechts een bijzonder geval van elke der beide waarden voor $p > ns$ en voor $p < ns$: dit maakt de beschouwing veel eenvoudiger en van dergelijken aard als bij de vergelijkingen (V). Ditzelfde heeft echter geene plaats bij de derde waarde van de integraal (*s*), die zich niet laat terugbrengen tot eene der beide eerste waarden; dit heeft dus ook hier ten gevolge, dat er meer afzonderlijke gevallen te beschouwen zijn, even als bij de formulen (VI). Wanneer men op dit alles let, verkrijgt men achtervolgens

$$\int_0^\infty f_1(x)\, Cos\, px \frac{x\,dx}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs = \frac{\pi}{2} Sin\, pq . f_2(q), \qquad [p > as], \;.\; (IX_a)$$

$$= -\frac{\pi}{4} A_a\, Cos\, 2pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^{a-1} A_n\, Sin\, nqs = \quad \ldots\ldots (IX_b)$$

$$, [p = as],$$

$$= -\frac{\pi}{4} A_a + \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs = -\frac{\pi}{4} A_a + \frac{\pi}{2} Sin\, pq . f_1(q) \quad \ldots\ldots (IX_c)$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^d A_n\, Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} Cos\, pq . \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, nqs, \quad \ldots\ldots (IX_d)$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq . f_2(q) - \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\}, \qquad \left[p < as,\; d = \mathcal{E}\frac{p}{s},\; \text{breuk}\right], \;.\; (IX_e)$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq . \sum_1^a A_n\, Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_1^d A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} Cos\, pq . \{f_2(q) - A_0\} + \frac{\pi}{2} \sum_1^d A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\}, \quad \ldots\ldots (IX_f)$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^{d-1} A_n\, Sin\, nqs - \frac{\pi}{4} A_d\, Cos\, 2pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq . \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, nqs, \quad \ldots\ldots (IX_g)$$

$$= -\frac{\pi}{4} A_d + \frac{\pi}{2} Sin\, pq . \sum_1^a A_n\, Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} A_d + \frac{\pi}{2} Sin\, pq . f_1(q) - \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\}, \qquad \left[p < as,\; d = \mathcal{E}\frac{p}{s},\; \text{geheel}\right], \;.\; (IX_h)$$

$$= \frac{\pi}{4} A_d - \frac{\pi}{2} Cos\, pq . \sum_1^a A_n\, Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_1^{a-1} A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\} =$$

$$= \frac{\pi}{4} A_d - \frac{\pi}{2} Cos\, pq . \{f_2(q) - A_0\} + \frac{\pi}{2} \sum_1^{d-1} A_n\, Cos\, \{(ns - p)\, q\}; \quad \ldots\ldots (IX_i)$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\, Cos\, px \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2} B_0 Sin\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^a B_n Cos\, nqs = \frac{\pi}{2} Sin\, pq. f_2(q), \quad [p \geqq as], \quad (X_a)$$

$$= \frac{\pi}{2} B_0 Sin\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^d B_n Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_{d+1}^a B_n Cos\, nqs, \quad \ldots\ldots (X_b)$$

$$= \frac{\pi}{2} B_0 Sin\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^a B_n Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n Sin\{(ns-p)q\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq. f_2(q) + \frac{\pi}{2} \sum_{d+1}^a B_n Sin\{(ns-p)q\}, \quad \left[\begin{matrix} p < as, \\ d = \mathcal{E}\frac{p}{s} \end{matrix}\right], \ldots (X_c)$$

$$= \frac{\pi}{2} B_0 Sin\, pq + \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} \sum_1^a B_n Sin\{(ns-p)q\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \{f_1(q) + B_0\} - \frac{\pi}{2} \sum_1^d B_n Sin\{(ns-p)q\}; \quad \ldots\ldots (X_d)$$

$$\int_0^\infty f_1(x)\, Cos\, px \frac{q\,dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \sum_1^a A_n \Big[Sin\, nqs. \{Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q]\} + Cos\, nqs. \{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\}\Big] -$$

$$- \frac{1}{2} Cos\, pq. \sum_1^a A_n \Big[Cos\, nqs. \{Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q]\} - Sin\, nqs. \{Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q]\}\Big]; (XI)$$

$$\int_0^\infty f_2(x)\, Cos\, px \frac{x\,dx}{q^2-x^2} = B_0 \{Cos\, pq. Ci(pq) + Sin\, pq. Si(pq)\} +$$

$$+ \frac{1}{2} Sin\, pq. \sum_1^a B_n \Big[Sin\, nqs. \{Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q]\} - Cos\, nqs. \{Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q]\}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} Cos\, pq. \sum_1^a B_n \Big[Cos\, nqs. \{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\} + Sin\, nqs. \{Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q]\}\Big]. (XII)$$

Ook hier is, waar zulks mogelijk was, de sommatie herleid tot $f_1(q)$ of $f_2(q)$, evenwel zonder te letten op het onderscheid tusschen de coefficienten A_n en B_n, zoodat bv. $f_2(q) - A_0$ eigenlijk moest heeten $f_2(q) - B_0$. Waar vervolgens eene sommatie voorkwam, die niet tot $f_1(q)$ of $f_2(q)$ te herleiden is, is zij telkens op twee wijzen voorgesteld, of als eene sommatie van 1 tot d of als eene andere van $d+1$ tot a; opdat men de keuze hebbe tusschen deze twee sommatien, waarvan de eerste of de laatste de eenvoudigste is, naarmate $a-d$ grooter of kleiner dan d, dat is naarmate a grooter of kleiner is dan $2d$.

8. Volgens de voorschriften van No. 4, zal men nu bij de toepassing van deze twaalf algemeene herleidingsintegralen, die de eerste schrede van onze methode uitmaakt, er allereerst op te letten hebben, dat de coefficienten A_n en B_n geschikt zijn voor ons doel; dat er namelijk in de tweede leden eenvoudige uitdrukkingen voorkomen. En hiertoe wordt vereischt, dat de sommatie van $d+1$ tot a, of althans die van 1 tot d gemakkelijk uit te drukken is, deze

laatste is wel is waar eindig, maar bestaat uit een aantal van d termen; dit aantal kan groot genoeg zijn, om naderhand veel last te veroorzaken.

De functien, wier ontwikkeling hier wel het meeste gemak zal geven, zijn

$$f_1(x) = \frac{r\,Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2} = \sum_1^\infty r^n\,Sin\,nsx\,,\quad f_2(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2} = 1 + 2\sum_1^\infty r^n\,Cos\,nsx\,,$$

$$f_2(x) = \frac{(1-r^2)\,r\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2} = r^2 + (1+r^2)\sum_1^\infty r^n\,Cos\,nsx;\ \ldots\ldots\ldots\ (z)$$

want hierbij behoort

$$\sum_0^\infty r^n\,Cos\,nqs = \frac{1-r\,Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\quad \sum_1^\infty r^n\,Cos\,nqs = \frac{r\,(Cos\,qs-r)}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},$$

$$\sum_1^k r^n\,Sin\,nqs = \frac{r\,Sin\,qs - r^k\,Sin\,kqs + r^{k+1}\,Sin\{(k-1)\,qs\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},$$

$$\sum_1^k r^n\,Cos\,nqs = \frac{r\,Cos\,qs - r^2 - r^k\,Cos\,kqs + r^{k+1}\,Cos\{(k-1)\,qs\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},$$

$$\sum_k^\infty r^n\,Sin\,nqs = r^k\,\frac{Sin\,kqs - r\,Sin\{(k-1)qs\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\quad \sum_k^\infty r^n\,Cos\,nqs = r^k\,\frac{Cos\,kqs - r\,Cos\{(k-1)qs\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2};\ \ldots\ (aa)$$

geldende voor $-1 < r < 1$. Daar a hier oneindig is, heeft men steeds $p < cs$; zoodat de gevallen, dat $p > cs$ of dat $p = cs$ is, hier niet kunnen voorkomen.

Voert men nu de reeksontwikkeling f_1 bij de vergelijkingen I en III in, de beide ontwikkelingen f_2 bij de vergelijking (II), en de tweede der ontwikkelingen (aa) bij de (IV_a), zoo komt er vooreerst

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \sum_1^\infty r^n\left[Sin\,nqs.\,Ci\,(nqs) - Cos\,nqs.\,Si\,(nqs)\right]\ \ldots\ldots\ (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \pi\sum_1^\infty r^n\,Sin\,nqs = \frac{\pi\,r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\ \ldots\ldots\ (2)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\,r\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}(1+r^2)\sum_1^\infty r^n\,Sin\,nqs = \frac{\pi}{2}\,\frac{(1+r^2)\,r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\ \ldots\ (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{r\,Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty r^n\,Cos\,nqs = -\frac{\pi\,r}{2}\,\frac{Cos\,qs-r}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\ \ldots\ (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{r\,(Cos\,sx-r)}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = \sum_1^\infty r^n\left[Cos\,nqs.\,Ci\,(nqs) + Sin\,nqs.\,Si\,(nqs)\right]\ \ldots\ldots\ (5$$

Voor de volgende integralen zal het hier in de bijzondere gevallen verkieselijk zijn, de niet herleide vormen te gebruiken, omdat in de herleidingsformulen (aa) alle sommatien gegeven

zijn, die daarbij voorkomen. Op deze wijze leveren de stellingen (V_b), (VI_d) en (VI_g), (VII) en (VIII), waar de beide laatste onafhankelijk zijn van het teeken van $p-ds$,

$$\int_0^\infty \frac{r\,Sin\,sx.Sin\,px}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq.\sum_1^d r^n\,Sin\,nqs-\frac{\pi}{2}Sin\,pq.\sum_{d+1}^\infty r^n\,Cos\,nqs=$$

$$=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq\frac{rSin\,qs-r^{d+1}Sin\{(d+1)qs\}+r^{d+2}Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}-\frac{\pi}{2}Sin\,pq.r^{d+1}\frac{Cos\{(d+1)qs\}-r\,Cos\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{-r\,Sin\,qs.Cos\,pq+r^{d+1}\,Sin\{(ds+s-p)q\}+r^{d+2}\,Sin\{(ds-p)q\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\ \left[d=\mathcal{E}\frac{p}{s},\text{ breuk}\right],\ .\ (6)$$

$$=\frac{\pi}{2}r\,Sin\,qs\frac{r^d-Cos\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2};\ \left[d=\mathcal{E}\frac{p}{s},\text{ geheel}\right];\ .\ .\ .\ (6_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\,Sin\,px}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq-\frac{\pi}{2}Cos\,pq.2\sum_1^d r^n\,Cos\,nqs+\frac{\pi}{2}Sin\,pq.2\sum_{d+1}^\infty r^n\,Sin\,nqs=$$

$$=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq-\pi Cos\,pq\frac{rCos\,qs-r^2-r^{d+1}Cos\{(d+1)qs\}+r^{d+2}Cos\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}+\pi Sin\,pq.r^{d+1}\frac{Sin\{(d+1)qs\}-rSin\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}=$$

$$=\pi\frac{-\frac{1}{2}(1-r^2)Cos\,pq+r^{d+1}\,Cos\{(ds+s-p)q\}-r^{d+2}\,Cos\{(ds-p)q\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\ \left[d=\mathcal{E}\frac{p}{s},\text{ breuk}\right],\ .\ .\ (7)$$

$$=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq-\frac{\pi}{2}Cos\,pq.2\sum_1^{d-1} r^n\,Cos\,nqs-\frac{\pi}{2}r^d\,Cos\,2pq+\frac{\pi}{2}Sin\,pq.2\sum_{d+1}^\infty r^n\,Sin\,nqs=$$

$$=-\frac{\pi}{2}Cos\,pq+\pi\,Cos\,pq\frac{r\,Cos\,qs-r^2-r^d\,Cos\,dqs+r^{d+1}\,Cos\{(d-1)qs\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}-\frac{\pi}{2}r^d\,Cos\,2pq+$$

$$+\pi\,Sin\,pq.r^{d+1}\frac{Sin\{(d+1)qs\}-r\,Sin\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}=\frac{\pi}{2}\frac{(1-r^2)(r^d-Cos\,pq)}{1-2r\,Cos\,qs+r^2};\left[d=\mathcal{E}\frac{p}{s},\text{geheel}\right].(7_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{r(1-r^2)\,Cos\,sx.Sin\,px}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}r^2\,Cos\,pq-\frac{\pi}{2}Cos\,pq.(1+r^2)\sum_1^d r^n\,Cos\,nqs+\frac{\pi}{2}Sin\,pq.(1+r^2)\sum_{d+1}^\infty r^n\,Sin\,nqs=$$

$$=-\frac{\pi}{2}r^2\,Cos\,pq-\frac{\pi}{2}Cos\,pq.(1+r^2)\frac{rCos\,qs-r^2-r^{d+1}Cos\{(d+1)qs\}+r^{d+2}Cos\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2}Sin\,pq.(1+r^2)\,r^{d+1}\frac{Sin\{(d+1)qs\}-r\,Sin\,dqs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{-(1-r^2)rCos\,pq.Cos\,qs+(1+r^2)r^{d+1}Cos\{(ds+s-p)q\}-(1+r^2)\,r^{d+2}Cos\{(ds-p)q\}}{1-2r\,Cos\,qs+r^2},\left[d=\mathcal{E}\frac{p}{s},\text{ breuk}\right],(8)$$

$$\int_0^\infty \frac{r(1-r^2)\, Cos\, sx . Sin\, px}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} r^2\, Cos\, pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq .(1+r^2) \sum_1^{d-1} r^n\, Cos\, nqs - \frac{\pi}{4}(1+r^2) r^d Cos\, 2pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq .(1+r^2) \sum_{d+1}^{\infty} r^n\, Sin\, nqs =$$

$$= -\frac{\pi}{2} r^2\, Cospq - \frac{\pi}{2}(1+r^2) Cospq \frac{r Cosqs - r^2 - r^d Cosdqs + r^{d+1} Cos\{(d-1)qs\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} - \frac{\pi}{4}(1+r^2) r^d Cos 2pq +$$

$$+ \frac{\pi}{2}(1+r^2) Sin\, pq . r^{d+1} \frac{Sin\{(d+1)qs\} - r\, Sin\, dqs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} = \frac{\pi}{2} r(1-r^2) \frac{-Cospq . Cosqs + \frac{1}{2} r^{d-1}(1+r^2)}{1-2r\, Cos\, qs + r^2}, \left[\begin{matrix} d = \mathcal{E}\frac{p}{s}, \\ \text{geheel} \end{matrix}\right]; . (8_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{r\, Sin\, sx . Sin\, px}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq . \sum_1^\infty r^n \Big[Sin\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} - Cos\, nqs . \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{2} Cos\, pq . \sum_1^\infty r^n \Big[Cos\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} + Sin\, nqs . \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} \Big]; \ldots \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\, Sin\, px}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{q dx}{q^2-x^2} = Sin\, pq . Ci\,(pq) - Cos\, pq . Si\,(pq) +$$

$$+ Sin\, pq . \sum_1^\infty r^n \Big[Sin\, nqs . \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} + Cos\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} \Big] -$$

$$- Cospq . \sum_1^\infty r^n \Big[Cos\, nqs . \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} - Sin\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} \Big]; . . \quad (10)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\, r\, Cos\, sx . Sin\, px}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{q dx}{q^2-x^2} = r^2 \Big[Sin\, pq . Ci\,(pq) - Cos\, pq . Si\,(pq) \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2) Sin\, pq . \sum_1^\infty r^n \Big[Sin\, nqs\, \{ Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q] \} + Cos\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q] \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{2}(1+r^2) Cos\, pq . \sum_1^\infty r^2 \Big[Cos\, nqs . \{ Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q] \} - Sin\, nqs . \{ Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q] \} \Big] \ldots \quad (11)$$

Bij de beide herleidingsintegralen (VI) en (VIII) zijn hier de beide vormen van $f_2\,(x)$ gebruikt. De integraal (6_a) is hier bijgevoegd, ter wille van de overeenkomst met de integralen (7_a) en (8_a): zij is echter uit (6) afgeleid, die voor $\frac{p}{s}$ geheel zoowel als breuk geldt, door $p = ds$ te stellen.

Wat betreft de volgende herleidingsformulen (IX) tot (XII), zal men evenzoo moeten te werk gaan als bij de vorige. Men zal daarvan, waar zulks te pas komt, liefst de niet herleide vormen gebruiken, omdat de sommatien in (*aa*) ons alsdan de noodige diensten bewijzen; men heeft dus hier toe te passen (IX_d) en (IX_g), (X_b), (XI) en (XII): vervolgens zullen ook hier beide waarden voor $f_2(x)$ kunnen gelden voor de herleidingsformulen (X) en (XII): eindelijk kan men ook, even als boven, alleen ter wille van de overeenkomst bij de integralen, die uit toepassing van (X_b) volgen, de bijzondere waarden bepalen voor het geval dat $d = \mathcal{E}\frac{p}{s}$ geheel, dus $p = ds$ is. Aldus verkrijgt men dan achtervolgens

$$\int_0^\infty \frac{r \, Sin\, sx.\, Cos\, px}{1 - 2\, Cos\, sx + r^2} \, \frac{x dx}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^\infty r^n \, Sin\, nqs - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_1^\infty r^n \, Cos\, nqs =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq \, \frac{r Sin\, qs - r^{d+1} Sin\{(d+1)qs\} + r^{d+2} Sin\, dqs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} - \frac{\pi}{2} Cos\, pq.\, r^{d+1} \frac{Cos((d+1)qs) - r Cos\, dqs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \, \frac{r\, Sin\, pq.\, Sin\, qs - r^{d+1}\, Cos\{(ds+s-p)q\} + r^{d+1}\, Cos\{(ds-p)q\}}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}, \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}, \text{ breuk}\right], \ldots \quad (12)$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq. \sum_1^{d-1} r^n \, Sin\, nqs - \frac{\pi}{4} r^d \, Cos\, 2pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. \sum_{d+1}^\infty r^n \, Cos\, nqs =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq \, \frac{r Sin\, qs - r^d Sin\, dqs + r^{d+1} Sin\{(d-1)qs\}}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} - \frac{\pi}{4} r^d Cos\, 2pq - \frac{\pi}{2} Cos\, pq. r^{d+1} \frac{Cos\{(d+1)qs\} - r\, Cos\, dqs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \, \frac{r\, Sin\, pq.\, Sin\, qs - \frac{1}{2} r^d (1 + r^2)}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}; \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}, \text{ geheel}\right], \ldots \quad (12_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1 - r^2)\, Cos\, px}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2} \, \frac{q dx}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} Sin\, pq + \frac{\pi}{2} Sin\, pq.\, 2 \sum_1^d r^n \, Cos\, nqs + \frac{\pi}{2} Cos\, pq.\, 2 \sum_{d+1}^\infty r^n \, Sin\, nqs =$$

$$= \frac{\pi}{2} Sin\, pq + \pi Sin\, pq \, \frac{r Cos\, qs - r^2 - r^{d+1} Cos\{(d+1)qs\} + r^{d+2} Cos\, dqs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} + \pi\, Cos\, pq.\, r^{d+2} \frac{Sin\{(d+1)qs\} - r\, Sin\, dqs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2} =$$

$$= \pi \, \frac{\frac{1}{2}(1 - r^2)\, Sin\, pq + r^{d+1}\, Sin\{(ds+s-p)q\} - r^{d+2}\, Sin\{(ds-p)q\}}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}, \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}\right], \quad (13)$$

$$= \pi \, \frac{\frac{1}{2}(1 - r^2)\, Sin\, dqs + r^{d+1}\, Sin\, qs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}; \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}, \text{ geheel}\right], \ldots \quad (13_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\, r\, Cos\, sx.\, Cos\, px}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{q dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2\, Sin\, pq + \frac{\pi}{2}(1+r^2)\, Sin\, pq. \sum_1^d r^n\, Cos\, nqs + \frac{\pi}{2}(1+r^2)\, Cos\, pq. \sum_{d+1}^\infty r^n\, Sin\, nqs =$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2\, Sin\, pq + \frac{\pi}{2}(1+r^2)\, Sin\, pq \frac{r\, Cos\, qs - r^2 - r^{d+1} Cos\{(d+1)qs\} + r^{d+2} Cos\, dqs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2}(1+r^2)\, Cos\, pq.\, r^{d+1} \frac{Sin\{(d+1)qs\} - r\, Sin\, dqs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1-r^2) r\, Cos\, qs.\, Sin\, pq + (1+r^2)\left[r^{d+1} Sin\{(ds+s-p)q\} - r^{d+2} Sin\{(ds-p)q\}\right]}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}, \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}\right], . \quad (14)$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1-r^2)\, r\, Cos\, qs.\, Sin\, dqs + (1+r^2)\, r^{d+1} Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}; \left[d = \mathcal{E}\frac{p}{s}, \text{ geheel}\right], \ldots \ldots \ldots \quad (14_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{r\, Sin\, sx.\, Cos\, px}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{q dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} Sin\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Sin\, nqs.\{Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q]\} + Cos\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\}\right] -$$

$$- \frac{1}{2} Cos\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Cos\, nqs.\{Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q]\} - Sin\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q]\}\right]; \ . \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\, Cos\, px}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{x dx}{q^2-x^2} = Cos\, pq.\, Ci(pq) + Sin\, pq.\, Si(pq) +$$

$$+ Sin\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Sin\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] - Ci[(ns-p)q]\} - Cos\, nqs.\{Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q]\}\right] +$$

$$+ Cos\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Cos\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\} + Sin\, nqs.\{Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q]\}\right]; \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-r^2)\, r\, Cos\, sx.\, Cos\, px}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{x dx}{q^2-x^2} = r^2 \left[Cos\, pq.\, Ci(pq) + Sin\, pq.\, Si(pq)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2) Sin\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Sin\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\} - Cos\, nqs.\{Si[(ns+p)q] - Si[(ns-p)q]\}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2) Cos\, pq. \sum_1^\infty r^n \left[Cos\, nqs.\{Ci[(ns+p)q] + Ci[(ns-p)q]\} + Sin\, nqs.\{Si[(ns+p)q] + Si[(ns-p)q]\}\right] . \quad (17)$$

Onder de hier voorkomende integralen zijn er enkele, die men reeds vindt in de *Nouvelles*

Tables d'Intégrales Définies, en wel bepaaldelijk de integralen (2), (3), (4), (7) en (13), in Table 193, N°. 1, 6, 2, 4 en 8 en de integralen (6), (8), (12) en (14) in Table 197, N°. 2, 6, 5 en 10.

9. Het meerendeel dezer integralen kan men nu gebruiken, om een nieuw stel algemeene herleidingsformulen af te leiden. Daartoe moet men de ontwikkelingen van N°. 2 bezigen

$$f_3'(x) = \sum_1^c C_m \, Sin\, mtx, \quad \ldots \quad (f) \qquad\qquad f_4(x) = D_0 + \sum_1^c D_m \, Cos\, mtx \quad \ldots \quad (g)$$

Stelt men toch in de integralen (6), (7), (8), (9), (10), (11) $p = mt$, dan verkrijgen zij alle onder het integraalteeken den factor $Sin\, mtx$, en kunnen zij dus voor de ontwikkeling (f) dienen; evenzoo hebben de volgende integralen (12), (13), (14), (15), (16), (17), voor dezelfde $p = mt$, den factor $Cos\, mtx$, zoodat zij nu geschikt zijn voor de ontwikkeling (g). Laat ons met het eerste stel beginnen en wel met het eerste drietal, dan moet men met C_m vermenigvuldigen en ten opzichte van m sommeeren van $m = 1$ tot $m = c$: omdat echter bij deze integralen al de sommatien zijn uitgewerkt en er dus geene n als ordegetal voorkomt, kan men bij deze bewerking gemakshalve m door n overal vervangen. Verder heeft men hier op het volgende te letten.

1°. Zoolang de grootste waarde van p, dat is hier natuurlijk ct, kleiner dan s blijft, is ook $d = 0$, want d is volgens de onderstelling het grootste geheele getal, dat begrepen is in $\frac{p}{s}$; men moet derhalve de waarden (7) en (8) gebruiken, met uitsluiting van (7_a) en (8_a).

2°. Wordt juist die grootste waarde van p, dat is d, gelijk aan s, zoo geldt het vorige voor de sommatie van $n = 1$ tot $n = c - 1$, maar voor $n = c$ verkrijgt men den overeenkomstigen term voor $d = 1$, en moet men dan ook, in tegenstelling met het vroegere, juist de integralen (7_a) en (8_a), niet de (7) en (8) daarbij gebruiken, om dien enkelen term, waarvan de coefficient C_c of D_c is, te vinden.

3°. Ligt verder ct tusschen s en $2s$, dat is, heeft men $s < ct < 2s$, zoo kunnen er twee gevallen plaats grijpen; s kan namelijk een veelvoud van t zijn, of niet. — Is vooreerst s gelegen tusschen twee opvolgende veelvouden van t, dat is $kt > s < (k+1)t$: zoo verkrijgt men eerst de sommatie van 1°, van $n = 1$ tot $n = k$, waarbij dan $d = 0$ is; daarop volgt eene tweede sommatie van $n = k + 1$ tot $n = c$, waarbij nu $d = 1$ is geworden; bij beide sommatien behoort men de integralen (7) en (8) te gebruiken, niet de andere (7_a) en (8_a). — Is ten tweede s juist een veelvoud van t, dat is $s = kt$, waarbij nu $k < c$, zoo heeft men eerst de sommatie van 1° te nemen, voor $n = 1$ tot $n = k - 1$, met $d = 0$ en de integralen (7) en (8), dan den lossen term van 2°, voor $n = k$, met $d = 1$ en de integralen (7_a) en (8_a), en vervolgens eene tweede sommatie voor $n = k + 1$ tot $n = c$, even als boven, waarbij nu $d = 1$ is, en wederom de integralen (7) en (8) moeten gelden.

4°. Wordt ct juist het dubbel van s, dat is $ct = 2s$, dan moet men wederom onderscheid maken tusschen de beide gevallen, dat s een veelvoud is van t, of niet. — In het laatste geval ligge s tusschen twee opvolgende veelvouden van t in, dat is $kt < s < (k+1)t$, dan heeft men de sommatie

van 1° te nemen voor $n=1$ tot $n=k$, vervolgens die van 3° voor $n=k+1$ tot $n=c-1$; terwijl er eindelijk nog een losse term bij te voegen is, met den coefficient C_c, waarvoor $d=2$ is, en de integralen (7_a) en (8_a) te gebruiken zijn. — Is daarentegen s juist een veelvoud van t, dat is $s=kt$, zoo moet men de sommatie van 1° nemen voor $n=1$ tot $n=k-1$, vervolgens den term, die tot coefficient heeft C_k, berekenen naar het voorschrift van 2°; dan weder eene tweede sommatie nemen, zooals in 3°, voor $n=k+1$ tot $n=c-1$, en eindelijk dien lossen term, die C_c tot coefficient heeft, even als boven bepalen.

5°. Wanneer ct grooter is dan het dubbel, en kleiner dan het drievoud van s, dat is $2s<ct<3s$, zijn er vier verschillende gevallen te onderscheiden. — Ten eerste zij s niet juist een veelvoud van t, maar tusschen twee opvolgende veelvouden gelegen, dat is $kt<s<(k+1)t$, dan kan ook nog $2s$ al of niet een veelvoud van t zijn: $2s$ moet natuurlijk liggen tusschen $2kt$ en $(2k+2)t$. Onderstel dus hier, dat zij gelegen is tusschen $2kt$ en $(2k+1)t$; dan is tegelijk $kt<s<(k+1)t$, $2kt<2s<(2k+1)t$, waarbij echter de eerste ongelijkheid reeds in de tweede begrepen is. Hier heeft men dus eerst eene sommatie, zoo als in 1°, voor $n=1$ tot $n=k$, eene tweede sommatie, zoo als in 3°, voor $n=k+1$ tot $n=2k$, en eindelijk eene derde sommatie voor $n=2k+1$ tot $n=c$, waarbij $d=2$ is geworden, en de integralen (7) en (8) zelve gelden. — In het tweede geval zij ook wel $kt<s<(k+1)t$, maar $(2k+1)t<2s<2(k+1)t$, dan blijft alles hetzelfde, behalve dat de tweede sommatie moet loopen van $n=k+1$ tot $n=2k+1$, en de derde van $n=2k+2$ tot $n=c$. — Ten derde zij wel, even als tot nu toe $kt<s<(k+1)t$, maar tevens $2s$ juist een veelvoud van t, dan kan dit veelvoud, omdat immers $2kt<2s<(2k+2)t$ moet zijn, niets anders zijn dan $(2k+1)t$. In dit geval heeft men weder eene eerste sommatie, zoo als in 1°, voor $n=1$ tot $n=k$, en eene tweede sommatie, zoo als die in 3°, voor $n=k+1$, tot $n=2k$: daarop volgt dan voor $n=2k+1$ een losse term met de coefficient C_{2k+1}, waarvoor $d=2$ is en de integralen (7_a) en (8_a) alleen kunnen gelden: eindelijk komt de derde sommatie van daar straks er bij, voor $n=2k+2$ tot $n=c$. — In het vierde geval zij s juist een veelvoud van t bijv. $s=kt$, dan is ook juist $2s=2kt$: alsnu moet men de sommatie van 1° slechts nemen van $n=1$ tot $n=k-1$: dan volgt een term voor $n=k$, naar 2° met de coefficient C_k, waarvoor $d=1$ is, en de integralen (7_a) en (8_a) gelden; nu loopt de tweede sommatie van 3° van $n=k+1$ tot $n=2k-1$: en komt er weder een losse term voor $n=2k$ naar 4° met de coefficient C_{2k}, waarvoor dan $d=2$ is: eindelijk heeft men de derde sommatie, even als boven, voor $n=2k+1$ tot $n=c$.

6°. Wanneer ct nog grooter wordt, is de weg nu genoegzaam van zelf aangewezen. Zij $ct=ls+s'$, waar $s'<s$. Alsdan moet men in den regel de sommatie verdeelen in $l+1$ andere, waarbij telkens achtereenvolgens $d=0, =1, =2, \ldots =l$ te nemen is, en die in het algemeen loopen van het eene veelvoud van k tot het volgende veelvoud van k, dat is voor $n=\lambda k$ tot $n=(\lambda+1)k$: hierbij beteekent k het grootste geheele getal, dat in $\frac{s}{t}$ begrepen is; zij wordt dus bepaald door de ongelijkheid $kt<s\leqq(k+1)t$, of ook wel door de gebruikte notatie $k=\mathcal{E}\frac{s}{t}$. Maar men moet er hier op letten, of voor eenige $n=\mu k$, ook μkt gelijk wordt aan s of aan

een veelvoud daarvan. Zoodra toch zulks het geval is, moet men dien term, die tot coefficient heeft $C_{\mu k}$, afzonderlijk nemen met de waarde van d, die bij de eerstvolgende sommatie behoort, en alsdan daarbij ook de integralen (7_a) en (8_a) gebruiken met uitsluiting der (7) en (8), die voor de overige sommatien blijven gelden.

10. Past men nu onze methode toe op de integraal (6), met inachtneming van de voorschriften, die wij in N°. 9 hebben opgespoord, zoo komt er achtervolgens

$$\int_0^\infty f_s(x)\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{-\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(Sin\,qs-Sin\,qs+r.\,0)\sum_1^c C_n\,Cos\,ntq+(Cos\,qs-r)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq=\frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q),\quad [ct<s],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\sum_1^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+C_c\,(-Sin\,qs.\,Cos\,qs+r\,Sin\,qs-r^2.\,0)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\left[\sum_1^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+C_c\,Sin\,qs\right]=\frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q),\qquad [ct=s],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq-(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Cos\,ntq-\right.$$

$$\left.-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,ntq\right]=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq-\right.$$

$$\left.-Sin\,qs.\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n\,Cos\,ntq+Cos\,qs.\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,ntq\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\,f_s(q)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}\right],\quad [s<ct<2s,\ kt<s<(k+1)t],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\sum_1^{k-1}C_n\,Sin\,ntq+C_k(-Sin\,qs.\,Cos\,qs+r\,Sin\,qs-r^2.\,0)-\right.$$

$$\left.-(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Cos\,ntq-r\,(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,ntq\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+C_k.\,0\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}\right],\quad [kt=s<ct<2s],$$

$$\int_0^\infty f_3(x)\,\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq-(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r\,(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+C_c\,Sin\,qs\,(r^2-Cos\,2qs)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\{(nt-s)q\}+C_c\,.\,0\Big]$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,f_3(q)+\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\{(nt-s)q\}\Big],\quad\Big[ct=2s,\ k=\mathcal{E}\,\frac{(c-1)t}{s}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq-Sin\,qs.\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r\,(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Sin\,ntq-(Sin\,qs-r^2\,Sin\,3qs+r^3\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r^2\,(Cos\,3qs-r\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{2}C_n\,Sin\{(nt-s)q\}-$$

$$-(Sin\,qs-r^2\,Sin\,3qs+r^3\,Sin\,qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq+(Cos\,qs-r-r^2\,Cos\,3qs+r^3\,Cos\,qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,f_3(q)+\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Sin\{(nt-s)q\}+$$

$$+\frac{1}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\sum_{2k+1}^{c}C_n\,[Sin\{(nt-s)q\}-r\,Cos\,ntq+r^2\,Sin\{(3s-nt)q\}+r^3\,Sin\{(nt-2s)q\}]\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,f_3(q)+\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Sin\{(nt-s)q\}+\sum_{2k+1}^{c}C_n\,[Sin\{(nt-s)q\}+r\,Sin\{(nt-2s)q\}]\Big]$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,f_3(q)+\sum_{k+1}^{c}C_n\,Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Sin\{(nt-2s)q\}\Big],$$

$$[2s<ct<3s,\ 2kt<2s<(2k+1)t].$$

$$\int_0^\infty f_s(x)\frac{Sin\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq - Sin\,qs.(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{2k+1}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{2k+1}C_n\,Sin\,ntq-(Sin\,qs-r^2\,Sin\,3qs+r^2\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r^2(Cos\,3qs-r\,Cos\,2qs)\sum_{2k+2}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)f_s(q)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big\{\sum_{k+1}^{2k+1}C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+$$

$$+\sum_{2k+2}^{c}C_n\big[Sin\{(nt-s)q\}-r\,Sin\{(nt-2s)q\}\big]\Big\}\Big]=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+$$

$$+\sum_{k+1}^{c}C_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{c}C_n\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\(2k+1)t<2s<2(k+1)t\end{matrix}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq - Sin\,qs.(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Cos\,ntq-$$

$$-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{2k}C_n\,Sin\,ntq+C_{2k+1}\,Sin\,qs.(r^2-Cos\,2qs)-$$

$$-(Sin\,qs-r^2\,Sin\,3qs+r^3\,Sin\,2qs)\sum_{2k+2}^{c}C_n\,Cos\,ntq-r^2(Cos\,3qs-r\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{2k+1}C_n\,Sin\,\{(nt-s)q$$

$$+C_{2k+1}.0+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{2k+2}^{c}C_n\,\{Sin\,\{(nt-s)q\}+r\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^{c}C_nSin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{c}C_nSin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[(2k+1)t=2s<ct<3s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^{k-1}C_n\,Sin\,ntq+C_k(-Sin\,qs.Cos\,qs+r\,Sin\,qs-0)-$$

$$-(Sin\,qs-r^2\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k-1}C_n\,Cos\,ntq-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{2k-1}C_n\,Sin\,ntq+C_{2k}\,Sin\,qs.(r^2-Cos\,2qs)+$$

$$+(Sin\,qs-r^2\,Sin\,3qs+r^3\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq-r^2(Cos\,3qs-r\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]$$

$$\int_0^\infty f_s(x)\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq+C_k.0+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c C_n Sin\{(nt-s)q\}+$$

$$+C_{2k}.\,0+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{2k+1}^c C_n\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+1}^c C_n Sin\{(nt-2s)q\}\Big].\,\big[2\,kt=2s<ct<3s\big].$$

Tot goed verstaan der herleidingen, die hier achtereenvolgens op de verschillende formulen worden toegepast, merke men op, dat telkens eerst naar de voorschriften van N°. 9 is ontwikkeld; daarop de eerste sommatie van $n=1$ tot $n=k-1$ of tot $n=k$ is uitgebreid tot de volledige, die loopt van $n=1$ tot $n=c$, volgens de identische formule $\sum\limits_1^k=\sum\limits_1^c-\sum\limits_{k+1}^c$. Daardoor kwamen de af te trekken sommatien onder denzelfden vorm te staan als die, welke op de eerste volgde, of wel deze laatste konde althans evenzoo tot den vorm $\sum\limits_{k+1}^c$ worden herleid. En zoo gaat men voort tot aan het einde der formule toe. Komen er wegens de grensvoorwaarden, die voor k en c gelden, oorspronkelijk losse termen voor, met de coefficient C_c, zoo moeten bij de voornoemde herleidingsformule deze termen natuurlijk ook afzonderlijk worden gehouden. Bij elk volgend bijzonder geval ten opzichte der betrekkingen tusschen s en t mogt al dadelijk worden gebruik gemaakt van de uitkomsten, die de vorige gevallen na de herleiding opleverden, en dat wel alleen ter bespoedigde vereenvoudiging.

Bij de hier naauwkeurig behandelde algemeene integraal zag men, dat de uitkomst voor $s<ct<2s$ dezelfde bleef, hetzij $kt<s<(k+1)t$, hetzij $kt=s$ was; daarom behoefde er ook later voor grootere ct tusschen beide gevallen geen onderscheid meer te worden gemaakt. Vergelijkt men nu al de verkregen uitkomsten, negen in getal, met elkander, zoo blijkt het, dat er slechts vier onderling verschillen, zoodat men ten slotte heeft, — wanneer men onderstelt $k=\mathcal{E}\frac{s}{t}$, hetzij s juist een veelvoud is van t of niet.

$$\int_0^\infty f_s(x)\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q),\ \big[ct\leqq s\big],\,\ldots\ldots\ldots\ (XIII_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\{(nt-s)q\}\Big],\ \big[kt\leqq s<ct\leqq 2s\big],\,\ldots\ldots\ (XIII_b)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2rCos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+1}^c C_n Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ 2kt\leqq 2s<(2k+1)t\end{matrix}\Big],.\ (XIII_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2rCos\,qs+r^2}f_s(q)+\sum_{k+1}^c C_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^c C_n Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ (2k+1)t<2s<2(k+1)t\end{matrix}\Big].(XIII_d)$$

Uit het zamenvallen der waarden voor meer dan een der verschillende gevallen, blijkt het genoegzaam, dat onze herleidingsintegraal tot de zeer eenvoudige van deze soort behoort, en toch worden reeds in de beide laatste gevallen (XIII_c) en (XIII_d) de uitkomsten zeer zamengesteld; men ziet daarenboven gemakkelijk in, dat voor grootere waarden van ct, er langzamerhand nog meer termen in het tweede lid der vergelijking zullen verschijnen. In het vervolg zullen wij dus alleen de herleidingsformulen nagaan, zoolang $ct \leqq 2s$ blijft.

11. Gaan wij over tot de integralen (7) en (7_a), en letten wij op de voorschriften van N°. 2, zoo verkrijgen wij.

$$\int_0^\infty f_3(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[\{-\tfrac{1}{2}(1-r^2)+r\,Cos\,qs-r^2\}\sum_1^c C_n\,Cos\,ntq+r(Sin\,qs-r.0)\sum_1^c C_n Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\sum_1^c C_n Sin\,ntq-\tfrac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c C_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-\tfrac{1}{2}\{f_4(q)-C_0\}\Big],\quad [ct<s],\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(XIV_a)$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[-\tfrac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c-1}C_n Cos\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^{c-1}C_n Sin\,ntq+\tfrac{1}{2}C_c(1-r^2)(r-Cos\,qs)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\sum_1^c C_n Sin\,ntq-\tfrac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c C_n Cos\,ntq+C_c\{r^2\,Cos\,qs-\tfrac{1}{2}(1+r^2)r\}\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-\tfrac{1}{2}\{f_4(q)-C_0+rC_c\}\Big],\quad [ct=s],\;\ldots\ldots\ldots\;(XIV_b)$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[-\tfrac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k C_n\,Cos\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^k C_n\,Sin\,ntq+$$

$$+\{-\tfrac{1}{2}(1-r^2)+r^2\,Cos\,2qs-r^3\,Cos\,qs\}\sum_{k+1}^c C_n\,Cos\,ntq+r^2(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[-\tfrac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs-r^2)\sum_1^c C_n Cos\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq-(r\,Cos\,qs-2r^2\,Cos^2\,qs+$$

$$+r^3\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^c C_n\,Cos\,ntq+(r^2\,Sin\,2qs-r^3\,Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-\tfrac{1}{2}\{f_4(q)-C_0\}-r\sum_{k+1}^c C_n Cos\{(nt-s)q\}\Big],\quad\Big[\begin{matrix}s<ct<2s,\\ kt<s<(k+1)t\end{matrix}\Big],\;..\;(XIV_c)$$

$$\int_0^\infty f_3(x)\,\frac{1-r^2}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r\,\mathrm{Sin}\,qs.\sum_1^{k-1}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq+\frac{1}{2}C_k(1-r^2)(r-\mathrm{Cos}\,qs)+$$

$$+\Big\{-\frac{1}{2}(1-r^2)+r^2\,\mathrm{Cos}\,2qs-r^3\,\mathrm{Cos}\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r^2(\mathrm{Sin}\,2qs-r\,\mathrm{Sin}\,qs)\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r\,\mathrm{Sin}\,qs.\sum_1^{c}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq+$$

$$+\Big\{-\frac{1}{2}(1+r^2)r+r^2\,\mathrm{Cos}\,qs\Big\}C_k-r(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,\{(nt-s)q\}\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,\mathrm{Sin}\,qs}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}f_3(q)-\frac{1}{2}\{f_4(q)-C_0+r\,C_k\}-r\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\{(nt-s)q\}\Big],\ [kt=s<ct<2s]\ ..(\mathrm{XIV}_d)$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_1^{k}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r\,\mathrm{Sin}\,qs.\sum_1^{k}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq+$$

$$+\Big\{-\frac{1}{2}(1-r^2)+r^2\mathrm{Cos}2qs-r^3\mathrm{Cos}\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{c}C_n\mathrm{Cos}\,ntq+r^2(\mathrm{Sin}\,2qs-r\,\mathrm{Sin}\,qs)\sum_{k+1}^{c}C_n\mathrm{Sin}\,ntq+\frac{1}{2}C_c(1-r^2)(r^2-\mathrm{Cos}2qs)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r\,\mathrm{Sin}\,qs.\sum_1^{c}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq-$$

$$-r(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,\{(nt-s)q\}+\frac{1}{2}r^2(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\,C_c\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,\mathrm{Sin}\,qs}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}f_3(q)-\frac{1}{2}\{f_4(q)-C_0+r^2C_c\}-r\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,\{(nt-s)q\}\Big],$$

$$[ct=2s,\ kt<s<(k+1)t]\ .\ .\ .\ (\mathrm{XIV}_e)$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\mathrm{Cos}qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\mathrm{Cos}qs+r^2)\sum_1^{k-1}C_n\mathrm{Cos}\,ntq+r\mathrm{Sin}qs.\sum_1^{k-1}C_n\mathrm{Sin}\,ntq+\frac{1}{2}C_k(1-r^2)(r-\mathrm{Cos}\,qs)-$$

$$-\Big\{-\frac{1}{2}(1-r^2)+r^2\,\mathrm{Cos}\,2qs-r^3\,\mathrm{Cos}\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r^2(\mathrm{Sin}\,2qs-r\,\mathrm{Sin}\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,\mathrm{Sin}\,ntq+$$

$$+\frac{1}{2}C_c(1-r^2)(r^2-\mathrm{Cos}\,2qs)\Big]=\frac{\pi}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}\Big[-\frac{1}{2}(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,ntq+r\mathrm{Sin}\,qs.\sum_1^{c}C_n\mathrm{Sin}\,nt\cdots$$

$$-\frac{1}{2}rC_k(1+r^2-2r\,\mathrm{Cos}\,qs)-r(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\{(nt-s)q\}-\frac{1}{2}r^2C_c(1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2)\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,\mathrm{Sin}\,qs}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,qs+r^2}f_3(q)-\frac{1}{2}\{f_4(q)-C_0+r\,C_k+r^2\,C_c\}-r\sum_{k+1}^{c}C_n\,\mathrm{Cos}\,\{(nt-s)q\}\Big],$$

$$[ct=2s,\ kt=s]\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{XIV}_f)$$

In dit geval verkreeg men verschillende uitkomsten, toen ct grooter was dan s en tevens kleiner dan $2s$, naarmate s gelegen was tusschen twee opvolgende veelvouden van t, tusschen kt en $(k+1)t$, of dat s juist een veelvoud van t was, $s = kt$: men was dus verplicht, dezelfde verschillende toestanden te onderscheiden, bij het grooter worden van ct, wanneer namelijk $ct = 2s$ werd. Maar nu bleek ook tevens, dat men in al deze onderscheidene gevallen werkelijk verschillende uitkomsten verkreeg, en dat dus, als men ct grooter dan $2s$ maar toch kleiner dan $3s$ ondersteld had, voor elken der verschillende toestanden, in N°. 9 nagegaan, ook verschillende uitkomsten zoude verkrijgen. Daarom is het onderzoek der herleidingsformule niet verder voortgezet en slechts beperkt tot de gevallen, dat $ct \leqq 2s$ is; zoo als trouwens reeds in N°. 10 het voornemen bleek te zijn.

Overigens valt er omtrent de herleidingen, waaraan de eerst verkregen waarden in elk geval telkens onderworpen worden, slechts te herinneren aan hetgeen te dien opzichte in N°. 10 is opgemerkt.

12. Lettende altijd op de voorschriften, in N°. 9 ontwikkeld, zullen wij door middel der integralen (8) en (8_a) achtervolgens verkrijgen.

$$\int_0^\infty f_3(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[\{-(1-r^2)Cos\,qs+(1+r^2)(Cos\,qs-r)\}\sum_1^c C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)(Sin\,qs-0)\sum_1^c C_n\,Sin\,ntq\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\{f_4(q)-C_0\}\Big],\quad [ct<s],\ \ldots\ldots\ldots \quad (XV_a)$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c-1}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+C_c(1-r^2)\{-Cos^2qs+\tfrac{1}{2}(1+r^2)\}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^{c}C_n\,Sin\,ntq-\tfrac{1}{2}C_c(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\Big\{f_4(q)-C_0+\frac{1+r^2}{2r}C_c\Big\}\Big],\quad [ct=s],\ \ldots\ldots\ldots \quad (XV_b)$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{k}C_n\,Sin\,ntq\,+$$

$$+\{-(1-r^2)Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,r(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{c}C_n\,Sin\,ntq\,-$$

$$-(1+r^2)\,Cos\,qs.(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq-(1-2r\,Cos\,qs+r^2)(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_{k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\{f_4(q)-C_0\}-(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}\Big],\quad \Big[{s<ct<2s, \atop kt<s<(k+1)t}\Big],\ \ldots \quad (XV_c)$$

$$\int_0^\infty f_3(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{k-1}C_n\,Sin\,ntq+$$

$$+C_k(1-r^2)\Big\{-Cos^2\,qs+\frac{1}{2}(1+r^2)\Big\}+\Big\{-(1-r^2)\,Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\Big\}\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\,ntq+$$

$$+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Sin\,ntq\Big]=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq+$$

$$+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq-\frac{1}{2}C_k(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)-(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\Big\{f_4(q)-C_0+\frac{1+r^2}{2r}C_k\Big\}-(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}\Big],\ [kt=s<ct<2s],\ (XV_d)$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{k}C_n\,Sin\,ntq+$$

$$+\Big\{-(1-r^2)\,Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\Big\}\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,r(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1-r^2)\,C_c\Big\{-Cos\,2qs.\,Cos\,qs+\frac{1}{2}r(1+r^2)\Big\}\Big]=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq+$$

$$+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^{c}C_n\,Sin\,ntq-(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}-\frac{1}{2}rC_c(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\Big\{f_4(q)-C_0+\frac{1}{2}(1+r^2)C_c\Big\}-(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}\Big],\Big[ct=2s,kt<s<(k+1)t\Big],(XV_e)$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{k-1}C_n\,Sin\,ntq+$$

$$+C_k(1-r^2)\Big\{-Cos^2\,qs+\frac{1}{2}(1+r^2)\Big\}+\Big\{-(1-r^2)\,Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\Big\}\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Cos\,ntq+$$

$$+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}C_n\,Sin\,ntq+(1-r^2)\,C_c\Big\{-Cos\,2qs.\,Cos\,qs-\frac{1}{2}r(1+r^2)\Big\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[-r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}C_n\,Cos\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^{c}C_n\,Sin\,ntq-$$

$$-\frac{1}{2}C_k(1+r^2)-(1-2r\,Cos\,qs+r^2)-(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}-\frac{1}{2}rC_c(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_3(q)-r\Big\{f_4(q)-C_0+\frac{1+r^2}{2r}C_k+\frac{1}{2}(1+r^2)C_c\Big\}-(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}C_n\,Cos\{(nt-s)q\}\Big],\Big[ct=2s,kt=s\Big].(XV_f)$$

Dat dit geval tot dezelfde verscheidenheid van uitkomsten aanleiding geven zoude, was wel te vermoeden; immers zoowel de integralen (8) en (8_a), die hier gebruikt worden, stammen van dezelfde herleidingsformule (VI) af als de integralen (7) en (7_a), die in het vorige N°. 11 tot hetzelfde doel hebben gediend. Er valt dus ook omtrent deze uitkomsten slechts hetzelfde op te merken, als omtrent die van N° 11; terwijl de toegepaste herleidingsmethode dezelfde is als die, welke in N°. 10 werd uiteengezet. Om dezelfde reden als vroeger is ook hier het onderzoek gestaakt bij $ct = 2s$: wanneer men toch ct grooter onderstelde, worden de uitkomsten meer en meer zamengesteld.

13. Geheel anders is het, wanneer men de integralen (9), (10) en (11) bezigt; immers hierbij was geen sprake van verschil in hare waarden, naarmate van het teeken van $ns - p$, — wanneer men slechts let op de gestelde voorwaarde (α) dat $\frac{p}{s}$ niet een geheel getal mag wezen: en dus ook blijft de waarde van de algemeene integraal dezelfde, en verandert niet met de betrekkelijke waarde van ct of eenig kleiner produkt kt ten opzichte van s of in het algemeen van ls. Men lette er op, dat deze integralen nog alle eene sommatie ten opzichte van n bevatten: en dat dus de nieuwe sommatie ten opzichte van t hier, zoo als oorspronkelijk werd aangegeven, ten opzichte van m moet geschieden. Men verkrijgt alzoo dadelijk algemeen.

$$\int^{\infty} f_3(x) \frac{Sin\, sx}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x\,dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^c C_m\, Sin\, mtq. \sum_1^{\infty} r^{n-1} \left[Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q] \} - Cos\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q] \} \right] -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_1^c C_m\, Cos\, mtq. \sum_1^{\infty} r^{n-1} \left[Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q] \} - Sin\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q] \} \right]; \quad \text{(XVI)}$$

$$\int_0^{\infty} f_3(x) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{q\,dx}{q^2 - x^2} = \sum_1^c C_m \left[Sin\, mtq.\, Ci(mtq) - Cos\, mtq\, Si(mtq) \right] +$$

$$+ \sum_1^c C_m\, Sin\, mtq. \sum_1^{\infty} r^n \left[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q] \} + Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q] \} \right] -$$

$$- \sum_1^c C_m\, Cos\, mtq. \sum_1^{\infty} r^n \left[Cos\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q] \} + Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q] \} \right]; \quad \text{(XVII)}$$

$$\int_0^{\infty} f_3(x) \frac{(1 - r^2)\, Cos\, sx}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{q\,dx}{q^2 - x^2} = r\sum_1^c C_m \left[Sin\, mtq.\, Ci(mtq) - Cos\, mtq.\, Si(mtq) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c C_m\, Sin\, mtq. \sum_1^{\infty} r^{n-1} \left[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q] \} + Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q] \} \right] -$$

$$- \frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c C_m\, Cos\, mtq. \sum_1^{\infty} r^{n-1} \left[Cos\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q] \} + Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q] \} \right]. \quad \text{(XVIII)}$$

Zoo als gezegd is, behoefde men hier geen onderscheid te maken tusschen de verschillende betrekkingen tusschen ct en s, wat hare waarden betreft; maar daar tegenover staat, dat men nu bij de dubbele sommatie of bij het opmaken der dubbelreeks, telkens de integraalsinus of de integraalcosinus, wanneer haar argument negatief wordt, tot eene dergelijke functie te herleiden heeft, waarbij het argument omgekeerd positief is geworden. Verdere herleiding der uitkomsten schijnt hier niet wel mogelijk, omdat er nog te weinig bekend is omtrent de theorie van deze beide transcendente functien.

14. Thans zijn wij genaderd tot het tweede stelsel integralen (12) tot (17), die bij de substitutie $p = mt$ alle den factor $Cos\, mtx$ bezitten. Ook dit stelsel is in twee hoofdafdeelingen te scheiden: de drie eerste (12), (13) en (14), en de drie laatste (15), (16) en (17). Bij het eerste drietal zijn wederom alle sommatien uitgewerkt, hetgeen bij het tweede drietal niet het geval is; derhalve komt bij het eerste drietal geen ordegetal n meer voor, en kan men gemakshalve de m, die hier bij de toepassing wordt ingevoerd, weder door n vervangen, en dan ten opzichte van die n sommeeren, van $n = 1$ tot aan $n = c$.

Ten aanzien van hetgeen er gebeurt, als ct kleiner dan s is of daaraan gelijk wordt; wanneer ct, grooter dan s zijnde, al of niet tot $2s$ klimt, en zoo vervolgens; waarbij dan, behalve in de beide eerste gevallen, daarop te letten is, of s, en evenzoo $2s$, en zoo voorts, juist een veelvoud van k is, of ook tusschen twee achtereenvolgende veelvouden van k gelegen is; — daaromtrent blijven hier de voorschriften, in N^0. 9 gegeven, in hun geheel gelden. Het eenig onderscheid toch, dat er hier voorkomt, is het vervangen van $Sin\, mtq$ door $Cos\, mtq$, en dit heeft op de redeneering van N°. 9 geenerlei invloed.

Maar hier vertoont zich eene geheel andere bijzonderheid, die zijn oorsprong heeft in het gebruik van de ontwikkeling $f_4(x)$: deze bevat toch onder het integraalteeken eene functie van den vorm $\varphi(x)\, Cos\, px$, en nu bedenke men, dat telkens de D_0 de coefficient wordt van eene afzonderlijke integraal $\int_0^\infty \varphi(x)\, dx$, die buiten het sommatie-teeken staat. Zij moet dus telkens afzonderlijk worden bepaald, en daartoe behoort men bij ons drietal achtereenvolgens zijn toevlucht te nemen tot de integralen (4), (2) en (3), in N°. 8 afgeleid. De uitkomsten, op die wijze verkregen, vertoonen zich dus het eerst, afgescheiden van de sommatien, die daarop moeten volgen; op haar oefenen natuurlijk in geen geval de verschillende betrekkingen, die er tusschen ct en s mogten ontstaan, eenigen invloed uit: deze losse, alleenstaande integraal behoudt dus bij iedere herleidingsformule altijd dezelfde waarde.

15. Naar deze opmerkingen en de hier herinnerde voorschriften van N°. 9, verkrijgt men door de toepassing van de integralen (12) en (12_a).

$$\int_0^\infty f_4(x) \frac{Sin\, sx}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1 - 2r\, Cos\, qs + r^2)}\Big[D_0(r - Cos\, qs) + (Sin\, qs - Sin\, qs + 0)\sum_1^c D_n\, Sin\, ntq - (Cos.qs - r)\sum_1^c D_n Cos\, ntq\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2(1 - 2r\, Cos\, qs + r^2)}(r - Cos\, qs)(D_0 + \sum_1^c D_n Cos\, ntq) = \frac{\pi}{2}\frac{r - Cos\, qs}{1 - 2r Cos\, qs + r^2} f_4(q), \; [ct < s] \,.\, (XIX_a)$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{Sin\, sx}{1-2r\,Cos\, sx+r^2}\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[D_0(r-Cos\,qs)+(Cos\,qs-r)\sum_1^{c-1}D_n\,Cos\,ntq+D_c\left\{Sin^2qs-\frac{1}{2}(1-r^2)\right\}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\left[(r-Cos\,qs)(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+\frac{1}{2}D_c(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}D_c\right],\quad [ct=s],\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (XIX_b)$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(r-Cos\,qs)-(Cos\,qs-r)\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,Sin\,qs.\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,Cos\,qs.\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\left\{(nt-s)q\right\}\right],\ \left[\begin{matrix}s<ct<2s,\\ kt<s<(k+1)t\end{matrix}\right],\ \ldots\ (XIX_c)$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(r-Cos\,qs)-(Cos\,qs-r)\sum_1^{k-1}D_n\,Cos\,ntq+D_k\left\{Sin^2\,qs-\frac{1}{2}(1-r^2)\right\}+$$

$$+(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+$$

$$+\frac{1}{2}D_k(1-2r\,Cos\,qs+r^2)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\left\{(nt-s)q\right\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}D_k+\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\left\{(nt-s)q\right\}\right],\ [kt=s<ct<2s],\ .\ (XIX_d)$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(r-Cos\,qs)-(Cos\,qs-r)\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+(Sin\,qs-r\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Sin\,ntq-$$

$$-r(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Cos\,ntq+C_c\left\{Sin\,2qs.\,Sin\,qs-\frac{1}{2}r(1-r^2)\right\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\left\{(nt-s)q\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}D_c r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big]=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\left\{(nt-s)q\right\}+\frac{1}{2}D_c r\right],\left[\begin{matrix}ct=2s,\\ kt<s<(k+1)t\end{matrix}\right],\ (XIX_e)$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{Sin\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(r-Cos\,qs)-(Cos\,qs-r)\sum_1^{k-1}D_n\,Cos\,ntq+D_k\{Sin^2\,qs-\frac{1}{2}(1-r^2)\}+$$

$$+(Sin\,qs-r\,Sin\,2\,qs+r^2\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Sin\,ntq-r^2\,(Cos\,2qs-r\,Cos\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+C_c\{Sin\,2qs.\,Sin\,qs-\frac{1}{2}r\,(1-r^2)\}\Big]=\frac{\pi}{2\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(r-Cos\,qs)\,D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\frac{1}{2}D_k(1-2r\,Cos\,qs+r^2)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n Cos\{(nt-s)q\}+\frac{1}{2}D_c r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}(D_k+r\,D_c)+\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,\{(nt-s)\,q\}\Big].\begin{bmatrix}ct=2s,\\ kt=s\end{bmatrix}\quad .\quad (XIX_f)$$

Hier ziet men, dat er voor elke bijzondere betrekking tusschen *ct* en *s*, ook eene bijzondere waarde voor onze algemeene integraal wordt gevonden, zoodat er hier geene zamentrekking van meer uitkomsten tot eene kan plaats hebben. Maar daaruit volgt dan ook tevens, dat eene verdere beschouwing voor het geval dat *ct* grooter was dan $2s$, en bijv. kleiner dan $3s$, hier tot telkens onderling verschillende uitkomsten zoude aanleiding geven: vandaar, dat die beschouwingen zijn achterwege gelaten, om niet tot uitkomsten te geraken, die al te zamengesteld zouden worden.

Ten opzichte der herleidingen valt hier niets nieuws op te merken: de formulen zijn op dezelfde wijze behandeld, als reeds vroeger in N°. 10 uitvoerig genoeg werd aangegeven.

16. Bij het gebruiken van de volgende integraal (13) en (13_a) blijft de bewerking wel hetzelfde: maar de uitkomsten veranderen dikwerf niet met de verschillende onderstellingen, zoodat zij ten slotte zich tot weinige laten zamentrekken. Zoo is:

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\frac{qdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0 r Sin\,qs+\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+r(Sin\,qs-r.0)\}\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)\Big],\ \Big[ct<s\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c-1}D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^{c-1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_c\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,qs+r^2\,Sin\,qs\}\Big]=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n Sin\,ntq+D_c.0\Big]=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)\Big],\ \Big[ct=s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\}\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+r^2\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq\}+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\,Cos\,qs.\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-r\,Sin\,qs.(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}\Big],\ \Big[{s<ct<2s, \atop kt<s<(k-1)t}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^{k-1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_k\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,qs+r^2\,Sin\,qs\}+\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\}\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+r^2\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq\}+$$

$$+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+D_k.0+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}\Big],\quad\Big[kt=s<ct<2s\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{c-1} D_n\,Sin\,ntq+r^2(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1} D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_c\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,2qs+r^3\,Sin\,qs\Big\}\Big]=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\Big\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+D_c.0\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-s)q\}\Big],\quad\Big[kt=s,\ ct=2s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{2k} D_n\,Sin\,ntq+r^2(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k} D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^3\,Cos\,3qs+r^4\,Cos\,2qs\Big\}\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+r^3(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2\}\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+(r^2\,Cos\,2qs-r^3\,Cos\,qs-r^3\,Cos\,3qs+r^4\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq-$$

$$-(r^2\,Sin\,2qs-r^3\,Sin\,qs-r^3\,Sin\,3qs+r^4\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Sin\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.f_4(q)+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)f_3(q)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big\{r^2\,Cos\,2qs.\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-r^2\,Sin\,2qs.\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big\}\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+r^2\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ 2kt<2s<(2k+1)t\end{matrix}\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0 r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{2k+1}D_n\,Sin\,ntq+r^2\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k+1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^3\,Cos\,3qs+r^4\,Cos\,2qs\Big\}\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,ntq+r^3\,(Sin\,3qs-r\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)r\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)(r^2 Cos\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n Sin\,ntq-r^2 Sin\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n Cos\,ntq)\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{2k+1}D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+$$

$$+r^2\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\Big],\quad\Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\(2k+1)t<2s<2(k+1)t\end{matrix}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0 r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs)\Big\}\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Sin\,ntq+r^2\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_{2k+1}\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,2qs+r^3\,Sin\,qs\Big\}+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^3\,Cos\,3qs+r^4\,Cos\,2qs\Big\}\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+r^3\,(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq\}+$$

$$+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+D_{2k+1}.0+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,\{r^2\,Cos\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,ntq-r^2\,Sin\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+r^2\sum_{2k+2}^{c}D_n Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\Big[(2k+1)t=2s<ct<3s\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[D_0\,r\,Sin\,qs+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}D_n\,Sin\,ntq+r\,Sin\,qs.\sum_1^{k-1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_k\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,qs+r^2\,Sin\,qs\Big\}+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^2\,Cos\,2qs+r^3\,Cos\,qs\Big\}\sum_{k+1}^{2k-1}D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+r^2(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k+1}D_n\,Cos\,ntq+D_{2k}\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)\,Sin\,2qs+r^2\,Sin\,qs\Big\}+\Big\{\frac{1}{2}(1-r^2)-r^3\,Cos\,3qs+$$

$$+r^4\,Cos\,2qs\Big)\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,ntq-r^3\,(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\Big[r\,Sin\,qs.\Big\{D_0+\sum_1^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big\}+\frac{1}{2}(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{c}D_n\,Sin\,ntq+D_k.\,0+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+D_{2k}.\,0+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\Big(r^2\,Cos\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,ntq-$$

$$-r^2\,Sin\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big)\Big]=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-s)\,q\}+$$

$$+r^2\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\Big].\quad\Big[kt=s,\ 2s<ct<3s\Big].$$

Omdat hier voor ct, tusschen s en $2s$ gelegen, de uitkomsten dezelfde bleven, hetzij $kt<s<(k+1)t$, hetzij $kt=s$ was, is bij het hoofdgeval, dat $ct=2s$ is, geen onderscheid gemaakt tusschen beide bijzondere gevallen. Vandaar ook dat hier het onderzoek werd voortgezet voor ct tusschen $2s$ en $3s$ gelegen. Men kan nu deze negen uitkomsten tot een viertal herleiden, dat werkelijk onderling onderscheiden is: men heeft dan

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=\pi\Big[\frac{r-Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)\Big],\ \Big[ct\leqq s\Big],\ \ldots\ldots (XX_a)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}\Big],\ \Big[kt\leqq s<ct\leqq 2s\Big],\ \ldots\ldots (XX_b)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+r^2\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[{2s<ct<3s,\atop 2kt\leqq 2s<(2k+1)t}\Big],\ (XX_c)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+\frac{1}{2}f_3(q)+r\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\{(nt-2s)q\}\Big],\ \Big[{2s<ct<3s,\atop (2k+1)t\leqq 2s<2(k+1)t}\Big].\ (XX_d)$$

17. De volgende integraal (14) en (14_a) geeft op diezelfde wijze aanleiding tot eene herleidingsformule, waarbij de bewerking wederom dezelfde blijft. Alsdan is

$$\int_0^\infty f_4(x)\,\frac{(1-r^2)\cos sx}{1-2r\cos sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\sin qs+\{(1-r^2)\cos qs-(1+r^2)(\cos qs+r^2)\}\sum_1^c D_n\sin ntq+$$

$$+(1+r^2)(\sin qs-0)\sum_1^c D_n\cos ntq\Big]=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\sin qs.\{D_0+\sum_1^c D_n\cos ntq\}+$$

$$+(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^c D_n\sin ntq\Big]=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)\Big],\quad \Big[ct<s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\sin qs+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^{c-1}D_n\sin ntq+(1+r^2)\sin qs.\sum_1^{c-1}D_n\cos ntq+$$

$$+D_c\{(1-r^2)\cos qs.\sin qs+(1+r^2)r\sin qs)\}\Big]=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\sin qs.(D_0+\sum_1 D_n\cos ntq)+$$

$$+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^c D_n\sin ntq+D_c.0\Big]=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)\Big],\quad\Big[ct=s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\sin qs+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^k D_n\sin ntq+(1+r^2)\sin qs.\sum_1^k D_n\cos ntq+$$

$$+\{(1-r^2)\cos qs-(1+r^2)(r\cos 2qs-r^2\cos qs)\}\sum_{k+1}^c D_n\sin ntq+(1+r^2)r(\sin 2qs-r\sin qs)\sum_{k+1}^c D_n\cos ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\sin qs.(D_0+\sum_1^c D_n\cos ntq)+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^c D_n\sin ntq+$$

$$+(1-2r\cos qs+r^2)(1+r^2)(\cos qs.\sum_{k+1}^c D_n\sin ntq+\sin qs.\sum_{k+1}^c D_n\cos ntq)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\{\sin(nt-s)q\}\Big],\Big[\begin{array}{c}s<ct<2s,\\ kt<s<(k+1)t\end{array}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\sin qs+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^{k-1}D_n\sin ntq+$$

$$+(1+r^2)\sin qs.\sum_1^{k-1}D_n\cos ntq+D_k\{(1-r^2)\sin qs.\cos qs+(1+r^2)r\sin qs\}+$$

$$+\{(1-r^2)\cos qs-(1+r^2)(r\cos 2qs-r^2\cos qs)\}\sum_{k+1}^c D_n\sin ntq+(1+r^2)r(\sin 2qs-r\sin qs)\sum_{k+1}^c D_n\cos ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\cos qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\sin qs.(D_0+\sum_1^c D_n\cos ntq)+r(1-2r\cos qs+r^2)\sum_1^c D_n\sin ntq+$$

$$+D_k.0+(1-2r\cos qs+r^2)(1+r^2)(\cos qs.\sum_{k+1}^c D_n\sin ntq-\sin qs.\sum_{k+1}^c D_n\cos ntq)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\sin\{(nt-s)q\}\Big],\quad\Big[kt=s<ct<2s\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\,Sin\,qs+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq+\{(1-r^2)\,Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{c-1}D_n\,Cos\,ntq+D_c\{(1-r^2)\,Cos\,qs.\,Sin\,2qs+(1+r^2)\,r^2\,Sin\,qs\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)(1+r^2)(Cos\,qs.\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-Sin\,qs.\sum_{k+1}^c D_n\,Cos\,ntq)+D_c.\,0\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}\Big],\quad\Big[ct=2s,\,kt=s\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2\,1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)\,Sin\,qs+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,Sin\,qs.\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\{(1-r^2)\,Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\{(1-r^2)\,Cos\,qs-(1+r^2)(r^2\,Cos\,3qs-r^3\,Cos\,2qs)\}\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,r^2(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\,Sin\,qs.\,\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs-r^2\,Cos\,3qs+r^3\,Cos\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs-r\,Sin\,3qs+r^2\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\,Sin\,qs.f_4(q)+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,rf_3(q)+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+$$

$$+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)(r\,Cos\,2qs.\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,ntq-r\,Sin\,2qs.\sum_{2k+1}^c D_n\,Cos\,ntq)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\big(\sum_{k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+1}^c D_n\,Sin\,\{(nt-2s)q\}\big)\Big],\quad\Big[\begin{array}{c}2s<ct<3s,\\ 2kt<2s<(2k+1)t\end{array}\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)Sin\,qs+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n Sin\,ntq+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\{(1-r^2)Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{2k+1}D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k+1}D_n Cos\,ntq+$$

$$+\{(1-r^2)Cos\,qs-(1+r^2)(r^2\,Cos\,3qs-r^3\,Cos\,2qs)\}\sum_{2k+2}^{c}D_n Sin\,ntq+(1+r^2)r^2(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+2}^{c}D_n Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\,Sin\,qs.\{D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+r\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\{r\,Cos\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n Sin\,ntq-r\,Sin\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n Cos\,ntq\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\Big(\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{c}D_n Sin\{(nt-2s)q\}\Big)\Big],\ \Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\(2k+1)t<2s<2(k+1)t\end{matrix}\Big],$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)Sin\,qs+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^k D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^k D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+\{(1-r^2)Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,r\,(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_{2k+1}\{(1-r^2)Cos\,qs.\,Sin\,2qs+r(1+r^2)Sin\,qs\}+\{(1-r^2)\,Cos\,qs-(1+r^2)\,(r^2 Cos\,3qs-r^3 Cos\,2qs)\}\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)r^2\,(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)Sin\,qs.\,(D_0+\sum_1^c D_n Cos\,ntq)+$$

$$+r\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)\,(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}+D_{2k+1}.\,0+$$

$$+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\,(r\,Cos\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,ntq-r\,Sin\,2qs.\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Cos\,ntq)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+rf_3(q)+(1+r^2)\Big(\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\{(nt-2s)q\}\Big)\Big],\ \Big[(2k+1)t=2s<ct<3s\Big],$$

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[D_0(1+r^2)Sin\,qs+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^{k-1}D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)Sin\,qs.\sum_1^{k-1}D_n\,Cos\,ntq+$$

$$+D_k\{(1-r^2)Sin\,qs.\,Cos\,qs+(1+r^2)r\,Sin\,qs\}+\{(1-r^2)Cos\,qs+(1+r^2)(r\,Cos\,2qs-r^2\,Cos\,qs)\}\sum_{k+1}^{2k-1}D_n Sin\,ntq+$$

$$+(1+r^2)r(Sin\,2qs-r\,Sin\,qs)\sum_{k+1}^{2k-1}D_n Cos\,ntq+D_{2k}\{(1-r^2)Cos\,qs.\,Sin\,2qs+r(1+r^2)Sin\,qs\}+\{(1-r^2)Cos\,qs-$$

$$-(1+r^2)(r^2\,Cos\,3qs-r^3\,Cos\,2qs)\}\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,ntq+(1+r^2)r^2(Sin\,3qs-r\,Sin\,2qs)\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Cos\,ntq\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big[(1+r^2)\,Sin\,qs.(D_0+\sum_1^c D_n\,Cos\,ntq)+r(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_1^c D_n\,Sin\,ntq+D_k.\,0+$$

$$+(1+r^2)(1-2r\,Cos\,qs+r^2)\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}+D_{2k}.\,0+$$

$$+(1-2r\,Cos\,qs+r^2)(1+r^2)(r\,Cos\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,ntq-r\,Sin\,2qs.\sum_{2k+1}^{c}D_n Cos\,ntq)\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+r f_5(q)+(1+r^2)\big(\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}+r\sum_{2k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-2s)q\}\big)\Big].\,[2kt=2s<ct<3s].$$

De herleidingen volgden hier wederom denzelfden gang als vroeger. Omdat hier voor de waarden van ct, grooter dan s maar kleiner dan $2s$, de uitkomst niet onderscheiden was, hetzij s een veelvoud van t was of niet, is er vooreerst bij het geval van $ct=2s$ geen onderscheid gemaakt tusschen die beide toestanden; vervolgens konde dan ook hier weder worden voortgegaan met het onderzoek, wanneer cs grooter dan $2s$ werd, maar toch kleiner dan $3s$ bleef. De negen verschillende uitkomsten, die op deze wijze werden verkregen, zijn echter niet alle onderscheiden, maar laten zich licht tot de volgende vier gevallen terugbrengen.

$$\int_0^\infty f_4(x)\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+r f_5(q)\Big],\,[ct\leqq s],\,.\,(XXI_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+r f_5(q)+(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}D_n Sin\{(nt-s)q\}\Big],\,[kt\leqq s<ct\leqq 2s],\,.\,(XXI_b)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+r f_5(q)+(1+r^2)\big(\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\{(nt-s)\,q\}+$$

$$+r\sum_{2k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-2s)\,q\}\big)\Big],\ \Big[{2s<ct<3s, \atop 2kt\leqq 2s<(2k+1)t}\Big],\ \ldots\ (XXI_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}f_4(q)+r f_5(q)+(1+r^2)\big(\sum_{k+1}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-s)\,q\}+$$

$$+r\sum_{2k+2}^{c}D_n\,Sin\,\{(nt-2s)\,q\}\big)\Big].\ \Big[{2s<ct<3s, \atop (2k+1)\,t\leqq 2s<2\,(k+1)\,t}\Big].\ \ldots\ (XXI_d)$$

18. Wanneer men nu de volgende integralen (15), (16) en (17) gebruikt, worden de uitkomsten wederom veel eenvoudiger, in zoo verre namelijk hier al weder ieder onderscheid wegvalt tusschen de betrekkelijke waarden van ct en s. Daartegen staat evenwel over, dat de eerste sommatie ten opzichte van n niet konde uitgevoerd worden, en dat derhalve deze tweede sommatie ten opzichte van m moet genomen worden.

Wat vervolgens betreft den lossen term, die tot coefficient heeft D_0 en tot tweeden factor de integraal $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$: deze wordt bij het gebruik van de formule (15) gegeven door de vroegere integraal (1); maar ten aanzien van de beide andere integralen (16) en (17) worden de overeenkomstige integralen voor die losse termen niet gevonden: en dit ook terecht, want zij worden toch ieder op zichzelve oneindig groot, zoo als dit uit de integraal (5) reeds volgt, en nog duidelijker blijkt uit het theorema (IV), dat vervangen werd door (IV_a), waaruit die integraal (5) kon voortspruiten. Men komt evenwel gemakkelijk aan dit bezwaar te gemoet, door in plaats van $f_4(x)$ te gebruiken de andere $f_4(x) - D_0 = \sum_1^c D_m \operatorname{Cos} mtx$: daardoor toch vervalt de losse term, en daarmede het geheele bezwaar, dat zich hier voordoet. Men verkrijgt nu

$$\int_0^\infty f_3(x)\,\frac{\operatorname{Sin} sx}{1-2r\operatorname{Cos} sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = D_0\sum_1^\infty r^{n-1}\big[\operatorname{Sin} nqs.\,Ci(nqs) - \operatorname{Cos} nqs.\,Si(nqs)\big] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_1^c D_m \operatorname{Sin} mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[\operatorname{Sin} nqs.\{Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q]\} - \operatorname{Cos} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q]\}\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^c D_m \operatorname{Cos} mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[\operatorname{Cos} nqs.\{Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q]\} + \operatorname{Sin} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q]\}\Big]; \quad \text{(XXII)}$$

$$\int_0^\infty [f_4(x) - D_0]\,\frac{1-r^2}{1-2r\operatorname{Cos} sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = \sum_1^c D_m\big[\operatorname{Cos} mtq.\,Ci(mtq) + \operatorname{Sin} mtq.\,Si(mtq)\big] +$$

$$+\sum_1^c D_m \operatorname{Sin} mtq.\sum_1^\infty r^n\Big[\operatorname{Sin} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q]\} - \operatorname{Cos} nqs.\{Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q]\}\Big] +$$

$$+\sum_1^c D_m \operatorname{Cos} mtq.\sum_1^\infty r^n\Big[\operatorname{Cos} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q]\} + \operatorname{Sin} nqs.\{Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q]\}\Big]; \quad \text{(XXIII)}$$

$$\int_0^\infty [f_4(x) - D_0]\,\frac{(1-r^2)\operatorname{Cos} sx}{1-2r\operatorname{Cos} sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2} = r\sum_1^c D_m\big[\operatorname{Cos} mtq.\,Ci(mtq) + \operatorname{Sin} mtq.\,Si(mtq)\big] +$$

$$+\frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c D_m \operatorname{Sin} mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[\operatorname{Sin} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q]\} - \operatorname{Cos} nqs.\{Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q]\}\Big] +$$

$$+\frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c D_m \operatorname{Cos} mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[\operatorname{Cos} nqs.\{Ci[(ns+mt)q] + Ci[(ns-mt)q]\} + \operatorname{Sin} nqs.\{Si[(ns+mt)q] + Si[(ns-mt)q]\}\Big]. \quad \text{(XXIV)}$$

En hiermede zijn wij aan het einde gekomen van het stelsel algemeene herleidingsformulen, dat wij wenschten af te leiden.

§ 3. TOEPASSING DER VERKREGEN HERLEIDINGSFORMULEN.

19. Wil men dit stelsel herleidingsformulen gebruiken tot het afleiden van nieuwe bepaalde integralen, zoo bepale men zich vooreerst tot de overeenkomstige ontwikkelingen

$$f_3(x) = (2\,Cos\frac{1}{2}tx)^a.\,Sin\frac{1}{2}atx = \sum_1^a \binom{a}{m} Sin\,mtx\,,$$

$$f_4(x) = (2\,Cos\frac{1}{2}tx)^a.\,Cos\frac{1}{2}atx = \sum_0^a \binom{a}{m} Cos\,mtx = 1 + \sum_1^a \binom{a}{m} Cos\,mtx\,,$$

waarin nu $C_m = \binom{a}{m} = D_m$ de m - de binomiaal coefficient van den aanwijzer a voorstelt. Zonder de algemeenheid der formulen eenigzins te benadeelen, kan men willekeurig over t beschikken, daar men immers altijd naderhand door de onderstelling $x = ty$ de standvastige t wederom zoude kunnen invoeren. Deze opmerking kunnen wij hier nuttig gebruiken, door $t = 2$ te stellen, en alzoo het element $\frac{1}{2}tx$ tot de geheele x terug te brengen, waardoor de gebroken vormen worden vermeden.

Op die wijze leiden wij uit de algemeene vergelijkingen (XIII) tot (XXIV) achtereenvolgens de volgende integralen af.

$$\int_0^\infty Cos^a x\,\frac{Sin\,ax.\,Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq\,,\ \left[2a \leqq s\right],\ \ldots\ (18_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq + \frac{1}{2^u}\sum_{k+1}^a \binom{a}{n} Sin\left\{(2n-s)\,q\right\}\right],\ \begin{bmatrix} s < 2a \leqq 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s \end{bmatrix},\ \ldots\ (18_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq + \frac{1}{2^a}\left\{\sum_{k+1}^a \binom{a}{n} Sin\left\{(2n-s)q\right\} + r\sum_{2k+1}^a \binom{a}{n} Sin\left\{(n-s)2q\right\}\right\}\right],$$

$$\begin{bmatrix} 2s < 2a < 3s, \\ 2k \leqq s < 2k+1 \end{bmatrix},\ k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s\Big],\ \ldots\ldots\ (18_c)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq + \frac{1}{2^a}\left\{\sum_{k+1}^a \binom{a}{n} Sin\left\{(2n-s)q\right\} + r\sum_{2k+2}^a \binom{a}{n} Sin\left\{(n-s)2q\right\}\right\}\right];$$

$$\begin{bmatrix} 2s < 2a < 3s, \\ (2k+1) \leqq s < 2(k+1) \end{bmatrix},\ k = \mathcal{E}\frac{1}{2}(s-1)\Big];\ \ldots\ldots\ (18_d)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\,Sin\,ax}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\Big),\;\Big[2a<s\Big],\;\ldots\ldots \quad (19_a)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1-r}{2^a}\Big)\Big],\;\Big[2a=s\Big],\;\ldots \quad (19_b)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big)\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\,\frac{1}{2}\,s,\;\text{breuk}\end{matrix}\right],\;\ldots\ldots \quad (19_c)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\Big\{1-\binom{a}{k}\Big\}\Big)-\frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\,\frac{1}{2}\,s,\;\text{geheel}\end{matrix}\right],\;\ldots\ldots \quad (19_d)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1-r^2}{2^a}\Big)-\frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} a=s, \\ k=\mathcal{E}\,\frac{1}{2}\,s,\;\text{breuk}\end{matrix}\right],\;\ldots\ldots \quad (19_e)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-\frac{1}{2}\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\Big\{1-r^2-r\binom{a}{k}\Big\}\Big)-$$

$$-\frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big];\;\left[\begin{matrix} a=s, \\ k=\mathcal{E}\,\frac{1}{2}\,s,\;\text{geheel}\end{matrix}\right];\;\ldots\ldots \quad (19_f)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\,Sin\,ax.\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-r\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\Big)\Big],\;\Big[2a<s\Big],\;\ldots\ldots \quad (20_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-r\Big(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{(1-r)^2}{2^{a+1}\,r}\Big)\Big],\;\Big[2a=s\Big],\;\ldots \quad (20_b)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\,Sin\,ax.\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq -$$

$$-r\left(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\right)-\frac{1+r^2}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\{(2n-s)\,q\}\Big],\ \left[\begin{array}{c} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{breuk}\end{array}\right], .\ (20_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-r\left(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1}{2^a}\left\{1-\frac{1+r^2}{2r}\binom{a}{k}\right\}\right)-$$

$$-\frac{1+r^2}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big],\ \left[\begin{array}{c} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{geheel}\end{array}\right], .\ (20_d)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-r\left(Cos^a q.\,Cos\,aq-\frac{1-r^2}{2^{a+1}}\right)-$$

$$-\frac{1+r^2}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big],\ \left[\begin{array}{c} a=s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{breuk}\end{array}\right], .\ (20_e)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,Cos^a q.\,Sin\,aq-r\left(Cos^a q.\,Cos\,aq+\frac{1}{2^{a+1}}\left\{(1-r^2)+\frac{1+r^2}{r}\binom{a}{k}\right\}\right)-$$

$$-\frac{1+r^2}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Cos\,\{(2n-s)\,q\}\Big];\ \left[\begin{array}{c} a=s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{geheel}\end{array}\right];.\ (20_f)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x\frac{Sin\,ax.\,Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=\frac{1}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m}Sin\,2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\{Ci[(ns+2m)q]+Ci[(ns-2m)q]\}-$$

$$-Cos\,nqs.\,\{Si\,[(ns+2m)\,q]+Si\,[(ns-2m)\,q]\}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m}Cos\,2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\,nqs.\{Ci[(ns+2m)q]-Ci[(ns-2m)q]\}+Sin\,nqs.\{Si[(ns+2m)q]-Si[(ns-2m)q]\}\Big];.\ (21)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x\frac{(1-r^2)\,Sin\,ax}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=\frac{1}{2^a}\sum_1^a\binom{a}{m}\Big[Sin\,2mq.\,Ci\,(2mq)-Cos\,2mq.\,Si\,(2mq)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2^a}\sum_1^a\binom{a}{m}Sin\,2mq.\sum_1^\infty r^n\Big[Sin\,nqs.\{Si[(ns+2m)q]+Si[(ns-2m)q]\}+Cos\,nqs.\,\{Ci[(ns+2m)q]+Ci[(ns-2m)q]\}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2^a}\sum_1^a\binom{a}{m}Cos\,2mq.\sum_1^\infty r^n\Big[Cos\,nqs.\{Si[(ns+2m)q]-Si[(ns-2m)q]\}-Sin\,nqs.\{Ci[(ns+2m)q]-Ci[(ns-2m)q]\}\Big];.\ (22)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Sin\, ax.\, Cos\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{q\, dx}{q^2-x^2} = \frac{r}{2^a}\sum_1^a \binom{a}{m}\Big[Sin\, 2mq.\, Ci(2mq) - Cos\, 2mq.\, Si(2mq)\Big] +$$

$$+\frac{1+r^2}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m} Sin\, 2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\, nqs.\{Si[(ns+2m)q]+Si[(ns-2m)q]\}+Cos\, nqs.\{Ci[(ns+2m)q]+Ci[(ns-2m)q]\}\Big]-$$

$$-\frac{1+r^2}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m} Cos\, 2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\, nqs.\{Si[(ns+2m)q]-Si[(ns-2m)q]\}-Sin\, nqs.\{Ci[(ns+2m)q]-Ci[(ns-2m)q]\}\Big]; \quad (23)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{Cos\, ax.\, Sin\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{x\, dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\, \frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq,\ \Big[2a<s\Big], \ldots \quad (24_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2^{a+1}}\Big],\ \Big[2a=s\Big], \ldots \quad (24_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2^a}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Cos\{(2n-s)q\}\Big],\ \left[\begin{matrix} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{breuk}\end{matrix}\right], \quad (24_c)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2^{a+1}}\binom{a}{k} + \frac{1}{2^a}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Cos\{(2n-s)q\}\Big],\ \left[\begin{matrix} s<2a<2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{geheel}\end{matrix}\right], \ldots (24_d)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2^a}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Cos\{(2n-s)q\} + \frac{r}{2^{a+1}}\Big],\ \left[\begin{matrix} s=a, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{breuk}\end{matrix}\right], \ldots (24_e)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2^{a+1}}\Big\{r+\binom{a}{k}\Big\} + \frac{1}{2^a}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Cos\{(2n-s)q\}\Big];\ \left[\begin{matrix} s=a, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s,\ \text{geheel}\end{matrix}\right]; \ldots (24f)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\, ax}{1-2r\, Cos\, sx+r^2}\, \frac{q\, dx}{q^2-x^2} = \pi\Big[\frac{r\, Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2} Cos^a q.\, Sin\, aq\Big],\ \Big[2a \leqq s\Big], \ldots (25_a)$$

$$= \pi\Big[\frac{r\, Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2} Cos^a q.\, Sin\, aq + \frac{r}{2^{a+1}}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Sin\{(2n-s)q\}\Big],\ \left[\begin{matrix} s<2a\leqq 2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s\end{matrix}\right], \ldots (25_b)$$

$$= \pi\Big[\frac{r\, Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2}\, Cos^a q.\, Cos\, aq + \frac{1}{2} Cos^a q.\, Sin\, aq + \frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^a\binom{a}{n} Sin\{(2n-s)q\} + \frac{r^2}{2^a}\sum_{2k+1}^a\binom{a}{n} Sin\{(n-s)\, 2q\}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} 2s<a<3s, \\ 2k\leqq s<2k+1,\end{matrix}\ k=\mathcal{E}\frac{1}{2}s\right], \ldots \quad (25_c)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\,Cos\,ax}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}Cos^a q.Cos\,aq+\frac{1}{2}Cos^a q.Sin\,aq+$$

$$+\frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(2n-s)q\}+\frac{r^2}{2^a}\sum_{2k+2}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(n-s)2q\}\Big];\Big[\begin{matrix}2s<2a<3s,\\ 2k+1\leqq s<2(k+1)\end{matrix},k=\mathcal{E}\tfrac{1}{2}(s-1)\Big];\ \ldots (25_d)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x\frac{(1-r^2)\,Cos\,ax.\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}Cos^a q.\,Cos\,aq+r\,Cos^a q.\,Sin\,aq\Big],\ \Big[2a\leqq s\Big],\ \ldots\ldots (26_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}Cos^a q.Cos\,aq+r\,Cos^a q.Sin\,aq+\frac{1+r^2}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(2n-s)q\}\Big],\Big[\begin{matrix}s<2a\leqq 2s,\\ k=\mathcal{E}\tfrac{1}{2}s\end{matrix}\Big],\ldots (26_b)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}Cos^a q.Cos\,aq+r\,Cos^a q.Sin\,aq+\frac{1+r^2}{2^a}\Big\{\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(2n-s)q\}+r\sum_{2k+1}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(n-s)2q\}\Big\}\Big],$$

$$\Big[\begin{matrix}2s<2a<3s,\\ 2k\leqq s<(2k+1)\end{matrix},k=\mathcal{E}\tfrac{1}{2}s\Big],\ \ldots\ldots (26_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}Cos^a q.Cos\,aq+r\,Cos^a q.Sin\,aq+\frac{1+r^2}{2^a}\Big\{\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(2n-s)q\}+r\sum_{2k+2}^{a}\binom{a}{n}Sin\{(n-s)2q\}\Big\}\Big];$$

$$\Big[\begin{matrix}2s<2a<3s,\\ 2k+1\leqq s<2(k+1)\end{matrix},k=\mathcal{E}\tfrac{1}{2}(s-1)\Big];\ \ldots (26_d)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x\frac{Cos\,ax.\,Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=\frac{1}{2^a}\sum_1^\infty r^{n-1}\big[Sin\,nqs.\,Ci\,(nqs)-Cos\,nqs.\,Si\,(nqs)\big]+$$

$$+\frac{1}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m}Sin\,2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\,\{Si\,[(ns+2m)q]-Si\,[(ns-2m)q]\}+$$

$$+Cos\,nqs.\,\{Ci\,[(ns+2m)q]+Ci\,[(ns-2m)q]\}\Big]$$

$$-\frac{1}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m}Cos\,2mq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\,nqs.\,\{Si\,[(ns+2m)q]+Si\,[(ns-2m)q]\}-$$

$$-Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+2m)q]-Ci\,[(ns-2m)q]\}\Big];\ \ldots (27)$$

$$\int_0^\infty \left[Cos^a x . Cos\, ax - \frac{1}{2^a}\right] \frac{1-r^2}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} = \frac{1}{2^a}\sum_1^a \binom{a}{m} \left[Cos\, 2mq . Ci\,(2mq) + Sin\, 2mq . Si\,(2mq)\right] +$$

$$+\frac{1}{2^a}\sum_1^a\binom{a}{m} Sin\, 2mq . \sum_1^\infty r^n \left[Sin\, nqs . \{Ci[(ns+2m)q] - Ci[(ns-2m)q]\} - Cos\, nqs . \{Si[(ns+2m)q] - Si[(ns-2m)q]\}\right]$$

$$+\frac{1}{2^a}\sum_1^a\binom{a}{m} Cos\, 2mq . \sum_1^\infty r^n \left[Cos\, nqs . \{Ci[(ns+2m)q] + Ci[(ns-2m)q]\} + Sin\, nqs . \{Si[(ns+2m)q] + Si[(ns-2m)q]\}\right]; \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \left[Cos^a x . Cos\, ax - \frac{1}{2^a}\right] \frac{(1-r^2)\, Cos\, sx}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} = \frac{r}{2^a}\sum_1^a \binom{a}{m} \left[Cos\, 2mq .\ Ci\,(2mq) + Sin\, 2mq .\ Si\,(2mq)\right] +$$

$$+\frac{1+r^2}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m} Sin\, 2mq . \sum_1^\infty r^n \left[Sin\, nqs . \{Ci[(ns+2m)q] - Ci[(ns-2m)q]\} - Cos\, nqs . \{Si[(ns+2m)q] - Si[(ns-2m)q]\}\right]$$

$$+\frac{1+r^2}{2^{a+1}}\sum_1^a\binom{a}{m} Cos\, 2mq . \sum_1^\infty r^n \left[Cos\, nqs . \{Ci[(ns+2m)q] + Ci[(ns-2m)q]\} + Sin\, nqs . \{Si[(ns+2m)q] + Si[(ns-2m)q]\}\right]. \quad (29)$$

20. Uit de aandachtige beschouwing van dit stelsel integralen blijkt al spoedig, dat men daaruit onderscheidene andere formulen kan afleiden. Tot voorbeeld neme men de som en het verschil van de integralen (18_a) tot (18_d) en (26_a) tot (26_d), zoo wordt achtervolgens hier

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\,\{(s+a)x\}}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{(1+r^2)\, Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q .\ Cos\, aq + \frac{2r^3 + (1-3r^2)\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q .\ Sin\, aq\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s+a)q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{r-2\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} 2r^2\, Cos^a q .\ Sin\, aq\right], \quad \left[2a \leqq s\right], \quad (30_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[Cos^a q \frac{(1+r^2) Sin\{(s+a)q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{r-2\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} 2r^2 Cos^a q . Sin\, aq + \frac{r^2}{2^{a-1}}\sum_{k+1}^a \binom{a}{n} Sin\{(2n-s)q\}\right],$$

$$\left[\begin{matrix} s < 2a \leqq 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s \end{matrix}\right], \quad \ldots\ldots (30_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[Cos^a x \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s+a)\, q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{r-2\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} 2r^2\, Cos^a q . Sin\, aq +\right.$$

$$\left.+\frac{r^2}{2^{a-1}}\left\{\sum_{k+1}^a \binom{a}{n} Sin\,\{(2n-s)q\} + r\sum_{2k+1}^a\binom{a}{n} Sin\,\{(n-s)2q\}\right\}\right], \left[\begin{matrix} 2s < 2a < 3s, \\ 2k \leqq s < 2k+1 \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s\right], \quad (30_c)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\,\{(s+a)\,x\}}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2}\Big[Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s+a)\,q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} +$$

$$+ \frac{r-2\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} 2\, r^2\, Cos^a q . Sin\, aq + \frac{r^2}{2^{a-1}} \Big\{ \sum_{k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(2n-s)\,q\} +$$

$$+ r \sum_{2k+2}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(n-s)\,2q\}\Big\}\Big]; \left[\begin{matrix} 2s < 2a < 3s, \\ 2k+1 \leqq s < 2(k+1) \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{1}{2}(s-1)\right]; \quad \ldots\ldots (30_d)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\,\{(s-a)\,x\}}{1-2r\, Cos\, sx + r^2} \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\, Sin\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q .\, Cos\, aq + \frac{2\, r-(1+r^2)\, Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q .\, Sin\, aq\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[- Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s-a)\,q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q\Big],\ [2a \leqq s], \quad \ldots\ldots (31_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[- Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s-a)\,q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q + \frac{1}{2^a} \sum_{k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(2n-s)\,q\}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} s < 2a \leqq 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s \end{matrix}\right], \quad \ldots\ldots (31_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[- Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\,\{(s-a)\,q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q + \frac{1}{2^a}\Big\{ \sum_{k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(2n-s)q\} +$$

$$+ r \sum_{2k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(n-s)\,2q\}\Big\}\Big],\ \left[\begin{matrix} 2s < 2a < 3s, \\ 2k \leqq s < 2k+1 \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{1}{2}s\right], \quad \ldots\ldots (31_c)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[- Cos^a q \frac{(1+r^2) Sin\,\{(s-a)q\}}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, qs + r^2} Cos^a q + \frac{1}{2^a}\Big\{ \sum_{k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(2n-s)q\} +$$

$$+ r \sum_{2k+2}^{a} \binom{a}{n} Sin\,\{(n-s)\,2q\}\Big\}\Big].\ \left[\begin{matrix} 2s < 2a < 3s, \\ 2k+1 \leqq s < 2(k+1) \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{1}{2}(s-1)\right]. \quad \ldots\ldots (31_d)$$

Stelt men verder in (30_a) en (31_a) $s = 2a$, en evenzoo in (30_b) en (31_b) $s = a$, welke vergelijkingen toch voor deze onderstellingen gelden, dan verkrijgt men de vier eenvoudige uitkomsten.

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\, 3ax}{1-2r\, Cos\, 2ax + r^2} \frac{q\, dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\, 3aq}{1-2r\, Cos\, 2aq + r^2} + \frac{r-2\, Cos\, 2aq}{1-2r\, Cos\, 2aq + r^2} 2r^2\, Cos^a q .\, Sin\, aq\Big]; \quad \ldots\ldots (32)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\, ax}{1-2r\, Cos\, 2ax+r^2}\, \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\left[-Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, 2aq+r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, 2aq+r^2} Cos^a q\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\, Cos^a q \frac{(1-r)^2\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, 2aq+r^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{(1-r^2)\, Cos\, 2ax}{1-2r\, Cos\, ax+r^2}\, \frac{q\,dx}{q^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\left[Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\, 2aq}{1-2r\, Cos\, aq+r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{r-2\, Cos\, aq}{1-2r\, Cos\, aq+r^2} 2r^2\, Cos^a q . Sin\, aq + \frac{r^2}{2^{a-1}} \sum_{k+1}^{a} \binom{a}{n} Sin\{(2n-a)q\}\right]; \quad \left[k = \mathcal{E}\frac{1}{2}a\right]; . (34)$$

$$\int_0^\infty Cos^a x \frac{1-r^2}{1-2r\, Cos\, ax+r^2}\, \frac{q\,dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-Cos^a q \frac{(1+r^2)\, Sin\, 0}{1-2r\, Cos\, aq+r^2} + \frac{2r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, aq+r^2} Cos^a q + \frac{r}{2^a}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n} Sin\{(2n-a)q\}\right] =$$

$$= \pi\left[Cos^a q \frac{r\, Sin\, aq}{1-2r\, Cos\, aq+r^2} + \frac{r}{2^{a+1}}\sum_{k+1}^{a}\binom{a}{n} Sin\{(2n-a)q\}\right]. \quad \left[k = \mathcal{E}\frac{1}{2}a\right]. \ldots . (35)$$

21. Men kan hier ook de ontwikkelingsvergelijkingen

$$f_3(x) = \frac{u\, Sin\, tx - u^{c+1}\, Sin\{(c+1)tx\} + u^{c+2}\, Sin\, ctx}{1-2u\, Cos\, tx+u^2} = \sum_1^c u^m\, Sin\, mtx,$$

$$f_4(x) = \frac{1-u\, Cos\, tx - u^{c+1}\, Cos\{(c+1)tx\} + u^{c+2}\, Cos\, ctx}{1-2u\, Cos\, tx+u^2} = \sum_0^c u^m\, Cos\, mtx = 1 + \sum_1^c u^m\, Cos\, mtx,$$

bezigen, waarbij steeds $u^2 < 1$ moet zijn. Hier is $C_m = u^m = D_m$ en tevens $D_0 = 1$. Bij de uitkomsten, afgeleid uit onze algemeene herleidingsformulen (XIII) tot (XVIII), (XXIII) en (XXIV), kan men reeds dadelijk door u deelen.

Maar hier behoeven de sommatien $\sum_{k+1}^{c} C_n\, Sin\{(nt-s)q\}$ en $\sum_{k+1}^{c} C_n\, Cos\{(nt-s)q\}$ niet in dien vorm te blijven staan. Wanneer men toch de ontwikkelingen $f_3(q)$ en $f_4(q)$ als functien van c beschouwt, en dus voor de eerste schrijft $\varphi_3(c)$, voor de tweede $\varphi_4(c)$; zoo kan men vooreerst de sinus en de cosinus van $(nt-s)q$ goniometrisch ontbinden, en verkrijgt dan telkens twee afzonderlijke sommatien: deze loopen van $n = k+1$ tot $n = c$, en kunnen derhalve beschouwd worden als het verschil van twee andere sommatien, de eene van 1 tot c, de andere van 1 tot k loopende. Voor beide waarden kan men nu die sommatien uitdrukken, de eerste maal door eene zekere functie φ_3 of φ_4 van c, de tweede maal door dezelfde functie van k. Alzoo heeft men het volgende.

$$\sum_{k+1}^{c} C_n Sin\{(nt-s)q\} = Cos\, qs.\sum_{k+1}^{c} C_n Sin\, ntq - Sin\, qs.\sum_{k+1}^{c} C_n Cos\, ntq = Cos\, qs.\left\{\sum_{1}^{c} C_n Sin\, ntq - \sum_{1}^{k} C_n Sin\, ntq\right\} -$$

$$- Sin\, qs.\left\{\sum_{0}^{c} C_n\, Cos\, ntq - \sum_{0}^{k} C_n\, Cos\, ntq\right\} = Cos\, qs.\,\{\varphi_3(c) - \varphi_3(k)\} - Sin\, qs.\{\varphi_4(c) - \varphi_4(k)\};$$

$$\sum_{k+1}^{c} C_n Cos\{(nt-s)q\} = Cos\, qs.\sum_{k+1}^{c} C_n Cos\, ntq + Sin\, qs.\sum_{k+1}^{c} C_n Sin\, ntq = Cos\, qs.\left\{\sum_{0}^{c} C_n Cos\, ntq - \sum_{0}^{k} C_n Cos\, ntq\right\} +$$

$$+ Sin\, qs.\left\{\sum_{1}^{c} C_n\, Sin\, ntq - \sum_{1}^{k} C_n\, Sin\, ntq\right\} = Cos\, qs.\{\varphi_4(c) - \varphi_4(k)\} + Sin\, qs.\{\varphi_3(c) - \varphi_3(k)\}.$$

En hierbij doet zich nog verder eene belangrijke vereenvoudiging op: immers, de noemer $1 - 2u\, Cos\, tq + u^2$ hangt noch van k, noch van c af: de termen dus in den teller, die mede van c of k onafhankelijk zijn, dat is $u\, Sin\, tq$ in $\varphi_3(c)$ en $\varphi_3(k)$, en $1 - u\, Cos\, tq$ in $\varphi_4(c)$ en $\varphi_4(k)$ moeten van zelve verdwijnen, zoodra men het verschil der beide sommatien neemt. Een en ander vindt dadelijke toepassing bij de herleiding van de volgende uitkomsten, die men verkrijgt door het gebruik van de algemeene herleidingsformulen (XIII) tot (XXIV) bij de ondergestelde vormen van $f_3(x)$ en $f_4(x)$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin\, tx - u^c Sin\{(c+1)tx\} + u^{c+1} Sin\, ctx}{1 - 2u\, Cos\, tx + u^2}\, \frac{Sin\, sx}{1 - 2r\, Cos\, sx + r^2}\, \frac{q\,dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{r - Cos\, qs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}\, \frac{Sin\, tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2},\ [ct \leqq s], \quad \ldots\ldots (36_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}\, \frac{Sin\, tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2} + \sum_{k+1}^{c} u^n Sin\{(nt-s)q\}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}\, \frac{Sin\, tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2} +$$

$$+ Cos\, qs\, \frac{u^k Sin\{(k+1)tq\} - u^{k+1} Sin\, ktq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2} -$$

$$- Sin\, qs\, \frac{u^k Cos\{(k+1)tq\} - u^{k+1} Cos\, ktq - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1 - 2r\, Cos\, qs + r^2}\, \frac{Sin\, tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\, ctq}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2} +$$

$$+ \frac{u^k Sin\{(kt+t-s)q\} - u^{k+1} Sin\{(kt-s)q\} - u^c Sin\{(ct+t-s)q\} + u^{c+1} Sin\{(ct-s)q\}}{1 - 2u\, Cos\, tq + u^2}\Big],\ \left[\begin{array}{c} s < cs < 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t} \end{array}\right], (36_b)$$

[Van nu af aan zal men deze herleiding dadelijk kunnen gebruiken, en nog daaruit afleiden

de waarde $\sum\limits_{2k+1}^{c} u^n Sin\{(nt-2s)q\}$ en $\sum\limits_{2k+2}^{c} u^n Sin\{(nt-2s)q\}$, door in de hier verkregen uitkomst $2k+1$ of $2k+2$ voor $k+1$, en $2s$ voor s in te voeren].

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{Sin\,tq-u^c\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+\frac{u^k\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+1}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^c\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+1}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\frac{u^{2k+1}\,Sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{2k+2}Sin\{(kt-s)2q\}-u^c Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+1}Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2},$$

$$\left[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ 2kt\leqq 2s<(2k+1)t\end{matrix},\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t}\right], \quad . . (36_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{Sin\,tq-u^c\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+\frac{u^k\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+1}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^c\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+1}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\frac{u^{2k+1}Sin\{(kt+t-s)2q\}-u^{2k+2}Sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^c Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+1}Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2};$$

$$\left[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ (2k+1)t<2s\leqq(k+1)2t\end{matrix},\ k=\mathcal{E}\left(\frac{s}{t}-\frac{1}{2}\right)\right]; \quad . . (36_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx-u^c\,Sin\{(c+1)tx\}+u^{c+1}\,Sin\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{Sin\,tq-u^c\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Cos\,tq-u-u^c\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],\ [ct<s], \quad . . . (37_a)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{Sin\,tq-u^c\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Cos\,tq-u-u^c\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-\frac{1}{2}ru^{c-1}\Big],\ [ct=s], \quad . . (37_b)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx - u^c \sin\{(c+1)tx\} + u^{c+1}\sin ctx}{1-2u\cos tx+u^2}\;\frac{1-r^2}{1-2r\cos sx-r^2}\;\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$= \pi\Big[\frac{r\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}\;\frac{\sin tq - u^c\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\;\frac{\cos tq - u - u^c\cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} - r\sum_{k+1}^{c} u^n\cos\{(nt-s)q\}\Big] =$$

$$=\pi\Big[\frac{r\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}\;\frac{\sin tq-u^c\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2} - \frac{1}{2}\;\frac{\cos tq-u-u^c\cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$- r\cos qs\;\frac{u^k\cos\{(k+1)tq\} - u^{k+1}\cos ktq - u^c\cos\{(c+1)\}tq + u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$- r\sin qs\;\frac{u^k\sin\{(k+1)tq\} - u^{k+1}\sin ktq - u^c\sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2}\Big] =$$

$$=\pi\Big[\frac{r\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}\;\frac{\sin tq-u^c\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2} - \frac{1}{2}\;\frac{\cos tq-u-u^c\cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$- r\,\frac{u^k\cos\{(kt+t-s)q\}-u^{k+1}\cos\{(kt-s)q\}-u^c\cos\{(ct+t-s)q\}+u^{c+1}\cos\{(ct-s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2},\left[\begin{matrix} s<ct<2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{breuk}\end{matrix}\right], \quad (37_c)$$

[Ook deze herleiding zal men van nu af dadelijk kunnen toepassen, en ze even als boven kunnen gebruiken bij de sommatiën $\sum_{2k+1}^{c} u^n\cos\{(nt-2s)q\}$ of $\sum_{2k+2}^{c} u^n\cos\{(ns-2s)q\}$, indien men slechts $2k+1$ of $2k+2$ voor $k+1$, en $2s$ voor s daarbij in de plaats schrijft].

$$=\pi\Big[\frac{r\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}\;\frac{\sin tq-u^c\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2} - \frac{1}{2}\;\frac{\cos tq-u-u^c\cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$-\frac{1}{2}ru^{k-1} - r\,\frac{u^k\cos tq-u^{k+1}-u^c\cos\{(ct+t-s)q\}+u^{c+1}\cos\{(ct-s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}\Big],\left[\begin{matrix} s<ct<2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{geheel}\end{matrix}\right], \quad (37_d)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\sin qs}{1-2r\cos qs+r^2}\;\frac{\sin tq-u^c\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\sin ctq}{1-2u\cos tq+u^2} - \frac{1}{2}\;\frac{\cos tq-u-u^c\cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\cos ctq}{1-2u\cos tq+u^2} -$$

$$-\frac{1}{2}r^2u^{c-1} - r\,\frac{u^k\cos\{(kt+t-s)q\}-u^{k+1}\cos\{(kt-s)q\}-u^c\cos\{(t+s)\}q+u^{c+1}\cos qs}{1-2u\cos tq+u^2}\Big],\left[\begin{matrix} ct=2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{breuk}\end{matrix}\right], \quad (37_e)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx - u^c Sin\{(c+1)tx\} + u^{c+1} Sin\,ctx}{1 - 2u\,Cos\,tx + u^2} \frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx + r^2} \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \pi \Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq + u^2} - \frac{1}{2} \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- \frac{1}{2}(ru^{k-1} + r^2 u^{c-1}) - r \frac{u^k Cos\,tq - u^{k+1} - u^c Cos\{(t+s)q\} + u^{c+1} Cos\,qs}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2}\Big]; \left[\begin{matrix} ct = 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t}, \text{ geheel} \end{matrix}\right]; . (37_f)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx - u^c Sin\{(c+1)tx\} + u^{c+1} Sin\,ctx}{1 - 2u\,Cos\,tx + u^2} \frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx + r^2} \frac{x dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1 - 2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- r \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2}\Big], \; [ct < s], \; . \; (38_a)$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1 - 2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- r \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} - \frac{1+r^2}{2} u^{c-1}\Big], \; [ct = s], \; . \; . \; . \; (38^b)$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1 - 2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- r \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} - (1+r^2) \sum_{k+1}^{c} u^n Cos\{(nt - s)q\}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1 - 2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} - r \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- (1+r^2) \frac{u^k Cos\{(kt + t - s)q\} - u^{k+1} Cos\{(kt - s)q\} - u^c Cos\{(ct + t - s)q\} + u^{c+1} Cos\{(ct - s)q\}}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} s < ct < 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t}, \text{ breuk} \end{matrix}\right], \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38_c)$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1 - 2r\,Cos\,qs + r^2} \frac{Sin\,tq - u^c Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Sin\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} - r \frac{Cos\,tq - u - u^c Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+1} Cos\,ctq}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2} -$$

$$- \frac{1+r^2}{2} u^{k-1} - (1+r^2) \frac{u^k Cos\,tq - u^{k+1} - u^c Cos\{(ct + t - s)q\} + u^{c+1} Cos\{(ct - s)q\}}{1 - 2u\,Cos\,tq + u^2}\Big], \left[\begin{matrix} s < ct < 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t}, \text{ geheel} \end{matrix}\right], . (38_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx - u^c\,Sin\{(c+1)\,tx\} + u^{c+1}\,Sin\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\;\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\;\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\;\frac{Sin\,tq-u^c Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-r\,\frac{Cos\,tq-u-u^c\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}r(1+r^2)\,u^{c-1}-(1+r^2)\frac{u^k\,Cos\{(kt+t-s)q\}-u^{k+1}Cos\{(kt-s)q\}-u^c Cos\{(t+s)q\}+u^{c+1}Cos\,qs}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c} ct=2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{breuk}\end{array}\right], \ldots\ldots\ (38_e)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\;\frac{Sin\,tq-u^c Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+1}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-r\,\frac{Cos\,tq-u-u^c\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+1}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}(1+r^2)(u^{k-1}-ru^{c-1})-(1+r^2)\frac{u^k Cos\,tq-u^{k+1}-u^c\,Cos\{(t+s)q\}-u^{c+1}Cos\,qs}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big];\left[\begin{array}{c} ct=2s, \\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\text{geheel}\end{array}\right];.(38_f)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx - u^c\,Sin\{(c+1)\,tx\} + u^{c+1}\,Sin\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\;\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\;\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^c u^{m-1}\,Sin\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]+Ci\,[(ns-mt)\,q]\}-$$

$$-\,Cos\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q]+Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^c u^{m-1}\,Cos\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]-Ci\,[(ns-mt)]\,q\}+$$

$$+\,Sin\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q]\ -Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big];\ ..\ (39)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\,tx - u^c\,Sin\{(c+1)\,tx\} + u^{c+1}\,Sin\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\;\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\;\frac{qdx}{q^2-x^2} =$$

$$=\sum_1^c u^{m-1}\Big[Sin\,mtq.\,Ci\,(mtq)-Cos\,mtq.\,Si\,(mtq)\Big]+$$

$$+\sum_1^c u^{m-1}\,Sin\,mtq.\sum_1^\infty r^n\Big[Sin\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q]+Si\,[(ns-mt)\,q]\}+$$

$$+\,Cos\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]+Ci\,[(ns-mt)\,q]\}\Big]-$$

$$-\sum_1^c u^{m-1}\,Cos\,mtq.\sum_1^\infty r^n\Big[Cos\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q]-Si\,([ns-mt)\,q]\}-$$

$$-\,Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]-Ci\,[(ns-mt)\,q]\}\Big];\ ...\ (40)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin\, tu - u^c Sin\{(c+1)tx\} + u^{c+1} Sin\, ctx}{1-2u\, Cos\, tx+u^2} \frac{(1-r^2)\, Cos\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2} \frac{q dx}{q^2-x^2} =$$

$$= r \sum_1^c u^{m-1} \Big[Sin\, mtq.\, Ci(mtq) - Cos\, mtq.\, Si(mtq) \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2) \sum_1^c u^{m-1} Sin\, mtq. \sum_1^\infty r^{n-1} \Big[Sin\, nqs. \{ Si[(ns+mt)]q + Si[(ns-mt)q] \} +$$

$$+ Cos\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)]q + Ci[(ns-mt)q] \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{2}(1+r^2) \sum_1^c u^{m-1} Cos\, mtq. \sum_1^\infty r^{n-1} \Big[Cos\, nqs. \{ Si[(ns+mt)q] - Si[(ns-mt)q] \} -$$

$$- Sin\, nqs. \{ Ci[(ns+mt)q] - Ci[(ns-mt)q] \} \Big]; \quad . \; (41)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - u\, Cos\, tx - u^{c+1} Cos\{(c+1)tx\} + u^{c+2} Cos\, ctx}{1-2u\, Cos\, tx+u^2} \frac{Sin\, sx}{1-2r\, Cos\, sx+r^2} \frac{x dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} \frac{1-u\, Cos\, tq - u^{c+1} Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Cos\, ctq}{1-2u\, Cos\, tq+u^2}, \Big[ct < s\Big], \; . \; . \; . \; (42_a)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} \frac{1-u\, Cos\, tq - u^{c+1} Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Cos\, ctq}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} + \frac{1}{2}u^c\Big], \Big[ct = s\Big], \; . \; . \; (42_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} \frac{1-u\, Cos\, tq - u^{c+1} Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Cos\, ctq}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} + \sum_{k+1}^c u^n Cos\{(nt-s)q\}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} \frac{1-u\, Cos\, tq - u^{c+1} Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Cos\, ctq}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} +$$

$$+ \frac{u^{k+1} Cos\{(kt+t-s)q\} - u^{k+2} Cos\{(kt-s)q\} - u^{c+1} Cos\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2} Cos\{(ct-s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2},$$

$$\left[\begin{array}{c} s < ct < 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t}, \text{ breuk} \end{array}\right], \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42_c)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{r - Cos\, qs}{1-2r\, Cos\, qs+r^2} \frac{1-u\, Cos\, tq - u^{c+1} Cos\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Cos\, ctq}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} + \frac{1}{2}u^k +$$

$$+ \frac{u^{k+1} Cos\, tq - u^{k+2} - u^{c+1} Cos\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2} Cos\{(ct-s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2}\Big], \left[\begin{array}{c} s < ct < 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t}, \text{ geheel} \end{array}\right], \; . \; (42_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+\frac{1}{2}ru^c+$$

$$+\frac{u^{k+1}Cos\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}Cos\{(kt-s)q\}-u^{c+1}Cos\{(t+s)q\}+u^{c+2}Cos\,qs}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],\ \left[\begin{array}{c} ct=2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{breuk}\end{array}\right], \quad (42_e)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r-Cos\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+\frac{1}{2}(u^k+ru^c)+$$

$$+\frac{u^{k+1}\,Cos\,tq-u^{k+2}-u^{c+1}\,Cos\{(t+s)q\}+u^{c+2}\,Cos\,qs}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],\ \left[\begin{array}{c} ct=2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t},\ \text{geheel}\end{array}\right]; \quad (42f)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2}=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],\ [ct\leqq s], \quad \ldots\ldots (43_a)$$

$$=\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+r\sum_{k+1}^{c}u^n\,Sin\{(nt-s)q\}\Big]=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c} s<ct\leqq 2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t}\end{array}\right], \quad \ldots\ldots\ldots (43_b)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+\frac{1}{2}\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r^2\,\frac{u^{2k+1}\,Sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{2k+2}\,Sin\{(kt-s)2q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c}2s<ct<3s,\\ 2kt\leqq s<(2k+1)s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t}\end{array}\right],\;\ldots\;(43_c)$$

$$=\pi\Big[\frac{r\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+\frac{1}{2}\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r^2\,\frac{u^{2k+2}Sin\{(kt+t-s)2q\}-u^{2k+3}Sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{c+1}Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c}2s<ct<3s,\\ (2k+1)t\leqq s<(k+1)2t,\;k=\mathcal{E}\frac{s}{t}\end{array}\right];\;\ldots\ldots\ldots\;(43_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],\;[ct<s],\;\ldots\ldots\;(44_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}\,Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+(1+r^2)\sum_{k+1}^{c}u^n\,Sin\,\{(nt-s)q\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+r\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+(1+r^2)\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c}s<ct\leqq 2s,\\ k=\mathcal{E}\frac{s}{t}\end{array}\right],\;\ldots\;(44_b)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+r\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\,Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+(1+r^2)\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r(1+r^2)\,\frac{u^{2k+1}Sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{2k+2}Sin\{(kt-s)2q\}-u^{c+1}Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ 2kt<2s\leqq(2k+1)t\end{matrix},\ k=\mathcal{E}\,\frac{s}{t}\Big],\ .\ .\ .\quad (44_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs}{1-2r\,Cos\,qs+r^2}\,\frac{1-u\,Cos\,tq-u^{c+1}Cos\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Cos\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+r\,\frac{u\,Sin\,tq-u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}Sin\,ctq}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+(1+r^2)\,\frac{u^{k+1}\,Sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\,Sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\,Sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\,Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}+$$

$$+r(1+r^2)\,\frac{u^{2k+2}Sin\{(kt+t-s)2q\}-u^{2k+3}Sin\{(2k+t-2s)q\}-u^{c+1}Sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\,Cos\,tq+u^2}\Big],$$

$$\Big[\begin{matrix}2s<ct<3s,\\ (2k+1)t\leqq 2s<(k+1)2t\end{matrix},\ k=\mathcal{E}\,\frac{s}{t}-\frac{1}{2}\Big];\ .\ .\ .\ .\ .\quad (44_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-u\,Cos\,tx-u^{c+1}\,Cos\{(c+1)tx\}+u^{c+2}\,Cos\,ctx}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{Sin\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2}=$$

$$=\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\,Ci\,(nqs)-Cos\,nqs.\,Si\,(nqs)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_1^c u^m\,Sin\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q]-Si\,[(ns-mt)\,q]\}+$$

$$+Cos\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]+Ci\,[(ns-mt)\,q]\}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^c u^m\,Cos\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\,nqs.\,\{Si\,[(ns+mt)\,q]+Si\,[(ns-mt)\,q]\}-$$

$$-Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q]-Ci\,[(ns-mt)\,q]\}\Big];\ .\quad (45)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,tx - u - u^c\,Cos\{(c+1)\,tx\} + u^{c+1}\,Cos\,ctx}{1 - 2u\,Cos\,tx + u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$= \sum_1^c u^{m-1}\Big[Cos\,mtq.\,Ci\,(mtq) + Sin\,mtq.\,Si\,(mtq)\Big] +$$

$$+ \sum_1^c u^{m-1}\,Sin\,mtq \sum_1^\infty r^n\Big[Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q] - Ci\,[(ns-mt)\,q]\} -$$

$$- Cos\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q] - Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big] +$$

$$+ \sum_1^c u^{m-1}\,Cos\,mtq.\sum_1^\infty r^n\Big[Cos\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q] + Ci\,[(ns-mt)\,q]\} +$$

$$+ Sin\,nqs.\{Si\,[(ns+mt)\,q] + Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big]; \quad \ldots \quad (46)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,tx - u - u^c\,Cos\{(c+1)\,tx\} + u^{c+1}\,Cos\,ctx}{1 - 2u\,Cos\,tx + u^2}\,\frac{(1-r^2)\,Cos\,sx}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{xdx}{q^2-x^2} =$$

$$= r\sum_1^c u^{m-1}\Big[Cos\,mtq.\,Ci\,(mtq) + Sin\,mtq.\,Si\,(mtq)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c u^{m-1}\,Sin\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Sin\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q] - Ci\,[(ns-mt)\,q]\} -$$

$$- Cos\,nqs.\,\{Si\,[(ns+mt)\,q] - Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+r^2)\sum_1^c u^{m-1}Cos\,mtq.\sum_1^\infty r^{n-1}\Big[Cos\,nqs.\{Ci\,[(ns+mt)\,q] + Ci\,[(ns-mt)\,q]\} +$$

$$+ Sin\,nqs.\,\{Si\,[(ns+mt)\,q] + Si\,[(ns-mt)\,q]\}\Big]. \quad \ldots \quad (47)$$

22. Ook hier kan men door eenvoudige verbinding een aantal nieuwe uitkomsten afleiden. Als voorbeeld zullen wij de som en het verschil nemen van de integralen (36) en (44), die voor de grootste waarde van ct zijn gevonden. Alzoo verkrijgt men.

$$\int_0^\infty \frac{Cos\,sx - u\,Cos\{(s+t)x\} - u^{c+1}\,Cos\{(ct+t+s)x\} + u^{c+2}\,Cos\{(ct+s)x\}}{1-2u\,Cos\,tx+u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\,Cos\,sx+r^2}\,\frac{qdx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2)\,Sin\,qs - u\,Sin\{(t-s)q\} - u^{c+1}\,Sin\{(ct+t+s)q\} + u^{c+2}\,Sin\{(ct+s)q\} - r^2\big[u\,Sin\{(t+s)q\} -}{(1-2r\,Cos\,tq+u^2)}$$

$$\frac{- u^{c+1}Sin\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2}Sin\{(ct-s)q\}\big] + 2r(r - Cos\,qs)\big[u\,Sin\,tq - u^{c+1}Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+2}Sin\,ctq\big]}{(1-2r\,Cos\,qs+r^2)}\Big],$$

$$[ct \leqq s], \quad \ldots\ldots \quad (48_a)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos\, sx - u\, Cos\{(s+t)x\} - u^{c+1} Cos\{(ct+t+s)x\} + u^{c+2} Cos\{(ct+s)x\}}{1-2u\, Cos\, tx+u^2} \frac{1-r^2}{1-2r\, Cos\, sx+r^2} \frac{q\,dx}{q^2-x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2) Sin\, qs - u Sin\{(t-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t+s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct+s)q\} - r^2 \big[u Sin\{(t+s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} +}{(1-2u\, Cos\, tq+u^2)}$$

$$\frac{+\, u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}\big] + 2r(r - Cos\, qs)\big[u\, Sin\, tq - u^{c+1} Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Sin\, ctq\big]}{(1-2r\, Cos\, qs+r^2)} +$$

$$+ 2r^2 \frac{u^{k+1} Sin\{(kt+t-s)q\} - u^{k+2} Sin\{(kt-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2}\Big], \left[\begin{matrix} s < ct \leqq 2s, \\ k = \mathcal{E}\frac{s}{t} \end{matrix}\right], \quad (48_b)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2) Sin\, qs - u Sin\{(t-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t+s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct+s)q\} - r^2 \big[u Sin\{(t+s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} +}{(1-2u\, Cos\, tq+u^2)}$$

$$\frac{+\, u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}\big] + 2r(r - Cos\, qs)\big[u\, Sin\, tq - u^{c+1} Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Sin\, ctq\big]}{(1-2r\, Cos\, qs+r^2)} +$$

$$+ 2r^2 \frac{u^{k+1} Sin\{(kt+t-s)q\} - u^{k+2} Sin\{(kt-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} +$$

$$+ 2r^3 \frac{u^{2k+1} Sin\{(2kt+t-2s)q\} - u^{2k+2} Sin\{(kt-s)2q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-2s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2}\Big],$$

$$\left[\begin{matrix} 2s < ct < 3s, \\ 2kt \leqq s < (2k+1)t \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{s}{t}\right], \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48_c)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(1+r^2) Sin\, qs - u\, Sin\{(t-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t+s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct+s)q\} - r^2 \big[u\, Sin\{(t+s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} +}{(1-2u\, Cos\, tq+u^2)}$$

$$\frac{+\, u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}\big] + 2r(r - Cos\, qs)\big[u\, Sin\, tq - u^{c+1} Sin\{(c+1)tq\} + u^{c+2} Sin\, ctq\big]}{(1-2r\, Cos\, qs+r^2)} +$$

$$+ 2r^2 \frac{u^{k+1} Sin\{(kt+t-s)q\} - u^{k+2} Sin\{(kt-s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2} +$$

$$+ 2r^3 \frac{u^{2k+2} Sin\{(kt+t-s)2q\} - u^{2k+3} Sin\{(2kt+t-2s)q\} - u^{c+1} Sin\{(ct+t-2s)q\} + u^{c+2} Sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\, Cos\, tq+u^2}\Big];$$

$$\left[\begin{matrix} 2s < ct < 3s, \\ (2k+1)t < s \leqq (k+1)2t \end{matrix}, k = \mathcal{E}\frac{s}{t} - \frac{1}{2}\right]; \quad \ldots \quad (48_d)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos sx - u\cos\{(s-t)x\} - u^{c+1}\cos\{(ct+t-s)x\} + u^{c+2}\cos\{(ct-s)x\}}{1-2u\cos tx+u^2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos sx+r^2}\,\frac{q\,dx}{q^2-x^2} =$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{(1+r^2)\sin qs-u\sin\{(t+s)q\}+u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}-u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}+r^2\Big[u\sin\{(t-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t+s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct+s)q\}\Big]+2r(1-r\cos qs)\Big[u\sin tq-u^{c+1}\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\sin ctq\Big]}{(1-2u\cos tq+u^2)(1-2r\cos qs+r^2)},\quad \Big[ct\leqq s\Big],\quad \ldots \quad (49_a)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Bigg[\frac{(1+r^2)\sin qs-u\sin\{(t+s)q\}+u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}-u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}+r^2\Big[u\sin\{(t-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t+s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct+s)q\}\Big]+2r(1-r\cos qs)\Big[u\sin tq-u^{c+1}\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\sin ctq\Big]}{(1-2u\cos tq+u^2)(1-2r\cos qs+r^2)}+$$

$$+2\,\frac{u^{k+1}\sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}\Bigg],\quad \left[\begin{array}{c} s<ct\leqq 2s,\\ k=\mathcal{E}\,\frac{s}{t}\end{array}\right],\quad \ldots \quad (49_b)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Bigg[\frac{(1+r^2)\sin qs-u\sin\{(t+s)q\}+u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}-u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}+r^2\Big[u\sin\{(t-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t+s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct+s)q\}\Big]+2r(1-r\cos qs)\Big[u\sin tq-u^{c+1}\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\sin ctq\Big]}{(1-2u\cos tq+u^2)(1-2r\cos qs+r^2)}+$$

$$+2\,\frac{u^{k+1}\sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}+$$

$$+2\,\frac{u^{2k+1}\sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{2k+2}\sin\{(kt-s)2q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}\Bigg],$$

$$\left[\begin{array}{c} 2s<ct<3s,\\ 2kt\leqq 2s<(2k+1)t\end{array},\ k=\mathcal{E}\,\frac{s}{t}\right],\quad \ldots\ldots\ldots \quad (49_c)$$

$$=\frac{\pi}{2}\Bigg[\frac{(1+r^2)\sin qs-u\sin\{(t+s)q\}+u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}-u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}+r^2\Big[u\sin\{(t-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t+s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct+s)q\}\Big]-2r(1-r\cos qs)\Big[u\sin tq-u^{c+1}\sin\{(c+1)tq\}+u^{c+2}\sin ctq\Big]}{(1-2u\cos tq+u^2)(1-2r\cos qs+r^2)}+$$

$$+2\,\frac{u^{k+1}\sin\{(kt+t-s)q\}-u^{k+2}\sin\{(kt-s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t-s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct-s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}+$$

$$+2\,\frac{u^{2k+2}\sin\{(kt+t-s)2q\}-u^{2k+3}\sin\{(2kt+t-2s)q\}-u^{c+1}\sin\{(ct+t-2s)q\}+u^{c+2}\sin\{(ct-2s)q\}}{1-2u\cos tq+u^2}\Bigg].$$

$$\left[\begin{array}{c} 2s<ct<3s,\\ (2k+1)t<2s\leqq(k+1)2t\end{array},\ k=\mathcal{E}\left(\frac{s}{t}-\frac{1}{2}\right)\right].\quad \ldots \quad (49_d)$$

Ten opzichte van deze bepaalde integralen doen zich twee wijzen voor, om tot eenvoudiger uitkomsten te geraken. Vooreerst stelle men in (48_a) en (49_a), die alleen voor dit bijzondere geval gelden, $t = s$ en verder $u = r$: dan worden de beide noemers in de integraal zelve gelijk, en hetzelfde heeft plaats met de noemers, die in de waarde der bepaalde integralen voorkomen. Men verkrijgt dan de volgende integralen.

$$\int_0^\infty \frac{Cos\, sx - r\, Cos\, 2sx - r^{c+1}\{Cos\,(c+2)sx\} + r^{c+2}\, Cos\,\{(c+1)\,sx\}}{(1-2r\, Cos\, sx + r^2)^2}\, \frac{(1-r^2)\, q dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1+r^2)\, Sin\, qs - r\,.\,0 - r^{c+1} Sin\,\{(c+2)qs\} + r^{c+2} Sin\,\{(c+1)qs\} - r^2\left[r\, Sin\, 2qs - r^{c+1}\, Sin\, cqs + r^{c+2}\, Sin\,\{(c-1)qs\}\right] + 2r(r - Cos\, qs)\left[r\, Sin\, qs - r^{c+1}\, Sin\,\{(c+1)qs\} + r^{c+2}\, Sin\, cqs\right]}{(1-2r\, Cos\, qs + r^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1-r^2)(Sin\, qs - r^{c+2}\, Sin\, cqs) + (r^2 + r^3)\left[2\, Sin\, qs - Sin\, 2qs - 2r^c\, Sin\{(c+1)qs\} + r^{c+1}\, Sin\, cqs\right] + (r^{c+1} - r^{c+2})\left[r^2\, Sin\,\{(c-1)qs\} + r\, Sin\,\{(c+1)qs\} - Sin\,\{(c+2)\,qs\}\right]}{(1-2r\, Cos\, qs + r^2)^2}; \quad \ldots\ldots (50)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos\, sx - r - r^{c+1}\, Cos\, csx + r^{c+2}\, Cos\,\{(c-1)\,sx\}}{(1-2r\, Cos\, sx + r^2)^2}\, \frac{(1-r^2)\, q dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1+r^2) Sin\, qs - r\, Sin\, 2qs + r^{c+1} Sin\, cqs + r^{c+2}\, Sin\,\{(c-1)qs\} + r^2\left[r.\,0 - r^{c+1}\, Sin\,\{(c+2)qs\} + r^{c+2} Sin\,\{(c+1)qs\}\right] + 2r(1 - r\, Cos\, qs)\left[r\, Sin\, qs - r^{c+1}\, Sin\,\{(c+1)qs\} + r^{c+2}\, Sin\, cqs\right]}{(1-2r\, Cos\, qs + r^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{(1+3r^2)(Sin\, qs - r^{c+1} Sin\, cqs) - (r+r^3)\left[Sin\, 2qs + r^{c+1}\, Sin\,\{(c-1)qs\}\right] - 2r^{c+2}\, Sin\{(c+1)qs\}}{(1-2r\, Cos\, qs + r^2)^2}\,.(51)$$

Vervolgens stelle men in dezelfde integralen (48_a) en (49_a) wederom $t = s$, maar neme nu $r = -u$; dan wordt het produkt des noemers onder het integraalteeken

$$(1 + 2u\, Cos\, sx + u^2)(1 - 2u\, Cos\, sx + u^2) = (1+u^2)^2 - (2u\, Cos\, sx)^2 = 1 - 2u^2\, Cos\, 2sx + u^4:$$

en evenzoo komt er voor het produkt der noemers in de waarde der integralen $1 - 2u^2\, Cos\, 2qs + u^4$. En nu kan men weder gemakshalve r voor u schrijven. Dan komen er de volgende uitkomsten te voorschijn.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\, sx - r\,\mathrm{Cos}\, 2sx - r^{c+1}\,\mathrm{Cos}\{(c+2)sx\} + r^{c+2}\,\mathrm{Cos}\{(c+1)sx\}}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2sx + r^4}\;\frac{(1-r^2)\,q\,dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(1+r^2)\mathrm{Sin}\, qs - r.0 - r^{c+1}\mathrm{Sin}\{(c+2)qs\} + r^{c+2}\mathrm{Sin}\{(c+1)qs\} + r^2\left[r\,\mathrm{Sin}\, 2qs - r^{c+1}\mathrm{Sin}\, cqs + r^{c+2}\,\mathrm{Sin}\{(c-1)qs\}\right] + 2r(r+\mathrm{Cos}\, qs)\left[r\,\mathrm{Sin}\, qs - r^{c+1}\mathrm{Sin}\{(c+1)qs\} + r^{c+2}\,\mathrm{Sin}\, cqs\right]}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2qs + r^4} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(1-r^2)(\mathrm{Sin}\, qs - r^c\,\mathrm{Sin}\, cqs) + (r^2-r^3)\,\mathrm{Sin}\left[2qs - r^c\,\mathrm{Sin}\{(c-1)qs\}\right] + (r^2+r^3)\left[2\mathrm{Sin}\, qs - r^{c+1}\mathrm{Sin}\{(c+2)qs\}\right] - (r^{c+2}+r^{c+3})\left[\mathrm{Sin}\{(c-1)qs\} - r\,\mathrm{Sin}\, cqs\right]}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2qs + r^4}, \quad \ldots (52)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\, sx - r - r^{c+1}\,\mathrm{Cos}\, csx + r^{c+2}\,\mathrm{Cos}\{(c-1)sx\}}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2sx + r^4}\;\frac{(1-r^2)\,q\,dx}{q^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(1+r^2)\mathrm{Sin}\, qs - r\,\mathrm{Sin}\, 2qs + r^{c+1}\mathrm{Sin}\, cqs - r^{c+2}\mathrm{Sin}\{(c-1)qs\} + r^2\left[r.0 + r^{c+1}\mathrm{Sin}\{(c+2)qs\} + r^{c+2}\,\mathrm{Sin}\{(c+1)qs\}\right] - 2r(1+r\,\mathrm{Cos}\, qs)\left[r\,\mathrm{Sin}\, qs - r^{c+1}\,\mathrm{Sin}\{(c+1)qs\} + r^{c+2}\,\mathrm{Sin}\, cqs\right]}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2qs + r^4} +$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(1-r^2)(\mathrm{Sin}\, qs + r^{c+1}\,\mathrm{Sin}\, cqs) - (r+r^3)\left[\mathrm{Sin}\, 2qs + r^{c+2}\,\mathrm{Sin}\{(c-1)qs\}\right]}{1 - 2r^2\,\mathrm{Cos}\, 2qs + r^4} \quad \ldots\ldots (53)$$

Met het aanwijzen van den weg, hoe men hier, even als in N°. 20, tot een zeker aantal bijzondere uitkomsten kan geraken, kan hier worden volstaan. De wijze, waarop in deze § verschillende integralen gevonden worden, moge strekken om opmerkzaam te maken op de voorzichtigheid, die men behoort in acht te nemen bij de toepassing der gevonden algemeene herleidingsformulen (XIII) tot (XXIII): geheel overeenkomstig trouwens aan hetgeen daaromtrent in het begin van dit opstel werd aangemerkt.

Te Verbeteren:

Blz.	Reg.	in plaats van:	te lezen:
19	3 v. o.	$+ Ci$	$- Ci$
30	7 v. o.	$- Sin\ nqs$	$+ Sin\ nqs$
〃	4 en 1 v. o.	$+ Sin\ nqs$	$- Sin\ nqs$
〃	1 v. o.	$+ Ci$	$- Ci$

VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VIJFTIENDE DEEL.

MET PLATEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1875.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

4567

INHOUD

VAN HET

VIJFTIENDE DEEL.

(4)

TWEEDE ONTWERP

EENER

NAAMLIJST VAN LOGARITHMENTAFELS,

MET DE OPGAVE VAN DEN TIJD, DE PLAATS EN DE GROOTTE, ALSMEDE VAN HET AANTAL DECIMALEN, ALLES ZOO VERRE BEKEND.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1875.

TWEEDE ONTWERP

EENER

NAAMLIJST VAN LOGARITHMENTAFELS,

MET DE OPGAVE VAN DEN TIJD, DE PLAATS EN DE GROOTTE, ALSMEDE VAN HET AANTAL DECIMALEN, ALLES ZOO VERRE BEKEND.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

In mijn stukje »Iets over Logarithmentafels" van 1862 [*Verslagen en Mededeelingen,* Deel XIV] komt als Bijlage II zulk eene lijst voor, van 267 tafels. Sedert is die aangegroeid en verbeterd, zoodat zij nu 553 tafels bevat.

Daarvan komen er voor *Nederland* 57, als:

Amsterdam	34	's Hage	2
Gouda	5	Breda	2
Leiden	5	Harlingen	1
Middelburg	3	Deventer	1
Haarlem	3	Alkmaar	1

Voor *Engeland* 144, als:

London	124	Dublin	1
Edinburgh	16	Cirencester	1
Glasgow	2		

Voor *Duitschland* 178, als:

Leipzig	35	Sagan	1
Berlin	26	Helmstadt	1
Wien	22	Witteberg	1
Hamburg	8	Tyrnau	1
Augsburg	7	Friedenburg	1
Frankfurt	5	Lubeck	1
Halle	4	Osnabrück	1
Giessen	4	Gotha	1
Altona	4	Erlangen	1
Hannover	4	Salzburg	1
Marburg	4	Breslau	1
Cöln	3	Grätz	1
Nürnberg	3	Heidelberg	1
Danzig	3	München	1
Jena	3	Sulzbach	1
Coburg	3	Regensburg	1
Braunschweig	3	Innsbrück	1
Strassburg	2	Bremen	1
Dresden	2	Elberfeld	1
Mainz	2	Eisenberg	1
Darmstadt	2	Iserlohn	1
Brunn	2	Tübingen	1
Prag	1	Stuttgart	1
Ulm	1	Hermannstadt	1
Thorn	1	Greifswald	1

Voor *Frankrijk* 91, als:

Paris	79	St. Malo	2
Lyon	3	Dieppe	1
Bordeaux	3	Lille	1
Avignon	2		

Voor *Italie* 23, als:

Padova	5	Panormi	1
Bologna	3	Modena	1
Fiorenze	2	Verona	1
Pesaro	2	Roma	1
Torino	2	Milano	1
Venezia	1	Acqui	1
Neapoli	1	Trento	1

Voor *Denemarken, Zweden* en *Noorwegen* 22, als:

Stockholm	9	Bergen	1
Kiöbenhavn	5	Helsingfors	1
Haffnia	3	Upsala	1
Aboa	1	Kiel	1

Voor *Spanje* en *Portugal* 9, als:

Madrid	6	Toledo	1
Lissabon	2		

Voor de *Noord-Amerikaansche Staten* 9, als:

New-York	8	Boston	1

Voor *Rusland* en *Polen* 3, als:

St. Petersburg	2	Warschau	1

Voor *Zwitserland* 3, als:

Winterthur	1	Zürich	1
Geneve	1		

Voor *China* 2, als:

Pekin	1	Shanghae	1

Voor *Britisch Indië*	1:	Allahadad
Turkije	1:	Bulak
België	1:	Bruxelles

Wat betreft de spoedige opeenvolging der tafels, wat men zoude kunnen noemen de betrekkelijke dichtheid ten opzichte van tijd, moge het volgende dienen:

Van 1614 tot 1649 verschenen er 47 tafels.
1650 tot 1699 verschenen er 51 tafels.
1700 tot 1749 verschenen er 48 tafels.
1750 tot 1799 verschenen er 73 tafels.
1800 tot 1819 verschenen er 47 tafels.
1820 tot 1839 verschenen er 81 tafels.
1840 tot 1849 verschenen er 71 tafels.
1850 tot 1859 verschenen er 54 tafels.
1860 tot 1869 verschenen er 56 tafels.
1870 tot 1873 verschenen er 25 tafels.

Eindelijk vindt men voor de rangschikking naar het aantal decimalen (voor zoo verre dit bekend is):

8 tafels die 3 decimalen geven.
31 tafels die 4 decimalen geven.
91 tafels die 5 decimalen geven.
83 tafels die 6 decimalen geven.
178 tafels die 7 decimalen geven.
8 tafels die 8 decimalen geven.
4 tafels die 9 decimalen geven.
13 tafels die 10 decimalen geven.
3 tafels die 11 decimalen geven.
1 tafel die 12 decimalen geeft.
2 tafels die 13 decimalen geven.
9 tafels die 14 decimalen geven.
3 tafels die 15 decimalen geven.

3	tafels	die	18	decimalen	geven.
1	tafel	die	19	decimalen	geeft.
3	tafels	die	20	decimalen	geven.
2	tafels	die	21	decimalen	geven.
2	tafels	die	27	decimalen	geven.
2	tafels	die	32	decimalen	geven.
1	tafel	die	50	decimalen	geeft.
2	tafels	die	60	decimalen	geven.
2	tafels	die	61	decimalen	geven.
1	tafel	die	102	decimalen	geeft.

waarbij dient opgemerkt te worden, dat de tafels met 4, 5 of 6 decimalen, grootendeels omstreeks het begin en in het eerste derde gedeelte dezer eeuw, die met 7 decimalen grootendeels vóór en ook weder na dien tijd voorkomen.

Een ? is er telkens voor den datum geplaatst, wanneer de opgegeven uitgaaf eene latere is, en dus het werk eigenlijk hoogerop in de lijst te huis behoorde. Voor den titel geplaatst duidt dit teeken ? aan, dat er omtrent dit werk twijfel bestaat: eveneens is het achter het jaartal van een herdruk gevoegd, wanneer die herdruk niet zeker is.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1614	7	4°	J. Napier, Mirifica Canonis Descriptio. *Edinburgh.* Herdruk: 1619 door zijn zoon.
1616	6	4°	E. Wright, Logarithms. *London.*
1617	14	8°	H. Briggs, Chilias prima. *London.*
1618	7	4°	B. Ursinus, Trigonometria. *Köln.*
1619	7	4°	J. Napier, Canonis constructio. *Edinburgh.*
1619	7	4°	J. Speidell, New Logarithms. *London.* Herdruk: 2e 1620, 3e 1621, 5e 1623, 6e 1624, 7e 1624, 10e 1628 (laatste).
1620	7	4°	J. Napier (door B. Vincent), Description. *Lyon.*
1620	7	8°	E. Gunter, Canon. *London.*
1620	9	4°	J. Byrgius, Progresse Tabulen. *Prag.*
1624	14	fol.	H. Briggs, Arithmetica Logarithmica. *London.*
1624	7	8°	E. Gunter (door E. Wingate), Canon. *London.* Herdruk: 2e 1636, 4e 1662.
1624	8	4°	B. Ursinus, Canon. *Colon.*
1624	7	4°	J. Kepler, Chilias. *Marburg.*
1625	8	fol.	E. Wingate, Arithmetique logarithmetique. *Paris.* Herdruk: 1628.
1625	7	4°	J. Kepler, Supplementum. *Marburg.*
1626	7	8°	E. de Decker, Nieuwe Telkonst. *Gouda.*
1626	7	8°	? Canon Mesotetologisticus. *Leiden.*
1626	10	8°	D. Henrion, Traicté. *Paris.*
1627	5	fol.	J. Kepler, Tabul. Rudolphinae. *Ulm.*
1628	10	fol.	A. Vlack, Arithmetica Logarithmica. *Gouda.* Ook met franschen titel.
1628	7	4°	[J. Napier], Zehntausend Logarithmen. *Nürnberg.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1630	5	12°	C. Grienberger, Elementa. *Thorn.*
1630	6	8°	J. Bartsch, Trichil. Hexacosias. *Sagan.*
1630	7	8°	J. Faulhaber, Ingenieurs-Schul. *Frankfurt.*
1631	7	4°	J. Norwood, Trigonometrie. *London.*
			Herdruk: 2e 1641, 3e 1651, 4e 1656, 7e 1678, 1699.
1631	10	fol.	H. Briggs (door G. Miller), Logarithmicall Arithmetike. *London.*
			is eigenlijk het werk van A. Vlack. 1628.
1631	7	8°	J. Faulhaber, Logarithmi. *Augsburg.*
1631	7	4°	[J. Napier], Logarithmen. *Augsburg.*
1632	8	4°	B. Cavalieri, Directorium. *Bologna.*
1632	10	8°	J. Faulhaber, Canon. *Augsburg.*
1633	10	fol.	H. Gellibrand, Trigonometria Britannica. *Gouda.*
1633	10	fol.	A. Vlack, Trigonometria Artificialis. *Gouda.*
1633	7, 10	8°	N. Roe, Tabulae. *London.*
1633	7	4°	J. B. Morin, Trigonometria. *Paris.*
1634	6	8°	P. Crüger, Praxis. *Amsterdam.*
1634	6	8°	Herigone, Cursus mathematicus. *Paris.*
			Herdruk: 1644.
1634	7	4°	G. L. Frobenius, Clavis. *Hamburg.*
1635	6	8°	P. Crüger, Doctrina. *Danzig.*
			Herdruk: Amsterdam, 1653.
1635	6	12°	[Wingate], Logar. Table. *London.*
			Herdruk: 1648.
1635	7	8°	T. W[ells], Sciographia. *London.*
1635	7	8°	H. Gellibrand, Institution Trigonometricall. *London.*
			Herdruk: 166.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1635	6	fol.	J. Bartsch, Tabulae Novae. *Sagan.*
1636	7	8°	? A. Vlack, Tafelen. *Gouda.*
1637	9	4°	Canon. *Nürnberg.*
1637	7	8°	T. Wells, Compleat Art of Dyalling. *London.*
1643	7	4°	B. Cavalieri, Trigonometria. *Bologna.*
1648	7	12°	L. Middendorff, Tabulae. *Coloniae.*
1650	7	4°	G. L. Frobenius, Dilucidationes. *Helmstadt.*
1650			Buttner, *Frankfort.*
1651	6	fol.	V. Wing, Harmonicon Coeleste. *London.*
1651	7	8°	A. Vlack, Tabulae. *Leiden.*
			Herdruk: 1670.
1651	7	8°	N. Kaufmann, Trigonometria. *Dantisci.*
1654	6	12°	J. Newton, Iustitutio. II Vol. *London.*
1657	7	4°	W. Oughtred, Trigonometrie. *London.*
1657			J. Newton, Help. *London.*
1657			Canones.
1657	7	4°	J. B. Morin, Trigonometrie canonique. *Paris.*
			Herdruk: 1757.
1658	7	8°	Neper, Arcanum. *Lyon.*
1658	8	fol.	J. Newton, Trigonometria Britannica. *London.*
1658	5	fol.	A. de Graaf, Groote Zeevaert. *Amsterdam.*
1659	7	4°	C. M. Anhaltin, Slot en Sleutel. *Amsterdam.*
1660	7	4°	C. Hz. Gietermaker, Verguld Licht. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1671, 1683, 1697, 1707, 1712, 1728, 1742, 1774.
1660	7	12°	Th. Beutel, Lustgarten. *Leipzig.*
			Herdruk: 1e 1677, 1681, 4e 1685, 5e 1703, 6e 1714, 7e 1729.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1661	7	8°	A. Vlack, Tables. *den Haag.*
			Herdruk: 1665, 1666.
1662	7	12°	A. Strauchius, Tabulae. *Witteberg.*
1664	7	8°	A. Vlacq (door Ozanam), Tables. *Paris.*
			Herdruk: 1732.
1665	7	8°	A. Vlack, Tafelen. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1673, 1681, 1683, 1689, 1695, 1706, 1721, 1742, 1784.
1665	7	8°	A. Vlack (door A. de Graaf), Konstige Tafelen. *Amsterdam.*
1668	6	8°	J. Newton, Scale of Interest. *London.*
1668	5	8°	M. G. Denys, Art de Naviguer. *Dieppe.*
1668		4°	N. Mercator, Logarithmotechnia. *London.*
1668		4°	J. Gregorius, Methodus. *London.*
1669	6	8°	Philippes, Mathematical Manual. *London.*
166.			Institutio Mathematica. *London.*
1670	7	8°	A. Vlack, Tables. *Lyon.*
			Herdruk: 1760.
1671	7	8°	D. Rembrandtsz van Nierop, Logarithmus Tafelen. *Harlingen.*
?1673	7	4°	E. Gunter (by W. Leybourn), the Works of, London. 5th Ed.
1674	7	fol.	G. Schott, Cursus. *Frankfurt.*
1675	7	fol.	J. Keppler, Heptacosias (door J. H. S. Q. S.). *Friedenburg.*
1679	7	4°	A Table. *London.*
1681	7	4°	J. Moore, New System. II Vol. *London.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1681	7	4°	J. MOORE, Table. *London.*
1684	7	8°	CH. GRÜNEBERG, Pandora. *Berlin.* Herdruk: 1700.
1685	7	8°	OZANAM, Tables des Sinus. *Paris.* Herdruk: 1697, 1699, 1741.
1685	7	8°	C. J. VOOGHT, Taafelen Sinuum. *Amsterdam.*
1689	7	4°	J. PRESTET, Elements. *Paris.* Herdruk: 1694.
1690	7	fol.	C. F. M. DECHALES, Cursus seu Mundus. *Paris.*
1690	7	fol.	W. LEYBOURN, Cursus Mathematicus. *London.*
1690	7	12°	CH. GRÜNEBERG, Tabulae. *Berlin.* Herdruk: 1703.
1691		8°	J. J. ZIMMERMANN, Logarithmische Rechnung. *Hamburg.*
1694		8°	T. SZEKELI, Tyrnau.
1695	60	4°	E. HALLEY, Compendious Method (Phil. Trans. N°. 16). *London.*
1695	10	8°	Epitome. *Pataviae.*
1696		8°	L. BESELIN, Trigonometria. *Hafniae.*
1696	5	8°	H. MEISZNER, Geometria Tyronica. *Hamburg.*
1697	7	8°	[J. SELLER], A Table. *London.* Herdruk: 1705.
1698	7	4°	C. J. VOOGHT, Taeffelen der Sinuum. *Amsterdam.* Herdruk: 1707.
1699	5	fol.	J. WING, Compleat Body. *London.*
1700	6	8°	F. BARTSCH (door EISENSCHMID), Tabulae Manuales. *Strassburg.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1700	7	8°	A. STRAUCH (door L. C. STURM), Tabulae. *Amsterdam.*
1703	7	8°	A. DE GRAAF, Schatkamer. 2e dr. *Amsterdam.*
			NB. De 1e uitgave (van 1660) heeft geene tafels.
1704	7	4°	J. H[ARRIS], Table. *London.*
1704	7	4°	J. HARRIS, Lexicon. *London.*
			Herdruk: 1710, 1723.
1705		4°	G. RONDELLI, Trigonometria. *Bologna.*
?1705	7	4°	J. SELLER, Practical Navigation. *London.*
			Herdruk: 1723.
1705	7	8°	H. SHERWIN, Mathematical Tables. *London.*
			Herdruk: 1e 1705, 1706, 1717; 2e 1724 (?), 1726; 3e 1741, 1742, 1751 (?); 4e 1761, 1763 (?); 5e 1771, 1772.
1705	7	4°	C. H. GIETERMAKER (door A. VAN POULLE), Verguld Licht. *Middleburg.*
1709	7	8°	J. A. VAN DAM, Hoornse Schatkamer. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1720, 1728.
1711	7	8°	C. WOLFF, Tabulae. *Halle.*
			Herdruk: 1728, 1744, 1770, 1772, 1789.
1712		4°	LASTDRAGER, Konst der Stuurlieden. *Amsterdam.*
			Herdruk: 3e 1742.
1714	6	8°	E. WELLS, The Young Gentleman's Trigonometry. *London.*
1714	7	8°	P. HELLINGWERFF, Bosschieterije. *Amsterdam.*
1717	61	4°	[ABR. SHARP], Geometry Improved. *London.*
1717	9	4°	J. LONG, New Method. (Phil. Trans. N°. 339). *London.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1717	60	4°	BROOK TAYLOR, Attempt. (Phil. Trans. N°. 352). *London*.
1721	10	fol	A. VLACK, (chineesch) Magnus Canon. II Vol. *Pekin*.
1724		8°	F. SIDELLI, Tabellen. *Jena*.
1725	7	8°	Begriff derjenigen Tafeln. *Giessen*.
1725	7	8°	A. VLACK, (hoogduitsch) Tabellen. *Leipzig*.
			Herdruk: 1738, 1768, 1778.
1725	6	8°	J. B. WIEDEBURG, Einleitung. *Jena*.
			Herdruk: 1735.
1726	7	8°	J. G. LIEBKNECHT, Tabulae. *Giessen*.
1727	7	8°	K. DE VRIES, Konst der Stuurlieden. *Amsterdam*.
			Herdruk: 4e 1751, 1781, 1801, 1818.
1728	7	8°	J. M. POETIUS, Anleitung. *Franfurt*.
1732	32	8°	C. VON CLAUSBERG, Demonstrative Rechenkunst. *Leipzig*.
			Herdruk: 1748, 1762, 1773.
1732			S. RICARD, Traité de Commerce. *Amsterdam*.
1732	32	4°	C. DE CLAUSBERG, Arithmetica Demonstrans. Nov. Act. Erud. *Leipz*.
1735	8	4°	J. KIRKBY, Arithmetical Institutions. *London*.
?1735		8°	DE MAZELIEU, Elements. 3e Ed. *Paris*.
1736		4°	A. CAPELLI, Astrosophia. *Venetie*.
1737			J. G. KRUSE, Geldtabellen. *Hamburg*.
			Herdruk: 1756.
1737			JOH. TH. GRAUMANN, Licht des Koopmans. *Amsterdam*.
1740			JOH. TH. GRAUMANN, Lumière. *Amsterdam*.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1741	7	4°	DEPARCIEUX, Nouveaux Traités. *Paris.*
1742	11	fol.	J. DODSON, Antilogarithmic Canon. *London.*
1742	7	4°	W. GARDINER, Tables. *London.*
1742	7	8°	[RICHTER], Mathematisches Lexicon. II. Th. *Leipzig.*
1742	7	8°	C. WOLFF (door N. EPKEMA), Nodige Tafelen. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1765.
1742			J. E. KRUSE, Hamburger Tabellen. *Amsterdam.*
1743	7	8°	RIVARD, Tables des Sinus. *Paris.*
			Herdruk: 2e 1750, 3e 1757.
1744	21	4°	A. F. MARCI, Quadrata Magica. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1791.
1746	5	4°	[LE MONNIER], Institutions Astronomiques. *Paris.*
1747	5	8°	Anweisung zur Geometrie. *Frankfurt.*
1747	7	fol.	J. DODSON, Calculator. *London.*
1747			R. LEVI, Arbitrage Tabellen.
			Herdruk: 1748, 1760.
1748	7	8°	A. VLACK (door J. J. HENTSCHEN), Tabula. *Leipzig.*
			Herdruk: 2e 1757, 3e 1763.
1749	7	4°	[F. G. DE OPPEL], Anleitung. *Dresden.*
			Herdruk: 1752.
1750	7	4°	Elementa Mathem. pract. *Wien.*
			Herdruk: 1778.
1752			J. C. NELKENBRECHER.
1752	7	8°	Trigonometrie. *Neapoli.*
1754	18	8°	W. O. REITZ, Nieuw gevonden berekening. (Verh. Holl. Maatsch.) *Haarlem.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1754		4°	F. G. Bonhomo, Trigonometria. *Panormi.*
1754	6	4°	Delagrive, Trigonometrie. *Paris.*
1755	18	8°	W. O. Reitz, De berekening (Verh. Holl. Maatsch.) *Haarlem.*
1755	13	8°	Camus, Cours. *Paris.*
1756	5	8°	J. A. von Segner, Elementa. *Halle.* Herdruk: 1767.
1756			J. E. Kruse, Wechsel Entscheider. *Hamburg.*
1760	6	4°	H. Briggs, Canon Logarithmorum. *Wien.*
1760	6	8°	L. de Lalande & Lacaille, Tables. *Paris.* Herdruk: 1768.
1760	7	8°	D. Klinkenberg, Sinus-Logarithmus-getallen (Verh. Holl. Maatsch.) *Haarlem.*
1762	6	8°	T. Beutel (door J. C. Tarnovius), Lustgarten. *Leipzig.*
1763			Tabellen, *Stockholm.*
1764	7	8°	W. Emerson, Elements of Trigonometry. 2d Ed. *London.* NB. de 1e druk bevat geen tafels.
1764	5	8°	Lalande, Logarithmes logistiques (Conn. des Temps). *Paris.*
1766	6	8°	J. de Lalande (door Marie), Tables. *Paris.* Herdruk: 1768, 1781, 1791, 1799.
1767		8°	A. Reid, Essay. *London.*
1769		4°	J. Toaldo, Tavole. *Padova.* Herdruk: 3e 1794.
1770	7	8°	J. H. Lambert, Zusätze. *Berlin.*
1770	7	4°	W. Gardiner (door Pezenas, Fransch), Tables. *Avignon.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
			Herdruk: *Paris* 1773. fol. (?)
1772			A. K. Cohen.
1772			Gherli. *Modena.*
1773		8°	C. B. Funck, Anfangsgründe. *Leipzig.*
1774			F. K. von Stamford.
?1774			G. la Borde, Boekhouden. *Amsterdam.* 2e Dr.
1774	7	8°	B. Doun, Britisch Mariner's Assistant. *London.*
			Herdruk: 3e 1789.
1775	7	8° & 4°	B. J. Douwes, Tafelen. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1779.
1775	6	4°	F. Berthoud, Les Longitudes. *Paris.*
1777	8	4°	L. Unterberger, Tafeln. *Wien.*
1778	7	8°	J. C. Schulze, Sammlung. II Th. *Berlin.*
1778		8°	J. Smidel, Elementa. *Vratisl.*
1779	5	8°	D. Bates, Tables. *Dublin.*
			Herdruk: 1781.
1781	21	4°	Tables Logar. Hyperbol. *Paris.*
1782	7	8°	W. Gardiner (door Canova & Ricco), Tavole. *Florence.*
			Herdruk: 3e 1810.
1783	7	8°	W. Gardiner (door F. Callet), Tables. *Paris.*
			Herdruk: *Verona.* 1811.
1783	7	4°	G. Vega, Tafeln. II Bde. *Leipzig.*
			Herdruk: 2e, 1797. 3e 1814.
1784	6	8°	S. Dunn. *London.*
1784		4°	J. M. Geuss. *Copenhagen.*
1784			Parisani. *Fiorenze.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1785	20,7	8°	C. Hutton, Mathematical Tables. *London.*
			Herdruk: 2e 1794, 3e 1801, 5e 1807, 6e 1810, 7e 1822, 1849.
1786	14	8°	K. K. Reitz, Nieuwe Handl. (Verh. Zeeuwsch Gen.). *Middelburg.*
1786	19	4°	Bürja, Méthode (Mem. de Berl.). *Berlin.*
1787	27	4°	D. Stewart, Account. *London.*
1787	4	8°	J. H. van Swinden, Verhandeling. *Amsterdam.*
			Herdruk: 2e 1789. 3e 1796. 4e 1802.
		8°	W. Garrard, Copious Tables.
1789	7	8°	A. Vlack (door J. J. Ebert), Tabulae. *Leipzig.*
1790			Herdruk: 1808.
	14	8°	K. K. Reitz, Vervolg (Verh. Zeeuwsch Gen.).
1790			*Middelburg.*
1790			M. Wagner.
1790	5	8°	J. Mellitao di Mato, Taboas. *Lissabon.*
1791	14	4°	Fr. Maseres, Scriptores Logarithmici. *London.*
			Bevat herdruk van Kepler, Napier & J. Speidell.
1791	7	8°	W. Cromwell, Tables for Longitude. *London.*
?1791	5	8°	J. H. Moore, Navigator. *London.* 9th Ed.
			Herdruk: 1793, 10th. Ed.
1792	7	4°	M. Taylor, Tables. *London.*
1793		8°	Tabeller, *Stockholm.*
1793	6	8°	A. Mackay, Theory. II Vol. *London.*
			Herdruk: 3^{e} 1810.
1793	7	4°	G. Vega, Handbuch. *Leipzig.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
			Herdruk: 2e 1800, 3e 1802, 4e 1816, 5e 1820, 6e 1815, 7e 1820, 8e 1828, 11e 1832, 12e 1833, 15e 1836, 1838, 19e 1839.
1794	10	fol.	G. VEGA, Thesaurus. *Leipzig.*
1794			J. J. GIRTANNER, Logarithmische Tabellen. *Winterthur.*
1794	6	8°	Tables. *St. Malo.*
1795	7	8°	BORNE, Principe ragionati. *Pesaro.*
1795	7, 61	8°	F. CALLET, Tables (stereotype). *Paris.*
			Herdruk: 1803, 1821, 1829, 1840, 1853.
1795	7	4°	G. VEIGA, Tavole (italiaansch). *Roma.*
? 1795	8	8°	M. R. B. GERHARDT, Tafeln. 2e Aufl. *Berlin.*
1796	6	8°	J. ADAMS, Companion. *London.*
1798	7	8°	J. H. LAMBERT (door A. FELKEL), Supplemente. *Lissabon.*
1798			E. H. HOCHHEIMER, Arbitrage Rekening. *Amsterdam.*
1799	7	8°	J. P. HOBERT & L. IDELER, Neue Tafeln. *Berlin.*
1799		4°	M. H. KAMPKE, Wechsel Berechner. *Lubeck.*
1799	5	8°	J. HILL, Decimal Logarithmical Arithmetic. *Edinburgh.*
? 1799			W. VON JOCHER, 2e Aufl. *Leipzig.*
1799	6	8°	BEZOUT, Cours pour la Marine, etc. *Paris.*
1800		8°	Treatise. *London.*
1800	4	8°	F. REISHAMMER, Manuel. *Paris.*
1800	7, 11	4°	J. DELAMBRE et CH. BORDA, Tables Décimales. *Paris.*
1801	5	8°	Th. KEITH, Introduction. *London.*
			Herdruk: 1821.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL
1801	6	8°	F. Reichammer, Instruction élémentaire. *Paris.*
1801	6	4°	Ch. Arzberger, Encyclopädischer Cursus. *Coburg.*
1801	14	4°	Notice sur les grandes tables. *Paris.*
1801	6	8°	J. de Lalande, Tables (stereotypes). *Paris.* Herdruk: 1807.
1801	7	8°	J. de Mendoza Rios, Tables for Nautical Astronomy. *London.*
1802			J. R. Teschemacher, Tables for Arbitration. *London.*
1802	6	4°	[Ch. Arzberger], Kleine Tafeln. *Coburg.* Naderhand met zijn naam, 1802. *Coburg.*
1802	5	8°	N. Bowditch (door H. Kirby), Navigator. *London.*
1802			N. G. af Schulten. *Aboa.*
?1802	5	8°	[N. Maskelyne], Tables requisite. 3d Ed. *London.*
1802	6	8°	N. Maskelyne, Appendix. *London.*
1803	6	8°	Tables. *Avignon.*
1803	14	8°	Leonelli, Supplément logarithmique. *Bordeaux.*
1803	5		H. Kalkmann, Tabellen. *Hamburg.*
1804	4	4°	Noback, Nieuwe Tafelen. *Amsterdam.*
1804	13	4°	M. Eilmann, Tafeln. *Osnabrück.* In 3 Heften: het 3e Heft in 1808.
1804	6	8°	De la Caille & J. de Lalande, Tables. *Paris.*
1805	5	16°	J. de Lalande, Tables (stereotype). *Paris.* Herdruk: 1816, 1818, 1831.
1805	4	8°	J. Andrew, Astronom. Tables. *London.*
1806	14	8°	Leonelli (door G. W. Leonardi), Logarithmische Supplemente. *Dresden.*
1806	6		Th. Whiting, Portable Tables. *London.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1806	5	4°	J. M. Mendoza Rios, Complete Collection. *London.*
			Herdruk: 1809.
1806	6	8°	Delagrive (door Reynaud), Manuel. *Paris.*
			Herdruk: 1810.
?1808	7	4°	G. von Vega, (italiaansch). Ed. 4°. *Padova.*
1809	6	8°	Ch. Plauzoles, Tables. *Paris.*
1809	7, 15	8°	E. Douglas, Mathematical Tables. *Edinburgh.*
1810	5	16°	M. von Prasse, Tafeln. *Leipzig.*
			Herdruk: 1814.
?1810	5	8°	J. H. Moore (door J. Dession), Navigator. 18e Ed. *London.*
			Herdruk: 20e 1814.
1812		8°	J. Lindner, Handbuch. *Wien.*
			Herdruk: 2e 1831.
1812	5	8°	C. F. Gauss, Tafel. *Gotha.*
1814	6	8°	Firmin Didot, Tables. *Paris.*
1814	8	8°	P. Barlow, New Mathematical Tables. *London.*
			Herdruk: 1840.
1814	5	16°	M. von Prasse (door Halma), Tables. *Paris.*
?1815	6	8°	J. Wallace (door J. Brown), Mathematical Tables. 3e Ed. *Edinburgh.*
1816			J. C. Blank, *Wien.*
1817	5		Th. Preston, New System.
1817	5	8°	J. Pasquich, Abgekürzte Tafeln. *Leipzig.*
1817	7	4°	[E. A. Matthiessen], Tafel. *Altona.*
1817	7	8°	E. Floryn, Tafelen. *Amsterdam.*
1818	5	8°	G. G. Schmidt, Trigonometrie. *Giessen.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1818	5	18°	J. de Lalande (door J. Reynaud), Tables. *Paris.*
			Herdruk: 1852, 1856.
1818	7	8°	J. P. Grüson, Bequeme Tafeln. *Berlin.*
			Herdruk: 3e 1832.
1819	7	4°	A. Rees, Cyclopaedia. Vol. 18. *London.*
1819	7	8°	C. Wolff (door ?), Tafeln.
1820			Brunacchi, Tavole. *Milano.*
1820		8°	G. Santini, Tavole. *Padova.*
			Herdruk: 2e 1843, 3e 1869.
1820	6	8°	P. Duncan, Cours. *Bordeaux.*
1821	5	12°	G. G. Schmidt, Tafelen. *Giessen.*
			Herdruk: 1823.
1821		8°	J. Schultes (door W. Pfaff), Sammlung. *Erlangen*
1821	7	8°	A. Vlack (door G. Nordmann), Tabulae. *Leipzig.*
1821	6	8°	Th. Kerigan, Guide. *London.*
1821	6	8°	W. Lax, Nautical Tables. *London.*
1821	5	8°	J. H. Westphal, Tafeln. *Leipzig.*
1822	5	8°	H. J. Schumacher, Hülfstafeln. *Altona.*
1822	5	8°	C. F. G. Bohr, Tabel. *Bergen.*
1822	6	8°	S. Stampfer, Tafeln. *Salzburg.*
			Herdruk: *Wien.* 2e 1825, 4e 1852, 5e 1858, 6e 1860, 8e 1870.
1822	5, 4	4°	D. Stansbury, Tables. *New-York.*
1823		4°	E. M. Hahn, Neue Tafeln. *Breslau.*
1823	5	fol.	E. A. Matthiessen, Gemeine Logarithmen. (stereotype). *Altona.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1823	5	8°	EUSTACE en SCHMIDT, Handboek. *Amsterdam.*
1824	6	8°	J. P. KULIK, Handbuch. *Grats.*
1824	6	8°	J. DE LALANDE, Tafeln.
1824	18	8°	C. F. DEGEN, Tabulae. *Hauniae.*
1824	6	8°	E. RIDDLE, Navigation. *London.*
1825	6	4°	M. VON PRASSE (door K. B. MOLWEIDE), Tafeln. *Leipzig.* Herdruk: 1840?
1825	7	8°	CREIZENACH, Höhere Zinsberechnung. *Mainz.*
1826	7	16°	J. J. I. HOFFMANN, Tafeln. *Mainz.*
1826	6	8°	BROWN (door J. CHRISTISON), Mathematical Tables. *Edinburgh.* Herdruk: 1848.
1826	7	4°	V. BAGAY, Souscription. *Paris.*
1827	5	16°	J. DE LALANDE (door H. G. KÖHLER), Tafeln. *Leipzig.* Herdruk: 2e 1849, 3e 1865, 4e 1868, 5e 1870.
1827			H. W., Canons de Logarithmes. *Paris, Straatsburg, London.*
1827			A. BURG, *Wien.*
1827	5	16°	C. L. G. WINCKLER, Die Logarithmen. *Halle.*
1827	10,6,5	8°	J. HANTSCHEL, Handbuch. *Wien.* Herdruk: 1833.
1827	6	4°	J. SALOMON, Tafeln. *Wien.*
1827	6	8°	G. F. URSINUS, Logarithmi. *Hafniae.*
1827	6	8°	W. GALBRAITH, Tables. *Edinburgh.*
1827	4	4°	TH. LYNN, Horary Tables. *London.*
1827	5	8°	J. C. BURCHARDT, Table Conn. des Temps. *Paris.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1828	7	8°	CH. BABBAGE, Table. *London*.
			Herdruk: 2e 1831, 3e 1838, 4e 1841, 1873.
1828			HILL. *Stockholm*.
1828	4	8°	C. F. ENCKE, Tafeln. *Berlin*.
			Herdruk: 1845.
1828	5	16°	M. VON PRASSE, Tables. *Paris*.
1828	4	8°	Logarithmen. *Berlin*.
1829	7	4°	V. BAGAY, Nouvelles Tables Astronomiques. *Paris*.
1829	5	16°	VON WIEDEBACH, Tafel. *Copenhagen*.
1829	7	12°	A. A. L. REYNAUD, Table. *Paris*.
1829	7	12°	J. DE LALANDE (door F. C. M. MARIE), Tables. *Paris*.
1829	7	8°	C. TH. SCHMIDELL, Proportionaltheile. *Leipzig*.
1830	6	8°	J. SWART, Verzameling van Tafelen. *Amsterdam*.
			Herdruk: 2e 1830, 3e 1835, 4e 1837, 6e 1845.
1830	20	8°	CH. HUTTON (door O. GREGORY), Mathematical Tables. *London*.
			Herdruk: 1849, 1858.
1830			QUERRET. *St. Malo*.
1830	7	12°	F. R. HASSLER, Tabulae. *New-York*.
1830	7	12°	F. R. HASSLER, Tafeln. *New-York*.
1830	7	12°	F. R. HASSLER, Tables (fransch). *New-York*.
1830	7	12°	F. R. HASSLER, Tables (engelsch). *New-York*.
1830	7	12°	F. R. HASSLER, Tablas. *New-York*.
1830	5	8°	J. DE LALANDE (door R. MYTILLANA), Tablas. *Madrid*.
1830	7	8°	J. SWART, Tafelen. *Amsterdam*.
			Herdruk: 2e 1827, 3e 1846.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1830	6	8°	J. IMMAN, Nautical Tables. *London.*
			Herdruk: 1871.
1832		8°	F. MINSINGER, Lehrbuch. *Augsburg.*
1832		8°	K. VON LANGSDORFF, Logarithmen. *Heidelberg.*
1832	5	12°	J. DE LALANDE (door KÖHLER), Tables. *Leipzig.*
1832	7	8°	F. MINSINGER, Logarithmen. *Augsburg.*
			Herdruk: 1842, 1845.
1833	5	8°	R. LOBATTO, Verzameling. *'s Gravenhage.*
1833		12°	C. W. STERNBERG, Tabeller. *Stockholm.*
1833		8°	J. SCHMÖLZL, Taschenbuch. *München.*
1833	4	4°	TH. BEVERLEY, The Mariner's Latitude. *Cirencester.*
1833	6	8°	J. TAYLOR, Luni-Solar Tables. *London.*
1834	6	8°	G. WINKLER, Tafeln. *Wien.*
			Herdruk: 2e 1839.
1834	6		R. WALLACE, Mathematical Calculator. *Glasgow.*
1834	7	8°	CH. BABBAGE (door K. NAGY), Logarithmen (hoogd.). *London.*
1834	7	8°	CH. BABBAGE (door K. NAGY), Logarithmen (hongaarsch). *London.*
1834	7	8°	Turksche Logarithmen. *Bulak.*
1836	7, 6	8°	J. W. NORIE, Nautical Tables. *London.*
1836	7	12°	Logarithmic Tables. *London.*
1837		8°	J. B. WANDNER, Grundzüge. *Sulzbach.*
1837	5	16°	M. VON PRASSE (door JAHN), Tafeln. *Leipzig.*
1837	6	16°	M. RÜHLMANN, Tafeln. *Leipzig.*
			Herdruk: 2e 1840, 3e 1845, 4e 1851, 5e 1855, 6e 1859, 7e 1866.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1838	5, 3	4°	L. Schrön, Tafeln. *Jena.*
1838		8°	F. Zamminer, Anfangsgründe. *Darmstadt.*
1838		8°	G. Follador, Tavole. *Padova.*
1838	5	4°	G. B. Airy, Appendix. *London.*
1838	6	4°	G. A. Jahn, Tafeln. II Vol.
			Herdruk: 1844.
1839	5	8°	J. de Lalande (door A. de Morgan), Tables. (door Soc. of Usef. Knowl.). *London.*
			Herdruk: 1854.
1839	5	16°	H. Strootman, Logarithmen-Tafelen. *Breda.*
1839	7, 15	4°	V. Croiset, Table. *Paris.*
			Herdruk: 1841.
1840	7	8°	H. Raper, Practice of Navigation. *London.*
			Herdruk: 4e 1852.
1840	4	plano	Logarithms on a card. *London.*
1840	10	4°	A. J. de Montferrier, Table. *Paris.*
1840		8°	J. Vallès, Traité. *Paris.*
1840	6	8°	R. Farley, Tables. *London.*
			Herdruk: 1853.
1840		16°	E. H. Byorkmann, Tabeller. *Stockholm.*
1840	5	12°	A. Meldola, Tafeln. *Altona.*
1840	14, 6	fol.	A. J. de Montferrier, Dictionnaire. Vol. III. *Paris.*
1840	7	8°	A. Steinberger, Tafel. *Regensburg.*
			Herdruk: 2e 1857.
1840	7	4°	G. von Vega (door J. A. Hülsse), Sammlung. *Leipzig.*
			Herdruk: 2e 1849.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1840	7	4°	G. von Vega (door J. A. Hülsse), Handbuch. *Leipzig.*
			Herdruk: 3e 1841, 4e 1842, 5e 1843, 7e 1844, 11e 1846, 12e 1848, 13e 1849, 16e 1851, 17e 1857, 18e 1859, 19e 1854, 21e 1855.
1841	5	8°	O. Gregory, Tables for Nautical Men. *London.*
1841	6	8°	E. Riddle, Tables. *London.*
			Herdruk: 1851.
1841	6	8°	J. Trotter, Manual. *Edinburgh.*
			Herdruk: 1847, 1851.
1841		4°	E. G. af Klint, Tabeller. *Stockholm.*
1841		12°	N. G. Schulten, Tabeller. *Helsingfors.*
1841	4	fol.	Logarithms and Antilogarithms. *London.*
1842		12°	J. de Lalande (door J. B. Peyronnet), Tablas. *Madrid.*
1842	4		Tables of Logarithms. *London.*
1842	4		Sines and Tangents. *London.*
1842	7	18°	J. de Lalande (door F. C. C. Marie & C. E. Guillery), Tables. *Bruxelles.*
			Herdruk: 1852, 1857.
1842	6	8°	The Logarithms. *London.*
1843		18°	J. de Lalande (door P. H. Guilhem), Tables. *Paris.*
1843			J. de Lalande, Tablas. *Paris.*
1843	7	4°	C. Bremiker, Tafel der Proportionaltheile. *Berlin.*
1843	7	8°	Taf. Logist. Logar. *Nürnberg.*
?1843		18°	J. Carr, Synopsis. 2d Ed. *London.*
1843	6	8°	J. Griffin, Epitome. *London.*
1843			E. Wenckebach. *Breda.*
			Herdruk: 1861.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1843	6	4°	C. F. Degen (door A. de Morgan), Encyclopaedia Metropolitana. *London.*
1843	5	8°	O. Gregory, W. J. B. Woolhouse & J. Heuss, Nautical Tables. *London.*
1843	6	8°	J. Taylor, Epitome. *London.*
1843		18°	J. de Lalande (door A. J. L. M. y J.), Tablas. *Paris.*
1844	6	8°	J. Christison, Mathematical Tables. *Edinburgh.* Herdruk: 1848.
1844	4	4°	(B. Sheepshanks), Tables. *London.*
1844	6,5	8°	R. Shortrede, Compendious Tables. *Edinburgh.*
? 1844	7,6	8°	J. W. Norie, Navigation. 13e Ed. *London.*
? 1844	6	8°	C. Rümker, Handbuch. 4e Ed. *Hamburg.*
1844		8°	A. Bell, Mathematical Tables. *Edinburgh.*
1844			E. Ritter, Arithmétique. *Genève.*
1844	7	8°	R. Shortrede, Logarithmic Tables. *Edinburgh.* Herdruk: 1849. II Vol.
1844	4	8°	J. H. T. Müller, Logarithmen. *Halle.* Herdruk: 2e 1860.
1844	6	16°	E. Wallace, Pocket Guide. *Glasgow.* Herdruk: 3e 1849.
1844	4	4°	R. Sheepshanks, Tables. *London.* Herdruk: 1846.
1844		8°	L. C. Schulz von Strasznicki, Handbuch. *Wien.* Herdruk: 1848.
1844	5	8°	J. A. Hansen, Tafels. *Deventer.*
1845	5	8°	H. G. Schumacher (door G. H. L. Warnstorff), Hülfstafeln. *Copenhagen.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1845		8°	J. G. Böhm, Handbuch. *Innsbrück.*
			Herdruk: 2e 1853, 3e 1872.
1845	7	8°	F. Minsinger, Gemeine Logarithmen. *Augsburg.*
1846		12°	G. Bildt, Tabeller. *Stockholm.*
1846	7	4°	Th. Wittstein, Gaussische Logarithmen. *Hannover.*
			Herdruk: 1866.
1846	6	8°	H. Raper R. N., Tables. *London.*
1846	4	4°	C. A. Schumacher, Logarithmer. *Copenhagen.*
1846	6	8°	J. C. Pilaar, Logarithmen. *Leiden.*
1846	5	16°	E. F. August, Tafelen. *Berlin.*
			Herdruk: 2e 1848, 3e 1853, 5e 1863, 6e 1865, 7e 1868.
1846	6	8°	E. Coleman, Nautical Tables. *London.*
1847	7	8°	J. S. Speyer, Tafel. *Amsterdam.*
			Herdruk: 1860.
1847		8°	D. J. Feliu, Tablas. *Madrid.*
1847	7	8°	J. de Lalande (door C. F. M. Marie & Reynaud), Tables. *Paris.*
			Herdruk: 1853, 1871.
1847		8°	J. von Massaloup, Hülfstafeln. *Leipzig.*
1847	4	8°	G. F. Ursin, Logarithmer. *Copenhagen.*
1847	6		H. G. Köhler, Tafeln. *Leipzig.*
			Herdruk: 1851.
1847	7	8°	H. G. Köhler, Handbuch. *Leipzig.*
			Herdruk: 2e 1848, 3e 1851, 4e 1855, 5e 1857, 6e 1859, 7e 1860, 8e 1861, 9e 1864, 10e 1867.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1847	7	8°	A. D. STANLEY, Tables. *New-York.*
			Herdruk: 1849 (*London*).
1848		8°	L. C. SCHULZ VON STRASZNICKI, Tafeln. *Wien.*
1848			D. MARIANINI. Acqui.
1849	50	8°	O. BYRNE, Practical Method. *London.*
1849	4	8°	J. GORDON, Lunar Tables. *London.*
1849	7	8°	J. ZECH, Additions und Substractions-Logarithmen. *Berlin.*
			Herdruk: 2e 1851, 3e 1867.
1849	6	8°	P. GRAY, Tables and Formulae. *London.*
			Herdruk: 2e 1870.
1849	7	8°	H. E. FILIPOWSKY, Table of Antilogarithms. *London.*
1850	5	4°	J. DE MENDOZA Y RIOS, Coleccion. *Madrid.*
1850	6	8°	N. BEARDMORE, Hydrography. *London.*
			Herdruk: 1852, 1862.
1850	5	plano	H. E. FILIPOWSKY, Table. *London.*
1850	7	4°	Z. DASE, Tafeln. *Wien.*
1851	5	8°	A. BREUSING, Logarithmen. *Bremen.*
1851	6	24°	H. LAW, Mathematical Tables. *London.*
1851	6	12°	J. E. HIERL, Tabellen. *Augsburg.*
			Herdruk: 1852 (*Leipzig*), 1854 (*Augsburg*).
1851	5	8°	D. J. PH. KULIK, Hyperbolische Sectoren. *Leipzig.*
1851		fol.	H. G. KÖHLER, Vier Tafeln. *Leipzig.*
1852	6	8°	C. BREMIKER, Nova Tabula. *Berlin.*
1852		8°	J. DAVIDSON, Collection. *London.*
1852	6	8°	F. DOMKE, Tafeln. *Berlin.*
			Herdruk; 2e 1855, 3e 1861, 4e 1866, 5e 1869.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1852		8°	J. G. Böhm (door M. Sembianti), Piccolo Manuale. *Trento.* Herdruk: 2e 1858.
1852	7	8°	G. von Vega (door C. Bremiker), Handbuch. *Berlin.* Herdruk: 40e 1856, 43e 1859, 44e 1860, 46e 1862, 48e 1864, 49e 1866, 50e 1867, 51e 1868, 54e 1870, 55e 1871, 56e 1872.
1852		8°	Logarithmen. *Elberfeld.*
?1852	5	8°	D. Thomson, Lunar Tables. 44e Ed. *London.*
?1852	7	8°	E. M. Willich, Popular Tables. 2e Ed. *London.* Herdruk: 3e 1857, 7e 1871.
?1852			J. Davidson, A System. 5e Ed. *Edinburgh.*
1853	6	12°	R. Farley, Tables. *London.*
1853	6	8°	V. V. Queipo, Tablas. *Madrid.* Herdruk: 2e 1857, 3e 1856.
1853	6		A. Wylie, Compendium. *Shanghae.*
1854	6	18°	J. de Lalande (door Reynaud & Bailleul), Tables. *Paris.* Herdruk: 1858, 1864.
1854	6	8°	V. Caillet, Tables de Log et Co-log. *Paris.* Herdruk: 1858.
1854	7	18°	J. de Lalande (door C. J. M. Marie, Reynaud & Bailleul), Tables. *Paris.* Herdruk: 1856, 1858, 1864.
1855	7	8°	F. Callet (door E. Boitard & A. Ansart-Deury), Tables. *Paris.*
1855	5	8°	(F. Stegmann), Tafel. *Marburg.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL
1855		8°	J. FELIU (door N. TARTES), Tablas. *Toledo.* Herdruk: 2e 1855, 3e 1864.
1856	5	12°	J. DE LALANDE (door J. DUPUIS), Tables. *Paris.* Herdruk: 1858, 1868, 1871.
1856	7		J. R. HIND, Versed Sines. *London.*
1856	7	fol.	R. FARLEY, Versed Sines. *London.*
1856	5	8°	[F. STEGMANN], Tafel, Zweiter Theil. *Marburg.*
1857	6,4,5,3	8°	KEIL, Logarithmen. *Eisenberg.*
1857	11	4°	A. STEINHAUSER, Anhang. *Wien.*
1857	7	8°	G. VON VEGA (door C. BREMIKER & W. S. FISCHER), Tables. *London.*
1857		8°	DELEZEUME, Table. *Lille.*
1857		fol.	Logarithmen und Antilogarithmen. *Wien.*
1857	7	8°	G. VON VEGA (door C. BREMIKER), Tavole. *Berlin.* Herdruk: 2e 1864.
1857	7	16°	J. NAPIER (door H. FILOPOWSKY), Canon. *Edinburgh.*
1857	7	8°	G. VON VEGA (door C. BREMIKER), Tables (fransch). *Berlin.*
1857		4°	P. KROM, Tafels. *Amsterdam.*
1857	5	8°	G. and E. SCHEUTZ, Specimen. *London.*
?1857	6	8°	H. RAPER R. N., Practice. 6th Ed. *London.*
1858		8°	J. DE LALANDE (door R. PICARTE), Tables. *Paris.*
1858		8°	Handleiding. *Alkmaar.*
1858	5	8°	J. HOUEL, Tables. *Paris.* Herdruk: 2e 1864, 3e 1868, 4e 1871, 5e 1873.
1858	6	8°	F. R. MOČNIK, Tafeln. *Wien.* Herdruk: 2e 1872.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1858	5	8°	G. and E. SCHEUTZ, Tables. *Paris.*
1858		8°	NYCKEL, Tabeller. *Stockholm.*
?1859		16°	J. DUPUIS, Table. 2e Ed. *Paris.*
1859	3,4,	8°	A. BOUCHÉ, Notice Théorique. *Bordeaux.*
1859	5	8°	E. SANG, Logarithms. *London.*
1859	5	8°	TH. WITTSTEIN, Tafeln. *Hannover.* Herdruk: 3e 1865, 4e 1870, 5e 1872.
1859		8°	F. MIDY, Table. *Paris.*
1859		4°	R. PICARTE, La division réduite à une addition. *Paris.*
1860	7	8°	L. SCHRÖN, Logarithmen. *Braunschweig.* Herdruk; 2e 1861, 3e 1862, 4e 1863, 5e 1865, 6e 1866, 7e 1867, 8e 1867, 9e 1868, 10e 1869, 11e 1871, 12e 1873.
1860	4	8°	TH. WITTSTEIN, Tafeln. *Hannover.*
1860	5	12°	J. A. GALLBRAITH & HOUGHTON, Manual. *London.*
1860	4	plano	(J. SITTENFELD), Logarithmen & Antilogarithmen. *Berlin.*
?1860		8°	J. CAPE, Tabellen. 3e Ed. *London.*
1860	6	8°	C. BREMIKER, Tafeln. *Berlin.* Herdruk: 2e 1868, 3e 1872.
1860		12°	F. LUKAS, Logarithmen. *Wien.*
1860		8°	E. D. F. MEISSEL, Tafeln. *Iserlohn.*
1860		8°	J. VINET, Petite Table. *Paris.* Herdruk: 3e 1869.
1861	7	8°	L. SCHRÖN, Tabel (hongaarsch). *Braunschweig.* Herdruk: 12e 1873.

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1861		18°	J. DUPUIS, Recueil. *Paris.*
1861	7	4°	FR. MATZEK. *Brunn.*
1861	7	8°	F. CALLET (door J. DUPUIS), Tables. *Paris.*
1861		18°	J. HUNTER, Treatise. *London.*
1861		18°	J. HUNTER, Key. *London,*
1861	3	plano	A. DE MORGAN, Logarithms. *London.*
1862	3,4	8°	A. BOUCHÉ, Notice. *Paris.*
1862	7	8°	L. SCHRÖN (door D. BIERENS DE HAAN), Gewone Logarithmen. *Amsterdam.*
			Herdruk: 2e 1864, 3e 1866, 4e 1867.
1863	5	4°	J. F. W. GRONAU, Tafeln. *Danzig.*
1863		4°	A. FORTI, Tavole. *Pisa.*
1864	6	8°	FR. MOČNIK, Tavole. *Wien.*
1864		8°	E. F. KÖHLER, Manuale (italiaansch). *Paris.*
			Herdruk: 2e 1866, 3e 1867.
1864	4	16°	J. ZECH, Tafeln. *Tübingen.*
1864		8°	J. DE LALANDE (door N. ARIAS), Tablas. *Madrid.*
1864		8°	W. H. ROSSER, Tables. *London.*
1864	5	8°	J. HOUEL, Tafeln (Hoogduitsch). *Paris.*
			Herdruk: 1869.
1864		8°	R. MONEY, Table (English). *Allahadad.*
1864	5	16°	V. ADAM, Taschenbuch. *Brünn.*
1864	7	8°	Logarithmen der Sekanten. (*Greifswald*).
1865	12	8°	P. GRAY, Tables. *London.*
1865	15	8°	A. STEINHAUSER, Kurze Hilfstafel. *Wien.*
1865	4	plano	WILD, Logarithmen. *Zürich.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
?1865	7	8°	J. Dupuis, Tables. 2e Ed. *Paris.*
			Herdruk: 1868, 5e 1873.
1866			C. Breymann, Tafeln. *Wien.*
1866	5	8°	A. Gerneth, Logarithmen. *Wien.*
1866	7	16°	J. Luvini, Tablas (spaansch). *Paris.*
1866	5	8°	A. W. Nell, Logarithmen. *Darmstadt.*
			Herdruk: 1870.
1866	5	8°	W. Oeltze, Table antilogarithmique. *Paris.*
1866	7	8°	L. Schrön (door A. de Morgan), Logarithms. *London.*
			Herdruk?
?1866	7	8°	L. Schrön (door J. Houel), Tables. 6e Ed. *Paris.*
			Herdruk: 1873.
1866	5	8°	O. Schlömilch, Tafeln. *Braunschweig.*
			Herdruk: 2e 1869, 3e 1871, 4e 1872.
1866	4, 3	8°	H. Schröder, Logarithmen. *Stuttgardt.*
			Herdruk: 1869.
1866	5	18°	Ch. Menuge, Petites Tables. *Paris.*
1866	7	16°	G. Luvini, Tavole. *Turin.*
			Herdruk: 1870.
1866	5	8°	W. J. Macquorn Rankine, Useful Rules. *London.*
			Herdruk: 4e 1873.
1866	7	8°	Th. Wittstein, Logarithmes de Gauss. *Hannover.*
1866		8°	F. Folie, Nouvelles Tables. *Liége.*
1867	7	4°	O. Byrne, Table. *London.*
1867	4	4°	Th. Oppolzer, Tafelen. *Wien.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1867	5	8°	A. J. D. WACHERBARTH, Tabellen. *Upsala.* Herdruk: 1869.
1867	7	8°	G. VON VEGA (door C. BREMIKER en L. CREMONA), Tavole. *Berlin.*
1867	27	8°	T. THOMAN, Tables. *Paris.*
?1867		12°	Mathematical Tables. 2e Ed. *London.*
1868		18°	J. DE LALANDE (door BAILLEUL), Tables. *Paris.*
1868		8°	A. VAN DAM, Verklaring. *Amsterdam.*
1868	7	4°	O. STRUVE, Tabulae auxiliares. *Petropoli.*
1868	5	8°	O. LEHMANN, Logarithmen. *Leipzig.*
1869	7	8°	G. VON VEGA (door C. BREMIKER), Haandbog. *Berlin.*
1870	7	8°	C. BRÜHNS, Handbuch. *Leipzig.*
1870	7	8°	C. BRÜHNS, Manual. *London.*
1870	7	8°	C. BRÜHNS, Manual. *Paris.*
1870	7	8°	C. BRÜHNS, Manuale (Italiaansch). *Leipzig.*
1870		16°	A. FORTI, Tavole. II Vol. *Torino.*
1870	4	plano.	F. G. GAUSS, Wandtafel. *Berlin.* Herdruk: 1873.
1870	5	8°	F. G. GAUSS, Vollständige Tafelen. *Berlin.* Herdruk: 1873.
1871	4	8°	A. J. VON PESCH, Logarithmentafel. *Leiden.*
1871	3	8°	C. BREMIKER, Tafel. *Berlin.*
1871	102, 20	12°	H. M. PARKHURST, Astronomical Tables. *New-York.*
1871	5	12°	P. E. BERGSTRAND, Logarithmer. *Stockholm.*
1871	5	8°	H. HERTZER, Tafeln. *Berlin.*
1871	4, 3	4°	B. M. PIERCE, Table. *Boston.*

Jaartal.	Aantal decimalen.	Formaat.	TITEL.
1871	7	8°	E. Sang, New Table. *London.*
1871	10	8°	S. Pineto, Tables. *St. Petersburg.*
1872	5	8°	W. Ligowski, Sammlung. *Kiel.*
1872	5	4°	V. Venal, Tables. *Paris.*
1872	6	8°	V. Queipo, Tables. *Paris.*
1872	9	8°	E. Sang, Specimen-tables. *Edinburgh.*
1873		8°	C. Albrich, Rechentafeln. *Herrmannstadt.*
1873	5	8°	A. J. von Pesch, Logarithmentafels. *Leiden.*
?1873		12°	J. Elliot, Elementary Logarithms. 4th Ed. *London.*
?1873		12°	J. Elliot, Tables. 5th Ed. *London.*
1873	4	fol.	F. G. Gauss, Wandtafel (decimaltheilung). *Berlin.*
1873	5	8°	F. G. Gauss, Vollst. Tafel (decimaltheilung). *Berlin.*
1873	5	18°	J. Dupuis, Tables. *Paris.*
1873	7	8°	Hrazak, Tabellenwerk. *Wien.*
1874	4	8°	C. Bremiker, Tafel vierstellig. *Berlin.*
1874	4	8°	F. Paugger, Logarithmentafel. *Triest.*
1874		8°	Short Tables. *London.*

Sedert het indienen van deze ontwerp-naamlijst, en het afdrukken der statistieke opgaven op bladzijde 1—5, zijn er nog onderscheidene tafels tusschengevoegd; dientengevolge zouden de aldaar voorkomende opgaven eenigzins behooren gewijzigd te worden: dit kan echter door een ieder, des verkiezende, gemakkelijk zelf worden gedaan.

OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS, OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Wanneer men een onderzoek wil beginnen over de eigenschappen van eenige integraal, hetzij bepaalde, hetzij ook onbepaalde; of evenzeer, wanneer men in beide gevallen de bepaling der waarde op het oog heeft; altijd behoort tot de meest bruikbare methoden, die, waarbij de integraal wordt gedifferentieerd naar eene standvastige, die in de functie onder het integraalteeken voorkomt. Somtijds is het mogelijk, daarbij eene uitdrukking te vinden voor eene herhaalde differentiatie, hetzij in rechtstreekschen, hetzij in wederkeerigen vorm; en dan zijn de stellingen voor herhaald differentieeren van veel belang, die echter slechts voor enkele eenvoudige functiën gelden. Voor de elliptische integralen waren zulke uitkomsten nog niet bekend; hetzij wat de eerste differentiatie, hetzij wat het herhaald differentieeren betreft naar den modulus, die daarin voorkomt. Een ander onderzoek voerde mij tot de behandeling van deze vraag voor de eenvoudige integralen, waarin de $\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}$ voorkomt, en verder voor de overeenkomstige, die $\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}$ bevatten.

2. Men vindt vooreerst

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p.x) = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1-p^2 sin^2 x} = \int_0^x \tfrac{1}{2}\, dx \frac{-sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}} = -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}},$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p.x) = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}} = \int_0^x (-\tfrac{1}{2})\, dx \frac{-sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3} = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3}.$$

Ten einde deze en dergelijke uitkomsten weder tot elliptische integralen te herleiden, beschouwen wij de integraal

$$\int_0^x \frac{sin^a x\, dx}{\Delta(p\,.\,x)^b}$$

naar de gewone beteekenis $\Delta(p\,.\,x) = \sqrt{1-p^2 sin^2 x}$. Hierin moet vooreerst b oneven zijn, $= 2b+1$; anders toch heeft men te doen met rationeele goniometrische integralen, en niet met elliptische integralen. Evenzeer moet a even zijn $= 2a$; want voor a oneven, $= 2a+1$, dan konde men in de integraal

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\,.\,sin\, x\, dx}{\sqrt{(1-p^2 sin^2 x)}^{2b+1}}$$

$cos\, x = y$ stellen, zoodat er kwam

$$-\int_0^{cos\, x} \frac{(1-y^2)^a\, dy}{(1-p^2-p^2y^2)^{b+\frac{1}{2}}},$$

eene gewone irrationeele stelkundige integraal. Voor zulke $a = 2a$, en $b = 2b+1$ kan men nu aldus te werk gaan.

Omdat hier de methode van het integreeren bij gedeelten niet gemakkelijk of rechtstreeks tot het doel voert, moet men eene zekere, geschikte functie gaan differentieeren, en wel naar het volgende algemeene beginsel, waarbij y en z beide functiën van x zijn.

Stel dat men voor de onbepaalde integraal $\int \frac{y^a\, dx}{z^b}$ eene herleidingsformule wil zoeken, en dat men daarbij niet slaagt met de toepassing van het integreeren

bij gedeelten; dan differentieere men de functie $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$; en nu geeft de logarithmische differentiatie

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}=\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}\left[(a+1)\frac{y'}{y}+\frac{z''}{z'}-(b-1)\frac{z'}{z}\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(a+1)y'z'z+yz''z-(b-1)yz'^2\right]=$$

$$=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz')z'+y'z'z+yz''z+yz'^2\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz')z'+\frac{d}{dx}(yz'z)\right].\;.\;(\alpha)$$

Zoodra men nu er in slagen kan, om den veelledigen factor in het tweede lid dezer formule te ontwikkelen naar opklimmende machten, hetzij van y, hetzij van z, waarbij dan ook y^0 of z^0 in den regel voorkomt, kan men deze methode toepassen. Want nu wordt door integratie naar x het eerste lid een geïntegreerde vorm, $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$: en in het tweede lid verkrijgt men eene reeks van eenige integralen derzelfde soort; men kan dus daaruit gemakkelijk eene herleidingsformule zamenstellen.

In ons geval verkrijgen wij langs dezen weg

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^{2a+1}x\,.\cos x}{(1-p^2\sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{\sin^{2a+1}x\,.\cos x}{(1-p^2\sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\left[(2a+1)\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{-\sin x}{\cos x}-(b-\tfrac{1}{2})\frac{-p^2\,2\sin x\,.\cos x}{1-p^2\sin^2x}\right]=$$

$$=\frac{\sin^{2a}x}{(1-p^2\sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\left\{(2a+1)\cos^2x-\sin^2x\right\}(1-p^2\sin^2x)+(2b-1)p^2\sin^2x\,.\cos^2x\right]=$$

$$=\frac{\sin^{2a}x}{(1-p^2\sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\left\{(2a+1)-2(a+1)\sin^2x\right\}(1-p^2\sin^2x)+(2b-1)p^2\sin^2x(1-\sin^2x)\right],$$

en, als men in het tweede lid de veelledige grootheid tusschen de vierkante haakjes naar de machten van $(1-p^2\sin^2x)$ rangschikt,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^{2a+1}x\,.\cos x}{(1-p^2\sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{1}{p^2}\frac{\sin^{2a}x}{(1-p^2\sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[(2a-2b+3)(1-p^2\sin^2x)^2+\right.$$

$$\left.+2\left\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\right\}(1-p^2\sin^2x)-(1-p^2)(2b-1)\right],\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta)$$

of, wanneer men diezelfde veelledige grootheid rangschikt naar de machten van $\sin^2x$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^{2a+1}x\,.\cos x}{(1-p^2\sin^2x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{\sin^{2a}x}{(1-p^2\sin^2x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[(2a+1)-\left\{(1+p^2)(a+1)-p^2b\right\}2\sin^2x+(2a-2b+3)p^2\sin^4x\right];.(\gamma)$$

waaruit blijkt, dat men zijn doel heeft bereikt. De eerste herleiding (β) toch geeft, als men naar x tusschen de grenzen 0 en x integreert, en de laatste integraal in het tweede lid oplost, omdat de gedifferentieerde grootheid in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt,

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-p^2)(2b-1)}\Big[-\frac{sin^{2a+1} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$
$$+2\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\}\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3)\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{3}{2}}}\Big], \quad . \text{(I)}$$

werkelijk eene herleidingsformule, waarin de veranderlijke parameter, hier de exponent in den noemer, telkens met de eenheid verminderd wordt.

Evenzoo kan men de tweede herleiding (γ) gebruiken. Omdat echter de integraal, die de hoogste macht van $sin^2 x$ bevat, hier tot factor onder het integraalteeken zoude hebben $sin^{2a+4} x$, moet men eerst de a door $a-2$ vervangen; dan integreeren tusschen de grenzen 0 en x van x, waarbij weder de term in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt; en vervolgens de laatste integraal in het tweede lid oplossen. Langs dien weg verkrijgt men

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2a-2b-1)p^2}\Big[\frac{sin^{2a-3} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$
$$+\{(1+p^2)(a+1) - p^2 b\}\, 2\int_0^x \frac{sin^{2a-2} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} - (2a-3)\int_0^x \frac{sin^{2a-4} x\, d x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\Big], \quad . \; . \text{(II)}$$

wederom eene herleidingsformule, waarin nu echter de parameter, die telkens met twee afneemt, hier de exponent van den teller is.

De eerste formule (I) heeft tot eindintegralen, voor $b = 1$,

$$\int_0^x sin^{2a} x\, d x \sqrt{1-p^2 sin^2 x} \quad \text{en} \quad \int_0^x \frac{sin^{2a} x\, d x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}.$$

Wilde men deze door de andere formule (II) bepalen, zoo heeft men als eindintegralen voor $a = 1$ en $a = 0$,

$$\int_0^x sin^2 x\, d x (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \int_0^x d x (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

En hiervan vindt men dadelijk

$$\int_0^x dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = E(p\,.\,x), \quad \dots\dots \quad (1)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = F(p\,.\,x), \quad \dots\dots \quad (2)$$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{p^2}\int_0^x \frac{1-(1-p^2\sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,dx = \frac{1}{p^2}\left[F(p\,.\,x)-E(p\,.\,x)\right]. \quad \dots \quad (3)$$

Ten einde nu nog de vierde te vinden, gebruike men de herleidingsformule (II) voor $a=2$, en voere daarbij de waarde van de integraal (3) in; zoo wordt

$$\int_0^x \frac{\sin^4 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{3p^4}\left[p^2\sin x\,.\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+(2+p^2)F(p\,.\,x)-2(1+p^2)E(p\,.\,x)\right], \quad . \ (4)$$

en daarmede wordt dan

$$\int_0^x \sin^2 x\,dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = \int_0^x \frac{1-p^2\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{3p^2}\left[-p^2\sin x\,.\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x} + (1-p^2)F(p\,.\,x) - (1-2p^2)E(p\,.\,x)\right]. \quad \dots \quad (5)$$

Voor de eerste formulen aan het hoofd dezer paragraaf geeft nog de herleidingsformule (I) voor $a=1$, $b=1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{1-p^2}\left[-\frac{\sin^3 x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - 2(1-p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x\,dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right],$$

of, door middel der integralen (3) en (5),

$$= \frac{1}{p^2(1-p^2)}\left[-\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}p^2\sin x\,.\cos x - (1-p^2)F(p\,.\,x) + (p\,.\,x)\right]. \quad \dots \quad (6)$$

3. Deze uitkomsten zijn nu voldoende, om de eerste formulen van de vo-

rige paragraaf nader uit te rekenen; zij geven toch, door middel der integralen (3) en (6)

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p.x) = \frac{1}{2p^2}\left[E(p.x) - F(p.x)\right], \quad \ldots \quad (a)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p.x) = \frac{1}{2p^2(1-p^2)}\left[E(p.x) - (1-p^2)F(p.x) - \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\right]; \quad (b)$$

of indien wij de symbolische notatie der achtereenvolgende bewerkingen invoeren, hetgeen hier zeer eenvoudig aangaat,

$$\left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = F(p.x), \quad \ldots \quad (c)$$

$$\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x) = \frac{1}{1-p^2}\left[E(p.x) - \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\right]. \quad \ldots \quad (d)$$

4. Op dezelfde wijze kan men de integralen behandelen, die onder het integraalteeken de functie $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ bevat; dan beginne men het onderzoek bij de twee eenvoudigste vormen

$$\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x} \quad \text{en} \quad \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}.$$

Daartoe stelle men in de herleidingsformulen (I) en (II) $-p^2$ in de plaats van p^2; zoo worden deze

$$\int_0^x \frac{\sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2\sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2b-1)(1+p^2)}\Bigg[-\frac{\sin^{2a+1}x.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+2\{(2+p^2)(b-1)-(1+p^2)a\}\int_0^x \frac{\sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2\sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3)\int_0^x \frac{\sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2\sin^2 x)^{b-3/2}}\Bigg] \quad (\text{III})$$

$$= \frac{1}{(2a-2b-1)p^2}\Bigg[-\frac{\sin^{2a-3}x.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} -$$

$$-\{(1-p^2)(a-1)+p^2 b\}\int_0^x \frac{\sin^{2a-2}x\,dx}{(1+p^2\sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} + (2a-3)\int_0^x \frac{\sin^{2a-4}x\,dx}{(1+p^2\sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\Bigg]; \quad (\text{IV})$$

waartoe dan verder behooren de volgende eindintegralen, waarbij voor de herleiding, waar noodig, de substitutie $x=\frac{\pi}{2}-y$ is gebruikt,

$$\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}dy\sqrt{1+p^2\cos^2 y}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}dy\sqrt{(1+p^2)-p^2\sin^2 y}=$$

$$=\sqrt{1+p^2}\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}dy\sqrt{1-\frac{p^2}{1+p^2}\sin^2 y}=\sqrt{1+p^2}\left[E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad (7)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dy}{\sqrt{1+p^2\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{p^2}{1+p^2}\sin^2 y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\frac{1}{p^2}\int_0^x\frac{(1+p^2\sin^2 x)-1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}dx=\frac{1}{p^2}\left[\int_0^x dx.\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right],$$

of, na invoering dezer integralen (7) en (8),

$$=\frac{1}{p^2\sqrt{1+p^2}}\left[(1+p^2)\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}-\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]..(9)$$

Ten einde te kunnen voortgaan met het opsporen van de volgende integralen, wende men zich tot de herleidingsformule (IV), en stelle daarin $a=2$, $b=0$; dan verkrijgt men, na invoering der integralen (8) en (9),

$$\int_0^x\frac{\sin^4 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\frac{1}{3p^2}\left[-\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-2(1-p^2)\int_0^x\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3p^4\sqrt{1+p^2}}\left[-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+p^2\sin^2 x}+\right.$$

$$\left.+(2-p^2)\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}-2(1-p^4)\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]..(10)$$

Thans is men in staat gesteld, om de waarde te bepalen der integraal

$$\int_0^x \sin^2 x\, dx \sqrt{1+p^2\sin^2 x} = \int_0^x \frac{\sin^2 x + p^2 \sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} dx =$$

$$= \frac{1}{3p^2}\sqrt{1+p^2}\Big[-p^2 \sin x.\cos x \sqrt{\frac{1+p^2\sin^2 x}{1+p^2}} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\} +$$

$$+ (1+2p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big]; \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

waarbij de overbrenging der integralen (9) en (10) den factor $(1+p^2)$ invoerde, die derhalve uit de grootheid tusschen de haakjes konde verwijderd worden. Daarop geeft de herleidingsformule (III) voor $a=1$ en $b=1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{1+p^2}\Big[-\frac{\sin^3 x.\cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2(1+p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\Big],$$

die weder door de invoering der pas gevonden integralen (9) en (11) overgaat in

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\cdot\frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}} +$$

$$+ F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big]\dots \quad (12)$$

5. Deze uitkomsten kunnen nu strekken tot het vinden der gezochte differentiaalformulen voor de integralen, die hier met de elliptische integralen overeenkomen. Men verkrijgt toch naar de uitkomsten (7) en (8), wanneer men naderhand van de integralen (9) en (12) gebruik maakt,

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\sqrt{1+p^2}\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[(1+p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big], \,. \quad (e)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} = \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{(1+p^2)}} +$$

$$+ E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\Big)\Big], \,. \quad (f)$$

waaruit men besluit tot den symbolischen vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

$$\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{1+p^2}\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}+\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,p^2\sin x.\cos x\right], \;.\; (h)$$

waarbij eene zekere overeenkomst met de vorige symbolische formulen (*c*) en (*d*) niet te miskennen is.

Wanneer men echter ter bekorting stelt

$$F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)=F_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\delta)$$

$$E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)=E_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon)$$

en daarop de differentiaalquotienten in de eerste leden van de formulen (*e*) en (*f*), als die van een produkt uitwerkt, verkrijgt men achtereenvolgens

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1+E_1\,\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)E_1-F_1\right\};$$

derhalve

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left[E_1-F_1\right], \text{ of } \frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[E_1-F_1\right]. \;.\; (e_1)$$

Evenzeer

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1+F_1(-\tfrac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{1+p^2}^3}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}+E_1-F_1\right],$$

derhalve

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1-F_1\right],$$

of

$$\frac{d}{d(p^2)} F_1 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1-F_1\right]. \quad . . (f_1)$$

En hieruit besluit men wederom tot den symbolischen vorm der formulen

$$\left[1-2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]E_1 = F_1, \quad \ldots \ldots \ldots (g_1)$$

$$\left[1+2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]F_1 = \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1; \quad . . (h_1)$$

die schijnbaar eenvoudiger zijn dan de vorige symbolische differentiaalformulen (g) en (h), en mede eenige overeenkomst vertoonen met de formulen (c) en (d) van § 3.

6. De bewerking $\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, levert eene integraal der eerste; en de bewerking $\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ toegepast op de integraal der eerste soort, levert wederom eene integraal der tweede, afgezien van een factor $\frac{1}{1-p^2}$ en een goniometrischen term; dit volgt uit de symbolischen formulen (c) en (d) van § 3. Het ligt nu al dadelijk voor de hand om op de elliptische integraal van iedere soort zoodanige bewerking toe te passen, dat er wederom eene elliptische integraal van dezelfde soort ontstaat; hierin slaagt men op de volgende wijze, wanneer men de symbolische bewerkingen (c) en (d) van § 3 achtereenvolgens toepast,

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = E(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left\{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\} =$$

$$= E(p.x) - \sin x.\cos x\left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\}; \quad \ldots \ldots (i)$$

wanneer men hierbij acht geeft op het ontstaan van den goniometrischen term in de formule (d), dat is op de integraal (6) in § 2. Zoodra men toch eenige wet wil opsporen, is het meestal nuttig van de latere herleidingen af te zien, en op te klimmen tot den oorspronkelijken vorm; en ook hier zal blijken, dat deze oor-

spronkelijke vorm voor de volgende bewerkingen het meest geschikt is. Uit deze (i) volgt nu verder

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x)=$$

$$=F(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left\{-2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\}=$$

$$=F(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\};\quad .\;.\;(i_1)$$

en wederom

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x)=$$

$$=E(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left\{(7-8p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{4(1-p^2)+\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{2+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+\frac{3\cos^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\}=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\};.(i_2)$$

waarbij nu de bewerkingen op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, hetzij eene integraal van dezelfde, hetzij eene der eerste soort voortbrengen, afgezien van den goniometrischen vorm, die hier telkens bestaat uit eenen factor $p^2\sin x.\cos x$, en eenen anderen, die functie is van $\sqrt{1-p^2\sin^2x}$.

Hetzelfde kan men even zoo goed bewerkstelligen ten opzichte van de elliptische integraal der eerste soort, en verkrijgt alsdan achtereenvolgens

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=E(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left(\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}\right)=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}\right\},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=$$

$$=F(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\},\;.\;(k)$$

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\}..(k_1)$$

Het is niet moeielijk, uit deze verkregen formulen tot meer algemeene uitkomsten te geraken. Noem daartoe de bewerkingen

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P, \ldots (\zeta), \text{ en } \left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=Q; \ldots\ldots (\eta)$$

en zij in het algemeen $\Phi(x)$ eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$; dan volgt rechtstreeks uit de formulen (i), (i_1) en (i_2), (d), (k) en (k_1),

$$[Q.P.Q \ldots Q.P.Q]\, E(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (i_3)$$

$$[P.Q.P \ldots Q\,P.Q]\, E(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (i_4)$$

$$[P.Q.P \ldots P.Q.P]\, F(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (k_2)$$

$$[Q.P.Q \ldots P.Q.P]\, F(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x). \ldots\ldots (k_3)$$

Maar langs dezen weg ziet men niet in, wat de algemeene vorm van de functie $\Phi(x)$ worden zal, en de vergelijking dier functiën zoo als zij in de formulen (i_1), (i_2), (k), (k_1) voorkomen, geeft hier geen licht; ook niet, wanneer bij het uitwerken der bewerkingen, de gelijknamige termen niet bij elkander telt, zoo als hier boven is geschied, maar ze gescheiden houdt, onder gedurige toepassing der duidelijke herleidingsformule

$$\frac{p^2 sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{1-(1-p^2 sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{2k-1}}, \ldots (\theta)$$

ten einde de grootheid tusschen de vierkante haakjes, in het tweede lid, telkens tot functie van alleen $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$ te herleiden.

Zoodra men echter later overgaat tot compleete elliptische integralen, dus tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ genomen; dan wordt dit bezwaar geheel opgeheven, omdat alsdan de $\Phi(x)$ in het geheel niet meer voorkomt. Zij zelve kan toch nimmer oneindig groot worden, en de factor $sin\,x.cos\,x$ wordt gelijk aan nul, zoowel voor $x=0$, als voor $x=\frac{1}{2}\pi$; vandaar dat die laatste term in de vorige formulen geheel verdwijnt.

7. Wanneer men nu dezelfde beschouwingen wil toepassen op de differentiaalformulen, die in § 5 voorkomen, stelle men eerst ter bekorting

$$\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=E_2, \ldots\ldots (\iota)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=F_2, \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

dan verkrijgen de formulen (g) en (h) den vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=F_2, \quad \ldots\ldots \quad (g')$$

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=E_2+p^2 \sin x.\cos x\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=E_2+\sin x.\cos x\left[(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right]=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad . \quad (h')$$

waar de $\Psi(x)$ uitdrukt eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$. Past men deze bewerkingen, vice versa, nog eenmaal toe, zoo verkrijgt men

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=F_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x). \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

Wanneer men toch de aangewezene bewerkingen ten uitvoer brengt, en overal, waar noodig, de herleidingsformule

$$\frac{p^2\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{(1+p^2\sin^2 x)-1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}} \quad \ldots \quad (\lambda)$$

toepast, dan verkrijgt men telkens in het tweede lid een goniometrischen term, die $\sin x.\cos x$ tot factor heeft en waarvan de andere factor een rationeele vorm van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$, dat is eene $\Psi(x)$ is.

Maar nu kan men ook doorgaan met de achtereenvolgende toepassing der vorige bewerkingen; voeren wij daarbij gemakshalve wederom symbolen in, dan kan men de Q uit (η) behouden, maar moet de P uit (ζ) vervangen worden door

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P_1. \quad \ldots\ldots \quad (\mu)$$

Op die wijze verkrijgt men dan hier

$$[P_1.Q.P_1 \; \ldots \; Q.P_1.Q]\,E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots\ldots \quad (l_1)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots Q.P_1.Q]\, E_2 = F_2 + \sin x . \cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (l_2)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots P_1.Q.P_1]\, F_2 = F_2 + \sin x . \cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (m_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \ldots P_1.Q.P_1] F_2 = E_2 + \sin x . \cos x\, \Psi(x). \ldots\ldots\ldots\ldots (m_2)$$

Ook de formulen (g_1) en (h_1) geven gereede aanleiding voor eene overeenkomstige behandeling; maar daarbij heeft men dan andere bewerkingssymbolen noodig. Noem deze hier

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = R, \ldots\ldots\ldots\ldots (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = S, \ldots\ldots\ldots\ldots (\xi)$$

dan heeft men vooreerst

$$[R]\, E_1 = F_1, \ldots\ldots\ldots\ldots (g_1)$$

$$[S]\, F_1 = E_1 + \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2 \sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}} = E_1 + \frac{p^2 \sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\} =$$

$$= E_1 + \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\} = E_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x);\ . \quad (h_1)$$

wanneer men onder $\Psi(x)$, even als boven, wederom eene rationeele functie van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ verstaat. Bij de herhaalde toepassing dezer bewerkingen, over en weder, komt er daarop vooreerst

$$[S.R]\, E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

$$[R.S]\, F_1 = F_1 + \sin x.\cos.\, \Psi(x); \ldots\ldots\ldots\ldots (o)$$

en vervolgens, geheel algemeen,

$$[S.R.S \ldots R.S.R]\, E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n_1)$$

$$[R.S.R \ldots R.S.R]\, E_1 = F_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (n_2)$$

$$[R.S.R \ldots S.R.S]\, F_1 = F_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots (o_1)$$

$$[S.R.S \ldots S.R.S]\, F_1 = E_1 + \sin x.\cos x\, \Psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (o_2)$$

Een groot bezwaar van al de formulen in deze paragraaf, is, dat zij allen eene zekere functie $\Psi(x)$ van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ bevatten, waarvan de wet vooralsnog

onbekend is. Zoodra men echter later tot de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ overgaat, zoodat de elliptische integralen compleete worden met den modulus $\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$, wordt dit bezwaar weggenomen, omdat dan die functiën van onbekende zamenstelling niet meer voorkomen wegens den factor $\sin x . \cos x$, die evenzeer voor $x = 0$, als voor $x = \frac{1}{2}\pi$ verdwijnt.

8. Men kan echter tot geheel andere, niet minder belangrijke, uitkomsten geraken, door de vergelijking (a) nog eens naar p^2 te differentieeren; en daarbij gebruik te maken van de reeds gevonden eerste differentialen naar de formulen (a) en (b). Aldus verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)}E(p.x) = \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p.x)] + \frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}\{E(p.x) - F(p.x)\} - \frac{1}{2p^2(1-p^2)} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{-\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,p^2 \sin x . \cos x - (1-p^2)F(p.x) + E(p.x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p.x)] + \frac{1}{4p^4}\left[\frac{(1-p^2)-1}{1-p^2}E(p.x) + (1-1)F(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2 \sin x . \cos x}{1-p^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2p^4}F(p.x) - \frac{2(1-p^2)+p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)}; \quad \ldots \quad (p)$$

en verder, door middel van de formule (a), ten einde de overgebleven $F(p.x)$ te elimineeren,

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)} + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = \left\{\frac{1}{2p^4} - \frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}\right\}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)} =$$

$$= \frac{-p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)};$$

en hieruit volgt ten slotte

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)} + 4(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)} + 1\right]E(p.x) = \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\sin x . \cos x =$$

$$= \left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}\sin x . \cos x; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p_1)$$

waarbij met voordacht is afgezien van de nadere herleiding van den goniometrischen term, zooals die in de formule (i) is toegepast. Want nu kan men gemakkelijk n—2 maal differentieeren, het eerste lid volgens het theorema van LEIBNITZ, en het tweede lid naar de bekende formulen (zie o. a. mijn Overzicht der Differ. Rekening, bladz. 33, 34).

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1-p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4\,(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \quad 4\,(1-p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2)\,4\,(-1)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E(p.x) =$$

$$= \sin x \,.\, \cos x \left[\sin^2 x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\, \frac{1}{2}\, \frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right] =$$

$$= \sin^3 x \,.\, \cos x \left[\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - \frac{1}{2} \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right];$$

of wel, na herleiding,

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + 4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E(p.x) =$$

$$= \sin^3 x \,.\, \cos x \left\{\frac{(-1)^{n-2}\, 1^{n-2/2}\, (-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n-3}\, 1^{n-3/2}\, (-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{-\sin^{2n-3} x \,.\, \cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\, \frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}} \{1-(2n-5+p^2)\sin^2 x\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Ten einde voorts de vergelijking (b) op dezelfde wijze te behandelen, schrijve men haar kortheidshalve

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p\,.\,x) = R - \frac{1}{2p^2}F(p\,.\,x) + \frac{1}{2p^2(1-p^2)}E(p\,.\,x), \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

waar dus

$$R = -\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\, \frac{\sin x \,.\, \cos x}{2(1-p^2)}$$

genomen werd; dan verkrijgt men, door nog eens naar p^2 te differentieeren,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p.x) = \frac{dR}{d(p^2)} + \frac{1}{2p^4}F(p.x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x) - \frac{1}{2p^2}\left\{R - \frac{1}{2p^2}F(p.x) + \frac{1}{2p^2(1-p^2)}E(p.x)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2p^2(1-p^2)}\, \frac{1}{2p^2}\{E(p\,.\,x) - F(p\,.\,x)\} =$$

$$= \frac{dR}{d(p^2)} - \frac{1}{2p^2}R + F(p.x)\left\{\frac{1}{2p^4} + \frac{1}{4p^4} - \frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\} + E(p.x)\left\{-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2} - \frac{1}{4p^4(1-p^2)} + \frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\} =$$

$$= \frac{dR}{d(p^2)} - \frac{1}{2p^2}R + \frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.\,x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p\,.\,x), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\{(1-p^2)-(3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\}+$$

$$+\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x)\ldots\ldots\ldots\ldots(r_1)$$

Gebruikt men nu de formule (b) weder, om uit (r) de $E(p.x)$ te elimineeren, zoo verkrijgt men

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=\frac{dR}{d(p^2)}+R\left\{-\frac{1}{2p^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\right\}+F(p.x)\left\{\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)}\right\}=$$

$$=\frac{dR}{d(p^2)}+\frac{1-3p^2}{2p^2(1-p^2)}R+\frac{p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x);$$

waaruit wederom wordt afgeleid

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1-2p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]F(p.x)=4p^4(1-p^2)\frac{dR}{d(p^2)}+2(1-3p^2)R=$$

$$=\frac{\sin x.\cos x}{p^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}[1-(1+p^2)(1-p^2\sin^2 x)+2p^2(1-p^2\sin^2 x)^2]=$$

$$=\frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}[\sin^2 x-(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2]\ldots\ldots(r_2)$$

Bij deze herleidingen is in de laatste vergelijking (r_2), even als bij (r_1), gebruik gemaakt van de volgende uitkomst

$$\frac{d}{d(p^2)}R=-\tfrac{1}{2}\sin x.\cos x\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\left\{\frac{-\sin^2 x}{1+(1-p^2)\sin^2 x}-\frac{-1}{1-p^2}-\frac{1}{2}\frac{-\sin^2 x}{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin x.\cos x\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\frac{2+(1-3p^2)\sin^2 x+(1-p^2)^2\sin^4 x}{2(1-p^2)(1-p^2\sin^2 x)\{1+(1-p^2)\sin^2 x\}}=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\{(1-p^2)-(2-3p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\}.$$

En nu kan men er toe overgaan, om de vergelijking (r_2) n—2 maal te differentieeren met behulp van het theorema van LEIBNITZ bij het eerste lid, en der boven aangehaalde formulen bij het tweede lid; deze bewerking levert ons dan het volgende

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)4(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \quad + \quad 4(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)4(-2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \quad - \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x.\cos x\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\};$$

waaruit men na herleiding verkrijgt

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(-\sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-5/2}}\right\}=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x(\sin^2 x)^{n-2}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-\sin^2 x(2n-3)(2n-5)+(2n-5)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{-\sin^{2n-3}x.\cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}[(2n-3)+\{(2n-3)(2n-5)-(2n-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x]. \quad . \ (s)$$

9. Laat ons trachten, dergelijke algemeene differentiaalformulen af te leiden voor de overeenkomstige integralen van § 5; beginnen wij daartoe met den laatsten vorm der uitkomsten (e_1) en (f_1). Differentieeren wij de vergelijking (e_1) nog eens naar p^2, zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{d}{d(p^2)}F_1\right\}=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[(E_1-F_1)-\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}-F_1+(1+p^2)E_1\right\}\right]=$$

$$=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left[-p^2E_1-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\right]. \quad . \ (t)$$

Daar nu de F'_1 uit den tweeden term van het tweede lid verdwenen is, en alleen voorkomt in den eersten term aldaar; en daar die eerste term naar de vergelijking (e_1) zelve juist

$$-\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}E_1$$

tot waarde heeft, zoo geeft het overbrengen daarvan in het eerste lid

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}E_1=-\frac{1}{4p^2(1+p^2)^2}\left[E_1+\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\right];$$

waaruit dadelijk volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E_1=$$
$$=-\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\};\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t_1)$$

eene uitkomst, die men nu weder gereedelijk $n-2$ maal naar p^2 kan differentieeren; bij welke bewerking eenerzijds het theorema van LEIBNITZ, anderzijds de boven aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren te gebruiken zijn. Langs dien weg komt men tot deze uitkomst

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)^2\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)4(1+4p^2+3p^4)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)4(4+6p^2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\dfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)4.6.\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \qquad +\ 4(1+3p^2+2p^4)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)\ 4(3+4p^2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\ 4.4.\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right]E_1=\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P;\ .(u)$$

als P het tweede lid van de vergelijking (t_1) voorstelt, dus

$$P=(-\sin x.\cos x)(\sqrt{1+p^2})\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}.$$

Ten einde van deze uitdrukking het $n-2$ differentiaalquotient ten opzichte van p^2 te bepalen, is men gedwongen, zijn toevlucht te nemen tot het theorema van LEIBNITZ; en daartoe vindt men achtereenvolgens

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=\frac{d^k}{d(p^2)^k}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\sin^2 x.\left[\frac{(-1)^k 1^{k/2}(\sin^2 x)^k}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{k-1}1^{k-1/2}(\sin^2 x)^{k-2}}{2^{k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{k-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^k\sin^{2k}x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{k-1/2}}{2^k}\left\{(2k-1)\sin^2 x-(1+p^2\sin^2 x)\right\}=\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x\;1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\left\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\right\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\cdot\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}\,\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n-k-3}\,1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-3}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}};$$

zoodat nu algemeen is

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P=-\sin x.\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x.1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\left\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\right\}\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\,\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}};$$

en hierdoor wordt de vergelijking (u) na eenige herleiding

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\left\{n(1+3p^2)-(1+4p^2)\right\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+\left\{1+4(n-2)[n(2+3p^2)-(3+5p^2)]\right\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\right]E_1=$$

$$=\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\left\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\right\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+\left\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\right\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\right]E_1=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\,\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}},\quad\ldots\;(u_1)$$

waarin de tweede vorming van het eerste lid geschied is met het oog op de straks af te leiden algemeene differentiaalformule (w_1) voor de andere functie F_1: op die wijze toch wordt eerst het verband tusschen beide formulen zichtbaar.

Ten einde nu de overeenkomstige vergelijking (f_1) op dezelfde wijze te kunnen behandelen, schrijve men haar eerst in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{\sin x.\cos x}{2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]+\frac{1}{2p^2}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}F_1,\quad.\;(f_1)$$

dan komt er, wanneer men, even als boven, nog eens ten opzichte van p^2 differentieert,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1 = \frac{-\sin x.\cos x}{2.2\sqrt{1+p^2}^3}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}+\frac{\sin x.\cos x}{2\sqrt{1+p^2}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{2p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4\sqrt{1+p^2}^3}\left\{(1+p^2)\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-p^2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}\frac{1}{-4p^4(1+p^2)}E_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+(1-p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{(1+2p^2)-(1+p^2)+1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1 \,..\, (v)$$

Ten einde hieruit nog de overgebleven E_1 te elimineeren, telle men naar de formule (f_1) bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{-2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)}\right\}+\frac{1}{2p^4}E_1-\frac{2(1+p^2)}{4p^4(1+p^2)^2}F_1,$$

dan komt er, na herleiding,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1+\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}F_1;$$

waaruit verder dadelijk volgt

$$\left[4p^4(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_1=$$

$$=-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}\,..\,(v_1)$$

Hierbij valt reeds dadelijk op te merken, dat de symbolische bewerking van het eerste lid overgaat in die bij de vergelijking (t_1) wanneer men in (v_1) de p^2 en $1+p^2$ onderling verwisselt; men ziet dadelijk dat eene dergelijke verwisseling, dat is van p^2 en $1-p^2$, bij de vorige overeenkomstige vergelijkingen (p_1) en (r_1) niet opgaat. Wil men nu uit deze differentiaalformule van de tweede orde eene

algemeene differentiaalformule afleiden, dan moet men eerst het tweede lid der vorige vergelijking (v_1), wat betreft den factor tusschen de haakjes, in een anderen vorm brengen, meer geschikt voor het algemeene differentieeren naar p^2; men vindt alzoo achtereenvolgens

$$p^2 \frac{\sin^4 x}{\sqrt{(1+p^2 \sin^2 x)^3}} - (1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x} =$$

$$= \left\{ -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{\sin^2 x}{\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)}} \right\} - \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x} \right\} - \sqrt{1+p^2\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2\sin^2 x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (v_2)$$

Differentieer nu n—2 maal naar (p^2), zoo wordt

$$\left[\begin{aligned} &4p^4(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)4p^2(2+3p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(2+6p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)\,.\,4.6.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ &+ \quad 4p^2(1+p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2) \quad 4(1+2p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,.\,4\,.\,2\,.\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ &\qquad\qquad + \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{aligned}\right] F_1 = \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} Q, \, . \, (w)$$

waarbij Q het tweede lid der vergelijking (v_1) voorstelt, en wel zoo, dat de tweede factor tusschen de haakjes den vorm (v_2) heeft verkregen. Men heeft dus

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} Q = -\sin x.\cos x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \left[(p^2\sqrt{1+p^2}) \left(-\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2\sin^2 x} \right) \right].$$

Ten einde deze door middel van het theorema van LEIBNITZ te bepalen, heeft men eerst

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}[p^2\sqrt{1+p^2}] = p^2 \frac{d^k}{d(p^2)^k}\sqrt{1+p^2} + k.1.\frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\sqrt{1+p^2} = p^2\, \tfrac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1}1^{k-1/2}}{2^{k-1}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} + k.\tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-3/2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} \{-p^2(2k-3) + 2(1+p^2)\} = \frac{(-1)^{k-2}1^{k-2/2}}{2^k(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} \{2-(2k-5)p^2\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\left(\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)=$$

$$=2\frac{d^{n-k-1}}{d(p^2)^{n-k-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sin^2 x\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=$$

$$=2\frac{(-1)^{n-k-1}1^{n-k-1/2}(\sin^2 x)^{n-k-1}}{2^{n-k-1}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}+\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-2/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-3}}{2^{n-k-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-5/2}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}\{-(2n-2k-3)(2n-2k-5)\sin^2 x+(2n-2k-5)(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];$$

zoodat eindelijk wordt

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}Q=-\sin x.\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}\,1^{k-2/2}(-1)^n(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}\{2-(2k-5)p^2\}\times$$

$$\times[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];$$

en hiermede verkrijgen wij ten slotte voor onze differentiaalformule (w)

$$\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{n(2+3p^2)-(3+5p^2)\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\ +[1+4(n-2)\{n(1+3p^2)-(2+7p^2)\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\ +[1+4(n-2)\{(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}\,1^{k-2/2}\sin^{2n-2k-3}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}\{2-(2k-5)p^2\}[(2n-2k-3)-$$

$$-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-5)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];\;\ldots\ldots\;(w_1)$$

waarbij wederom het eerste lid door eene kleine herleiding zoo veranderd is, dat de straks vermelde overeenkomst met de formule (u_1) gemakkelijker in het oog springt.

10. De schijnbaar meer zamengestelde vergelijkingen (e) en (f) kan men op dezelfde wijze behandelen; zoo als men zien zal, geven zij tot meer eenvoudige uitkomsten aanleiding. Schrijven wij ze daartoe in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2), \dots\dots\dots\dots\dots\dots (e')$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x . \cos x - (1+p^2)F_2 + E_2\right\} =$$

$$= \frac{\sin x . \cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2; \dots (f')$$

waarbij nu de vormen E_2 en F_2 van de formulen (*i*) en (*k*) zijn ingevoerd; zoodat die beide vergelijkingen in dezen vorm met de andere vergelijkingen (*c*) en (*d*) tamelijk wel overeenkomen. Differentieert men nu deze vergelijkingen nog eenmaal naar p^2, en voert men daarna dezelfde vergelijkingen wederom in, zoo komt er achtereenvolgens voor de eerste

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) + \frac{1}{2p^2}\left(\frac{d}{d(p^2)}E_2 - \frac{d}{d(p^2)}F_2\right) = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) +$$

$$+\frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2) - \left\{\frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2\right\}\right]; . (x)$$

omdat nu bij den term tusschen de vierkante haakjes in het tweede lid, de term $\dfrac{1}{2p^2}$ F_2 geheel verdwijnt, behoeft de F_2 alleen uit den eersten term van dat tweede lid te worden geelimineerd. Dit geschiedt zeer eenvoudig door middel van de vergelijking (*e'*); telt men toch bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2),$$

zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{(1+p^2)-1}{4p^4(1+p^2)}E_2 - \frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right),$$

of, na eene aangewezen herleiding,

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} + 4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)} - 1\right]E_2 = -\sin x.\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right), . (x_1)$$

waaruit verder, wanneer men deze vergelijking $n-2$ maal naar p^2 differentieert, de algemeene differentiaalformule volgt

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3).4.2.\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \quad 4(1+p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \quad (n-2) \quad 4.1.\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E_2 =$$

$$= -\sin x.\cos x \left\{ \sin^2 x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \tfrac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} \right\},$$

dat is

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + 4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right] E_2 =$$

$$= -\sin^3 x.\cos x \left\{ \frac{(-1)^{n-2}\, 1^{n-2/2}(\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} + \tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{n-3}\, 1^{n-3/2}(\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-5/2}} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n \sin^{2n-1} x.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} \frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}} \{1-(2n-5-p^2)\sin^2 x\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (y)$$

Ten einde verder op dezelfde wijze de functie F_2 te behandelen, noeme men kortheidshalve den eersten term in het tweede lid van de vergelijking (f')

$$\frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) = R = \frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)} \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}};$$

en differentieere vervolgens die vergelijking (f') nog eenmaal naar (p^2), zoo verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = \frac{d}{d(p^2)}R + \frac{1}{2p^4}F_2 - \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}E_2 - \frac{1}{2p^2}\left\{R - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2\right\} + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{1}{2p^2}(E_2-F_2) \ldots (z)$$

Daar nu echter in den eersten term van het tweede lid is

$$\frac{d}{d(p^2)}R = \tfrac{1}{2}\sin x.\cos x \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} \left\{ \frac{\sin^2 x}{1+(1+p^2)\sin^2 x} - \frac{1}{1+p^2} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{1+p^2\sin^2 x} \right\} =$$

$$= \frac{-\sin x.\cos x}{4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\{2+(1+3p^2)\sin^2 x+(1+p^2)^2\sin^4 x\} =$$

$$= \frac{-\sin x.\cos x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}\{(1+p^2)-(2+3p^2-p^4)(1+p^2\sin^2 x)+(1+p^2)^2(1+p^2\sin^2 x)^2\},$$

en dus, na substitutie in de vorige vergelijking,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = F_2\left\{\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right\}-E_2\left(\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right)-$$

$$-\frac{\sin x.\cos x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2x}^3}\left\{(1+p^2)-(2+3p^2-p^4)(1+p^2\sin^2x)+2(1+p^2)^2(1+p^2\sin^2x)^2\right\}..(z_1)$$

Daar in de coëfficiënt van E_2 de beide laatste termen elkander opheffen, moet slechts de eerste term worden verdreven, om de E_2 geheel te elimineeren. Tot dat einde telle men bij de vorige vergelijking (z)

$$\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}E_2-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}F_2+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}R,$$

zoodat men verkrijgt

$$\frac{d^2}{d(p^2)}F_2+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = F_2\left(\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}\right)+$$

$$+\left\{\frac{d}{d(p^2)}R+R\left(-\frac{1}{2p^2}+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\right)\right\}=-\frac{p^2}{4p^4(1+p^2)}F_2+\left(\frac{d}{d(p^2)}R+\frac{1+3p^2}{2p^2(1+p^2)}R\right);$$

en hieruit leidt men verder af

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_2 =$$

$$=\frac{\sin x.\cos x}{p^2(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2x}^3}\left\{-(1+p^2)+(1-p^4)(1+p^2\sin^2x)+(1+p^2)2p^2(1+p^2\sin^2x)^2\right\}=$$

$$=\frac{\sin x.\cos x}{p^2\sqrt{1+p^2\sin^2x}^3}\left\{-1+(1-p^2)(1+p^2\sin^2x)+2p^2(1+p^2\sin^2x)^2\right\}=$$

$$=\frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2x}^3}\left\{\sin^2x-(1+p^2\sin^2x)+2(1+p^2\sin^2x)^2\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(z_2)$$

Thans kan men overgaan, om deze differentiaalformule $n-2$ maal te differentieeren, waarbij men weder gebruik heeft te maken van het theorema van LEIBNITZ, en van de reeds vroeger aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren. Langs dien weg komt men dan tot de volgende uitkomst

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)\,4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \qquad 4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \quad (n-2) \qquad 4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] F_2 =$$

$$= sinx.cosx\left\{-2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} - \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} + 2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\,\tfrac{1}{2}\,\frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}}\right\},$$

waaruit verder na herleiding volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-1)\,4(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F_2 =$$

$$= sinx.cosx\left\{-2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1+p^2 sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2 sin^2 x)^{n-3/2}} + sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2 sin^2 x)^{n-5/2}}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} sinx.cosx (sin^2 x)^{n-2}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1+p^2 sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-(2n-3)(2n-5)sin^2 x + (2n-5)(1+p^2 sin^2 x) + 2(1+p^2 sin^2 x)^2\} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} sin^{2n-3}x.cosx}{(1+p^2 sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}[(2n-3) + \{(2n-3)(2n-5)+(2n-1)p^2\}sin^2 x + 2p^4 sin^4 x] \,..\, (aa)$$

11. Laat ons ter toepassing van enkele der vorige formulen, nog het derde differentiaalquotient ten opzichte van p^2 afleiden van de beide elliptische integralen der eerste en tweede soort. Zij daartoe in de vergelijking (q) $n = 3$, zoo is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3} + 4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} - 3\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = -\frac{sin^3 x\,.\,cos\,x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3}\,\tfrac{1}{2}\,\{1-(1+p^2)sin^2 x\}.$$

Daarbij volgt uit de vergelijkingen (p) en (o), overeenkomstig,

$$-4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}E(p.x) = -4(2-3p^2)\left\{\frac{1}{2p^4}F(p.x) - \frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x) + \frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}\,\frac{1+(1-p^2)sin^2 x}{4p^2(1-p^2)}\right\},$$

$$3\frac{d}{d(p^2)}E(p\,.x) = \frac{3}{2p^2}\{E(p\,.x) - F(p\,.x)\}.$$

Wanneer men deze bij de eerste optelt, en dan door $4p^2(1-p^2)$ deelt, verkrijgt men

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p\,.x) = \frac{3+5p^2-16p^4+6p^6}{8p^4(1-p^2)^2}E(p\,.x) - \frac{4-3p^2}{8p^4(1-p^2)}F(p\,.x) -$$

$$- \frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{8p^4(1-p^2)^2}\left\{\frac{cos^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^3} - \frac{7+p^2-5\,sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}} + 5(2-p^2)\sqrt{1-p^2 sin^2 x}\right\} \;.\;.\;.\; (ab)$$

Vervolgens neme men $n=3$ in de vergelijking (s), dan is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3}+8(1-2p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}-9\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=$$
$$=-\frac{\sin^3 x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}\,\tfrac{1}{2}\,\{-3\sin^2 x+(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\}..$$

Evenzeer volgt nu uit de vergelijkingen (r) en (b) achtereenvolgens

$$-8(1-2p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p.x)=-8(1-2p^2)\left[\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin x.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\{(1-p^2)-(3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2)^3(1-p^2\sin^2 x)^3\}\right],$$

$$9\frac{d}{d(p^2)}F(p.x)=\frac{9}{2p^2(1-p^2)}\left[-(1-p^2)F(p.x)+E(p.x)-p^2\frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\{\sin^2 x+(1-p^2\sin^2 x)\}\right].$$

Door middel van deze vergelijkingen verdwijnen de twee laatste termen uit het eerste lid; wanneer men daarop door $4p^2(1-p^2)$ deelt, komt er

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p.x)=\frac{8-23p^2+23p^4}{8p^6(1-p^2)^3}E(p.x)-\frac{2+2p^2-3p^4}{8p^6(1-p^2)^2}F(p.x)-\frac{\sin x.\cos x}{8p^6(1-p^2)^3}\left\{\frac{3(1-p^2)^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}+\right.$$
$$\left.+\frac{(3+p^2)(1-p^4)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}+\frac{9-42p^2+32p^4+9p^6}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-(1-p^2)^2(8-5p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}..\ (ac)$$

12. Wat betreft de elliptische integralen van de derde soort, bedenke men, dat zij slechts van die der eerste soort verschillen door den factor $(1-n\sin^2 x)^{-1}$ onder het integraalteeken; daar deze factor geene p bevat, hebben de bewerkingen van de vorige paragrafen daarop geen invloed; en is men derhalve voor deze integralen der derde soort teruggevoerd tot de vergelijkingen voor de functie $F(p.x)$.

Vervolgens kunnen wij nog het integreeren ten opzichte van de standvastige p^2 beproeven, maar dan verkrijgen wij, door verwisseling in de orde van het integreeren, hetgeen hier geoorloofd is,

$$\int d(p^2)E(p.x)=\int_0^x dx\int d(p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}=\int_0^x dx\frac{-2}{3\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3=-\frac{2}{3}\int_0^x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\int d(p^2)F(p.x)=\int_0^x dx\int d(p^2)\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}=\int_0^x dx\frac{-2}{\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x}=-2\int_0^x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Beide uitkomsten zijn ondoorloopende integralen, omdat de functie onder het integraalteeken voor de benedenste grens $n=0$ een eindigen teller bezit, terwijl daarentegen de noemer, $\sin^2 x$, nul wordt. Langs dezen weg kan men dus niet tot bruikbare uitkomsten geraken.

13. Veel eenvoudiger worden de vorige uitkomsten, wanneer men de integralen tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, waardoor zij tot bepaalde integralen worden.

In dat geval toch worden de vergelijkingen (a) en (b), (c) en (d)

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p)=\frac{1}{2p^2}\{E(p)-F(p)\}, \dots\dots \quad (A)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p)=\frac{1}{2p^2(1-p^2)}\{E(p)-(1-p^2)F(p)\}, \dots\dots \quad (B)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p)=F(p), \dots\dots \quad (C)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p)=\frac{1}{1-p^2}E(p). \dots\dots \quad (D)$$

Bij de vergelijkingen (e) en (f), (g) en (h) wordt

$$E_1=\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi}=+E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \dots \quad (\delta_1)$$

$$F_1=\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi}=+F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \dots \quad (\varepsilon_1)$$

zoodat zij leveren

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \dots \quad (E)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \dots \quad (F)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \dots\dots \quad (G)$$

$$\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}=\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \dots\dots \quad (H)$$

terwijl verder uit de volgende vergelijkingen (e_1) en (f_1), (g_1) en (h_1) wordt afgeleid

$$\frac{d}{d(p^2)}.E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (E_1)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}.F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots \quad (F_1)$$

$$\left[1-2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad \ldots \ldots \quad (G_1)$$

$$\left[1+2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad \ldots \ldots \quad (H_1)$$

Behouden wij de notatiën voor de bewerkingen

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P, \quad \ldots \quad (\zeta), \quad \text{en} \quad \left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=Q; \quad \ldots \ldots \quad (\eta)$$

dan geven de vergelijkingen (i_3) en (i_4), (k_2) en (k_3)

$$[Q.P.Q \;\ldots\; Q.P.Q]\,E(p)=F(p), \quad \ldots \ldots \quad (I_3)$$

$$[P.Q.P \;\ldots\; Q.P.Q]\,E(p)=E(p), \quad \ldots \ldots \quad (I_4)$$

$$[P.Q.P \;\ldots\; P.Q.P]\,F(p)=E(p), \quad \ldots \ldots \quad (K_2)$$

$$[Q.P.Q \;\ldots\; P.Q.P]\,F(p)=F(p); \quad \ldots \ldots \quad (K_3)$$

terwijl bij het behoud der notatie

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P_1. \quad \ldots \ldots \quad (\mu)$$

de vergelijkingen (l_1) en (l_2), (m_1) en (m_2) geven, omdat hier wordt,

$$E_2=\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots \ldots \quad (\iota_1)$$

$$F_2=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots \ldots \quad (\varkappa_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \;\ldots\; Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \;.\; (L_1)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (L_2)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (M_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \ldots P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad (M_2)$$

En eindelijk, indien men de bewerkingsnotatiën

$$\left[1-2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]=R, \quad (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1+2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]=S \quad (\xi)$$

behoudt, leidt men uit de vergelijkingen (n_1) en (n_2), (o_1) en (o_2) af

$$[S.R.S \ldots R.S.R]\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (N_1)$$

$$[R.S.R \ldots R.S.R]\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (N_2)$$

$$[R.S.R \ldots S.R.S]\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (O_1)$$

$$[S.R.S \ldots S.R.S]\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad (O_2)$$

Verder leveren de vergelijkingen (p) en (p_1), (r) en (r_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E(p)=\frac{1}{4p^4(1-p^2)}\{2(1-p^2)F(p)-(2-p^2)E(p)\}, \quad (P)$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}+4(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E(p)=0, \quad (P_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p)=\frac{1}{4p^4(1-p^2)^2}\{(2-3p^2)F(p)-2(1-2p^2)E(p)\}, \quad (R)$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}+4(1-2p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]F(p)=0, \quad (R_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (q) en (s)

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E(p)=0,\ .\ (\mathrm{Q})$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p)=0.\ .\ (\mathrm{S})$$

Vervolgens genaderd tot de vergelijkingen (t) en (t_1), (v) en (v_1), komt er naar de formulen (δ_1) en (ε_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left\{2(1+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(2+5p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\},\ .\ (\mathrm{T})$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0,\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{T}_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\},\ .\ .\ .\ (\mathrm{V})$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{V}_1)$$

en naar de meer algemeene differentiaalformulen (u) en (w)

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0,\ .\ .\ (\mathrm{U})$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0.\ .\ .\ (\mathrm{W})$$

Even zoo geven de volgende vergelijkingen (x) en (x_1), (z) en (z_1), wanneer men de formulen (ι_1) en ($\varkappa_1$) gebruikt,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\sqrt{1+p^2}E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{2F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}.\ .\ (\mathrm{X})$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0, \quad \ldots\ldots (X_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^4\sqrt{1+p^2}^3}\left\{(3+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-2(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad . (Z)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0; \quad \ldots (Z_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (y) en (aa)

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (Y)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (AA)$$

Ten slotte geven de waarden (ab) en (ac) nog hier

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p)=\frac{1}{8p^4(1-p^2)^2}\left[(3+5p^2-16p^4+6p^6)E(p)-(1-p^2)(4-3p^2)F(p)\right], \quad . \; (AB)$$

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p)=\frac{1}{8p^6(1-p^2)^3}\left[(8-23p^2+23p^4)E(p)-(2+2p^2-3p^4)F(p)\right]. \quad \ldots (AC)$$

Men had alle formulen van deze paragraaf, ook rechtstreeks, en op zich zelve beschouwd, veel gemakkelijker kunnen vinden, als men de integralen (1) tot (12) tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, en deze als punt van uitgang neemt voor de volgende beschouwingen.

EEN AANHANGSEL

TOT DE

TAFELS VAN ONBEPAALDE INTEGRALEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Bij een ander onderzoek kwam ik tot onbepaalde integralen, waarin de functie onder het integraalteeken eene elliptische integraal bevatte. Het kwam mij niet zonder gewicht voor, zulke integralen ook te onderzoeken, wanneer het den gewonen, kanonischen vorm van elliptische integralen gold.

Ten einde dit onderzoek echter uit een meer algemeen standpunt te kunnen behandelen, was het noodig, algemeene herleidingsformulen te bezitten voor integralen van den vorm $\int \varphi(x) \Delta \, dx$ en $\int \varphi(x) \frac{1}{\Delta} dx$; waar de $\Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}$ is, zooals zij in de elliptische integralen der eerste en tweede soort voorkomt, en waar $\varphi(x)$ eene eenvoudige goniometrische functie voorstelt. Wel is daaromtrent iets geleverd door VERDAM in twee stukjes, voorkomende in Deel II van het Tijdschrift „het Instituut", — en zijn door mij in het XVI^de^ Deel der Verslagen en Mededeelingen die herleidingsformulen werkelijk gegeven, doch alleen voor het geval dat de integralen tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ werden genomen, en dus natuurlijk die herleidingsformulen veel eenvoudiger worden: maar het gewenschte stel ontbrak toch.

Het viel echter niet moeilijk, de gewenschte herleidingsformulen af te leiden

voor de meest algemeene integralen, die mij van dienst konden zijn, namelijk $\int \varphi(x)\, \Delta^{2n-1}\, dx$, waar $\varphi(x)$ eene geheele macht van sinus, cosinus, of tangens van de geheele of van de halve x is, en waarbij n ook negatief te nemen was, zoodat de Δ in den noemer voorkwam. En daaruit waren dan de overeenkomstige integralen $\int \varphi(x) \frac{dx}{\Delta}$ en $\int \varphi(x)\, \Delta\, dx$, hier voor $n = 0$ en $n = 1$, gemakkelijk te vinden.

Daar alle integralen hier genomen worden tusschen de grenzen 0 en x, behoeft dit nergens afzonderlijk te worden aangegeven.

Het onderzoek leverde ten slotte een volledig stel geschikte herleidingsformulen met de noodige eindintegralen, die nu in tafels konden worden verzameld. Daardoor scheen de titel van dit opstel gerechtvaardigd.

HOOFDSTUK I.

VOORBEREIDEND ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE ALLEEN GONIOMETRISCHE FUNCTIËN, EN DAARBIJ DE Δ BEVATTEN.

2. Om het voorgestelde doel te bereiken, moet men in plaats van de methode van het integreeren bij gedeelten, — die hier niet toegepast kan worden — zooals bekend is, eene andere gebruiken, die aldus kan worden voorgesteld. Men moet een geschikten vorm differentieeren; dan de verschillende termen, die daardoor ontstaan, zoo herleiden, dat er na de integratie de gezochte integraal en hare verwanten van dezelfde soort voorkomen. Die te differentieeren vorm zal nu moeten bevatten: 1°. de factoren onder het integraalteeken tot eene hoogere macht, soms met een verschil van 1 of van 2; 2°. die, welke in den noemer voorkomen, evenzoo tot eene lagere macht; omdat door het differentieeren de eerste machten verlaagd, de tweede verhoogd worden. Vervolgens moeten nog als factoren daarbij gevoegd worden de differentiaalquotienten der verschillende factoren. De ondervinding zal hier wel leeren, hoe in de verschillende voorkomende gevallen die te differentieeren vorm te kiezen zij.

Beginnen wij met de eenvoudigste gevallen, waar $\varphi(x)$ slechts een enkelen vorm bezit, tot eene zekere geheele macht p verheven.

Men heeft door logarithmisch differentieeren

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\cos x.\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\cos x\,.\,\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{-\frac{\sin x}{\cos x}+(p-3)\frac{\cos x}{\sin x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2\sin x\,.\,\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{[-\sin^2x+(p-3)(1-\sin^2x)](1-k^2\sin^2x)+(2n-1)k^2\sin^2x.(1-\sin^2x)\}=$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-3)-[(p-2)+(p-2n-2)k^2]\sin^2x+(p-2n-1)k^2\sin^4x\}=..(a_1)$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{k^2\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[(4n-p)+(p-2n-2)k^2]\Delta^2+(p-2n-1)\Delta^4\}\;;.(b_1)$$

waar nu de grootheid tusschen haakjes in het tweede lid eerst naar de machten van $\sin x$, dan naar die van Δ is gerangschikt. Wanneer men nu in deze laatste p door $p+4$ vervangt, zal de integratie ons tot de beide herleidingsformulen voeren

$$\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n-1)k^2}\left\{\frac{\cos x\,.\,\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$
$$\left.+[(p-2)+(p-2n-2)k^2]\int\frac{\sin^{p-2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-3)\int\frac{\sin^{p-4}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ldots(\mathrm{A}_1)$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-\frac{k^2\cos x\,.\,\sin^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$
$$\left.+[(4n-p-4)+(p-2n+2)k^2]\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n-1}}+(p-2n+3)\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n-3}}\right\}..(\mathrm{B}_1)$$

Evenzoo is

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\sin x.\cos^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin x\,.\,\cos^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{\cos x}{\sin x}-(p-3)\frac{\sin x}{\cos x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2\sin x\,.\,\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{[\cos^2x-(p-3)(1-\cos^2x)](1-k^2+k^2\cos^2x)+(2n-1)k^2\cos^2x.(1-\cos^2x)\}=$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-3)(1-k^2)+[(p-2)-(p-n-2)2k^2]\cos^2x+(p-2n-1)k^2\cos^4x\}=.(a_2)$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{k^2\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[(4n-p)-(n-1)2k^2]\Delta^2+(p-2n-1)\Delta^4\};..(b_2)$$

*

en hieruit leidt men af, wanneer men eerst in (b_2) p vervangt door $p+4$,

$$\int\frac{\cos^p x dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n-1)k^2}\left\{\frac{\sin x.\cos^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}-\right.$$

$$\left.-[(p-2)-(p-n-2)2k^2]\int\frac{\cos^{p-2}x dx}{\Delta^{2n+1}}+(p-3)(1-k^2)\int\frac{\cos^{p-4}x dx}{\Delta^{2n+1}}\right\}, \ldots (A_2)$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-\frac{k^2\sin x.\cos^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$

$$\left.+[(4n-p-4)-(n-1)2k^2]\int\frac{\cos^p x\, dx}{\Delta^{2n-1}}+(p-2n+3)\int\frac{\cos^p x\, dx}{\Delta^{2n-3}}\right\}\ldots (B_2)$$

En nog

$$\frac{d}{dx}.\frac{tang^{p-2}x}{\sin x.\cos x.\Delta^{2n-1}}=\frac{tang^{p-2}x}{\sin x.\cos x.\Delta^{2n-1}}\left\{(p-2)\frac{1}{\cos^2 x.tang x}-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{\left[(p-2)\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right](1-k^2\sin^2 x)+(2n-1)k^2\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{\left[(p-2)\frac{1}{\cos^2 x}-1+tang^2 x\right]\left(\frac{1}{\cos^2 x}-k^2 tg^2 x\right)+(2n-1)k^2 tang^2 x\right\},$$

of daar $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+tg^2 x$ is,

$$=\frac{tang^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-3)+[(p-2)2+(2n-p+2)k^2]tang^2 x+(p-1)(1-k^2)tang^4 x\};.(a_3)$$

waaruit

$$\int\frac{tang^p x\, dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-2}x}{\sin x.\cos x.\Delta^{2n-1}}-\right.$$

$$\left.-[(p-2)2+(2n-p+2)k^2]\int\frac{tang^{p-2}x\, dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-3)\int\frac{tang^{p-4}x\, dx}{\Delta^{2n+1}}\right\}\ldots (A_3)$$

Eene herleidingsformule (b_3) is hier niet te vinden dan met den factor $\frac{tang^{p-2}x}{\sin^2 x.\cos^2 x.\Delta^{2n+1}}=\frac{tang^{p-4}x+2\,tang^{p-2}x+tang^p x}{\Delta^{2n+1}}$; en deze kan niet tot eene herleidingsformule (B_3) voeren.

Uit den vorm der formule (A_3) blijkt, dat het geval van $p=1$ hier is uitgesloten.

3. Dergelijke herleidingsformulen kan men ook afleiden voor goniometrische factoren van den halven hoek, dat is voor $sin^p \frac{1}{2} x$, $cos^p \frac{1}{2} x$ en $tang^p \frac{1}{2} x$. Vooreerst heeft men daartoe, altijd naar de boven gevolgde methode,

$$\frac{d}{dx} \frac{cos \frac{1}{2} x . sin^{p-5} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{cos \frac{1}{2} x . sin^{p-5} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{sin \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x} + (p-5) \frac{1}{2} \frac{cos \frac{1}{2} x}{sin \frac{1}{2} x} - (2n-1) \frac{1}{2} \frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-6} \frac{1}{2} x}{2 \Delta^{2n+1}} \{ [-sin^2 \tfrac{1}{2} x + (p-5)(1 - sin^2 \tfrac{1}{2} x)] (1 - 4 k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x + 4 k^2 sin^4 \tfrac{1}{2} x) +$$

$$+ (2n-1) k^2 . 4 sin^2 \tfrac{1}{2} x . (1 - sin^2 \tfrac{1}{2} x)(1 - 2 sin^2 \tfrac{1}{2} x) \} =$$

$$= \frac{sin^{p-6} \frac{1}{2} x}{2 \Delta^{2n+1}} \{ (p-5) - [(p-4) + (p-2n-4) 4 k^2] sin^2 \tfrac{1}{2} x +$$

$$+ (p-3n-3) 8 k^2 sin^4 \tfrac{1}{2} x + (4n-p+2) 4 k^2 sin^6 \tfrac{1}{2} x \} ; \quad \ldots \ldots (a_4)$$

derhalve

$$\int \frac{sin^p \frac{1}{2} x \, dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(4n-p+2) 4 k^2} \left\{ \frac{sin x . sin^{p-6} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} - (p-3n-3) 8 k^2 \int \frac{sin^{p-2} \frac{1}{2} x \, dx}{\Delta^{2n+1}} + \right.$$

$$\left. + [(p-4) + (p-2n-4) 4 k^2] \int \frac{sin^{p-4} \frac{1}{2} x \, dx}{\Delta^{2n+1}} - (p-5) \int \frac{sin^{p-6} \frac{1}{2} x \, dx}{\Delta^{2n+1}} \right\} \ldots (A_4)$$

Ook hier, en evenzeer bij de twee volgende gevallen, is de herleiding (*b*) niet te vinden; want daar $2 \, sin^2 \frac{1}{2} x = 1 - cos \, x$, $2 \, cos^2 \frac{1}{2} x = 1 + cos \, x$ is, en wegens den factor $cos \, x$ in den laatsten term van de herleiding, zullen er nog immer termen in die herleiding overblijven met den vreemden en niet te verwijderen factor $cos \, x$.

Vervolgens is

$$\frac{d}{dx} \frac{sin \frac{1}{2} x . cos^{p-5} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{sin \frac{1}{2} x . cos^{p-5} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{cos \frac{1}{2} x}{sin \frac{1}{2} x} - (p-5) \frac{1}{2} \frac{sin \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x} - (2n-1) \frac{1}{2} \frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{cos^{p-6} \frac{1}{2} x}{2 \Delta^{2n+1}} \{ [cos^2 \tfrac{1}{2} x - (p-5)(1 - cos^2 \tfrac{1}{2} x)] (1 - 4 k^2 cos^2 \tfrac{1}{2} x + 4 k^2 cos^4 \tfrac{1}{2} x) +$$

$$+ (2n-1) k^2 . 4 cos^2 \tfrac{1}{2} x . (1 - cos^2 \tfrac{1}{2} x)(2 cos^2 \tfrac{1}{2} x - 1) \} =$$

$$= \frac{cos^{p-6} \frac{1}{2} x}{2 \Delta^{2n+1}} \{ -(p-5) + [(p-4) + (p-2n-4) 4 k^2] cos^2 \tfrac{1}{2} x -$$

$$- (p-3n-3) 8 k^2 cos^4 \tfrac{1}{2} x + (p-4n-2) 4 k^2 cos^6 \tfrac{1}{2} x \} ; \quad \ldots \ldots (a_5)$$

waaruit men afleidt

$$\int\frac{\cos^p \frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(4n-p+2)4k^2}\Big\{-\frac{\sin x\,.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}+(3n-p+3)8k^2\int\frac{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}+$$

$$+[(p-4)+(p-2n-4)4k^2]\int\frac{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-5)\int\frac{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\Big\}\ldots(A_5)$$

Ten laatste heeft men nog

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\tan g^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}}=\frac{\tan g^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^3\frac{1}{2}x\,.\Delta^{2n-1}}\Big\{(p-4)\tfrac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x\,.\tan g\frac{1}{2}x}-\tfrac{1}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}+$$

$$+3\,.\tfrac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}-(2n-1)\tfrac{1}{2}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\Big\}=$$

$$=\frac{\tan g^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\Big\{\Big[(p-4)\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}-1+3tg^2\tfrac{1}{2}x\Big]\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Big(\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}-4k^2\sin^2\tfrac{1}{2}x\Big)+$$

$$+(2n-1)4k^2\Big(2-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Big)\tan g^2\tfrac{1}{2}x\Big\}=$$

$$=\frac{\tan g^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{(p-5)+[(3p-11)-(p-2n-4)4k^2]\tan g^2\tfrac{1}{2}x+$$

$$+[(3p-7)-(p+2n-2)4k^2]\tan g^4\tfrac{1}{2}x+(p-1)\tan g^6\tfrac{1}{2}x\}\,;\ldots\ldots(a_6)$$

en hieruit volgt de herleidingsformule

$$\int\frac{\tan g^p\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{p-1}\Big\{\frac{2\tan g^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}}-[(3p-7)-(p+2n-2)4k^2]\int\frac{\tan g^{p-2}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-$$

$$-[(3p-11)-(p-2n-4)4k^2]\int\frac{\tan g^{p-4}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-5)\int\frac{\tan g^{p-6}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\Big\},\ldots(A_6)$$

die wederom niet meer geldt voor $p=1$.

Nog behoeven wij eene herleidingsformule voor zulke integralen, die alleen de Δ en geen goniometrischen factor bevatten; wij vinden haar volgens onze methode op de volgende wijze.

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\sin x\,.\cos x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin x\,.\cos x}{\Delta^{2n-1}}\Big\{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-(2n-1)\tfrac{1}{2}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\Delta^{2n+1}}\{(\cos^2 x-\sin^2 x)\Delta^2+(2n-1)k^2\sin^2 x\,.\cos^2 x\}=$$

$$=\frac{1}{k^2\Delta^{n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+(n-1)(2-k^2)2\Delta^2-(2n-3)\Delta^4\}\,;\ldots(a_7)$$

derhalve

$$\int\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{\frac{k^2 sinx.cosx}{\Delta^{2n-1}}+(n-1)(2-k^2)2\int\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}-(2n-3)\int\frac{dx}{\Delta^{2n-3}}\right\}..B_7)$$

4. In alle vorige herleidingsformulen zijn de n en p volkomen onbepaald gebleven; men kan ze derhalve ook negatief nemen. Beginnen wij met de n, waardoor de Δ uit den noemer in den teller verschijnt. In alle herleidingsformulen (A) vervange men daartoe n door $-n$: in de overeenkomstige formulen (B) daarentegen, die omgekeerd moeten worden, stelle men $2-n$ voor n in de plaats; op deze wijze zal er komen

$$\int sin^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n-1)k^2}\left\{cosx.sin^{p-3}x.\Delta^{2n+1}+[(p-2)+(p+2n-2)k^2]\int sin^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx-\right.$$
$$\left.-(p-3)\int sin^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots\ldots (A_8)$$

$$=\frac{1}{p+2n-1}\left\{k^2 cosx.sin^{p+1}x.\Delta^{2n-3}+[(4n+p-4)-(p+2n-2)k^2]\int sin^p x.\Delta^{2n-3}dx-\right.$$
$$\left.-(2n-3)(1-k^2)\int sin^p x.\Delta^{2n-5}dx\right\}, \ldots\ldots (B_8)$$

$$\int cos^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n-1)k^2}\left\{sinx.cos^{p-3}x.\Delta^{2n+1}-[(p-2)-(p+n-2)2k^2]\int cos^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx+\right.$$
$$\left.+(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots\ldots (A_9)$$

$$=\frac{1}{p+2n-1}\left\{k^2 sinx.cos^{p+1}x.\Delta^{2n-3}+[(4n+p-4)-(n-1)2k^2]\int cos^p x.\Delta^{2n-3}dx-\right.$$
$$\left.-(2n-3)(1-k^2)\int cos^p x.\Delta^{2n-5}dx\right\}, \ldots\ldots (B_9)$$

$$\int tang^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p-1)(2-k^2)}\left\{\frac{tg^{p-2}x}{sinx.cosx}\Delta^{2n+1}-[(p-2)2-(2n+p-2)k^2]\int tang^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx-\right.$$
$$\left.-(p-3)\int tang^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots\ldots (A_{10})$$

$$\int sin^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(4n+p-2)4k^2}\Big\{-sin x. sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1} + (p+3n-3)8k^2\int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(p-4)+(p+2n-4)4k^2]\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx + (p-5)\int sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, . (A_{11}).$$

$$\int cos^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(4n+p-2)4k^2}\Big\{sin x. cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1} + (3n+p-3)8k^2\int cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(p-4)+(p+2n-4)4k^2]\int cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx + (p-5)\int cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, . . (A_{12}).$$

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{2 tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x. cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta^{2n+1} - [(3p-7)-(p-2n-2)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(3p-11)-(p+2n-4)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, . (A_{13}).$$

$$\int \Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{2n-1}\Big\{k^2 sin x. cos x.\Delta^{2n-3} + (n-1)(2-k^2)2\int\Delta^{2n-3}dx - (2n-3)(1-k^2)\int\Delta^{2n-5}dx\Big\} . . (B_{14}).$$

5. Vervolgens kan ook p negatief genomen worden. Voor ons doel echter zijn de formulen ongeschikt, waar een sinus of een tangens in den noemer voorkomt; wel kan men zulke gebruiken, waar in den noemer een cosinus komt. Derhalve vervange men p door $-p$ in (B_2) en (B_9). Bij de overeenkomstige (A_2) en (A_9), die moeten worden omgekeerd, neme men $4-p$ voor p; en om dezelfde reden stelle men in de herleidingsformulen (A_5) en (A_{12}), $6-p$ voor p in de plaats, omdat die evenzeer moeten worden omgekeerd. Langs dezen weg verkrijgen wij nog

$$\int\frac{dx}{cos^p x.\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{sin\, x}{cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}} + [(p-2)-(p+n-2)2k^2]\int\frac{dx}{cos^{p-2}x.\Delta^{2n+1}} +$$

$$+ (p+2n-3)k^2\int\frac{dx}{cos^{p-4}x.\Delta^{2n+1}}\Big\}, ... (A_{15}).$$

$$= \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\Big\{-\frac{k^2 sin\, x}{cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}} + [(4n+p-4)-(n-1)2k^2]\int\frac{dx}{cos^p x.\Delta^{2n-1}} -$$

$$-(p+2n-3)\int\frac{dx}{cos^p x.\Delta^{2n-3}}\Big\}, ... (B_{15}).$$

$$\int\frac{dx}{\cos^p\frac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}}+[(p-2)+(2n+p-2)4k^2]\int\frac{dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-(3n+p-3)8k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}}+(4n+p-4)4k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}}\right\},\ldots(A_{16})$$

$$\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^p x}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta^{2n+1}+[(p-2)-(p-n-2)2k^2]\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^{p-2}x}+\right.$$

$$\left.+(p-2n-3)k^2\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^{p-4}x}\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A_{17})$$

$$=\frac{1}{2n-p-1}\left\{\frac{k^2\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta^{2n-3}+[(4n-p-4)-(n-1)2k^2]\int\frac{\Delta^{2n-3}dx}{\cos^p x}-\right.$$

$$\left.-(2n-3)(1-k^2)\int\frac{\Delta^{2n-5}dx}{\cos^p x}\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B_{17})$$

$$\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^p\frac{1}{2}x}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^{2n+1}+[(p-2)-(2n-p+2)4k^2]\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}+\right.$$

$$\left.+(3n-p+3)8k^2\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}-(4n-p+4)4k^2\int\frac{\Delta^{2n-1}dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}\right\}\ldots(A_{18})$$

6. Uit deze algemeene herleidingsformulen kan men nu zulke afleiden, waar de Δ slechts tot de eerste macht voorkomt; daarbij zal men dan alleen van de formulen (A), niet van de formulen (B), gebruik kunnen maken. Wil men die eerste macht van Δ in den noemer houden, dan stelle men $n=0$ in de vergelijkingen (A_1) tot (A_6), (A_{15}) en (A_{16}), en verkrijgt alzoo de eenvoudiger uitkomsten

$$\int\sin^p x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\cos x.\sin^{p-3}x.\Delta+(p-2)(1+k^2)\int\sin^{p-2}x\frac{dx}{\Delta}-(p-3)\int\sin^{p-4}x\frac{dx}{\Delta}\right\},\ldots(C_1)$$

$$\int\cos^p x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\sin x.\cos^{p-3}x.\Delta-(p-2)(1-2k^2)\int\cos^{p-2}x\frac{dx}{\Delta}+(p-3)(1-k^2)\int\cos^{p-4}x\frac{dx}{\Delta}\right\},\ldots(C_2)$$

$$\int\tang^p x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{\tang^{p-2}x}{\sin x.\cos x}\Delta-(p-2)(2-k^2)\int\tang^{p-2}\frac{dx}{\Delta}-(p-3)\int\tang^{p-4}x\frac{dx}{\Delta}\right\},\ldots(C_3)$$

$$\int\sin^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-2)4k^2}\left\{-\sin x.\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta+(p-\text{[illegible]}\,{}^{-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\text{[illegible]}}-\right.$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\int\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\text{[illegible]}}$$ [illegible]

$$\int cos^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)\,4\,k^2} \Big\{ sin\,x\,.\,cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x\,.\,\Delta + (p-3)\,8\,k^2 \int cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\int cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-5)\int cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \Big\}, \quad \ldots (C_5)$$

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1} \Big\{ \frac{2\,tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{sin \frac{1}{2} x\,.\,cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta - [(3p-7)-(p-2)\,4\,k^2] \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$-[(3p-11)-(p-4)4k^2]\int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-5).\int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \Big\}, \ldots (C_6)$$

$$\int \frac{dx}{cos^p x.\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{sin\,x}{cos^{p-1} x} \Delta + (p-2)(1-2k^2) \int \frac{dx}{cos^{p-2} x.\Delta} + (p-3)k^2 \int \frac{dx}{cos^{p-4} x.\Delta} \Big\}, \ldots (C_7)$$

$$\int \frac{dx}{cos^p \frac{1}{2} x.\Delta} = \frac{1}{p-1} \Big\{ \frac{sin\,x}{cos^p \frac{1}{2} x} \Delta + (p-2)(1+4k^2) \int \frac{dx}{cos^{p-2} \frac{1}{2} x.\Delta} - (p-3)\,8\,k^2 \int \frac{dx}{cos^{p-4} \frac{1}{2} x.\Delta} +$$

$$+(p-4)\,4\,k^2 \int \frac{dx}{cos^{p-6} \frac{1}{2} x\,.\,\Delta} \Big\} \ldots \ldots \ldots \ldots (C_8)$$

Wil men daarentegen de Δ in den teller brengen, zoo kan men in de herleidingsvergelijkingen (A_8) tot (A_{13}) en in (A_{17}) en (A_{18}) $n=1$ stellen. Dit levert ons de gewenschte uitkomsten

$$\int sin^p x.\Delta dx = \frac{1}{(p+1)k^2} \Big\{ cos\,x.sin^{p-3} x.\Delta^3 + [(p-2)+pk^2] \int sin^{p-2} x.\Delta dx - (p-3) \int sin^{p-4} x.\Delta dx \Big\}, . (D_1)$$

$$\int cos^p x\,.\,\Delta\,dx = \frac{1}{(p+1)\,k^2} \Big\{ sin\,x\,.\,cos^{p-3} x\,.\,\Delta^3 - [(p-2)-(p-1)\,2k^2] \int cos^{p-2} x\,.\,\Delta\,dx +$$

$$+(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4} x\,.\,\Delta\,dx \Big\}, \ldots \ldots \ldots \ldots (D_2)$$

$$\int tang^p x\,.\,\Delta\,dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{tang^{p-2} x}{sin\,x\,.\,cos\,x} \Delta^3 - [(p-2)\,2-pk^2] \int tang^{p-2} x\,.\,\Delta\,dx -$$

$$-(p-3)\int tang^{p-4} x\,.\,\Delta\,dx \Big\}, \ldots \ldots \ldots \ldots (D_3)$$

$$\int sin^p \tfrac{1}{2} x\,.\,\Delta\,dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,k^2} \Big\{ -sin\,x\,.\,sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x\,.\,\Delta^3 + 8\,p\,k^2 \int sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x\,.\,\Delta\,dx -$$

$$-[(p-4)+(p-2)4k^2]\int sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x.\Delta dx + (p-5)\int sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x.\Delta dx \Big\}, \ldots (D_4)$$

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)4k^2}\Big\{ \sin x . \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 + 8pk^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx -$$

$$-[(p-4)+(p-2)4k^2]\int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx + (p-5)\int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}, \ldots (D_5)$$

$$\int \tan g^p \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{p-1}\Big\{ \frac{2\, tg^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)4k^2]\int \tan g^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx -$$

$$-[(3p-11)-(p-2)4k^2]\int \tan g^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx - (p-5)\int \tan g^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}, \ldots (D_6)$$

$$\int \frac{\Delta dx}{\cos^p x} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta^3 + [(p-2)-(p-3)2k^2]\int\frac{\Delta dx}{\cos^{p-2}x} + (p-5)k^2\int\frac{\Delta dx}{\cos^{p-4}x}\Big\}, \ldots (D_7)$$

$$\int \frac{\Delta dx}{\cos^p \tfrac{1}{2}x} = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{\sin x}{\cos^p\tfrac{1}{2}x}\Delta^3 + [(p-2)+(p-4)4k^2]\int\frac{\Delta dx}{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x} - (p-6)8k^2\int\frac{\Delta dx}{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x} +$$

$$+ (p-8)4k^2\int\frac{\Delta dx}{\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x}\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots (D_8)$$

7. Om deze herleidingsformulen met vrucht te kunnen gebruiken, moet men eerst de zoogenaamde eindintegralen kennen. Waar de goniometrische factor onder het integraalteeken eene functie van x was, zien wij, dat wij aan twee zulke eindintegralen genoeg hebben, dat is, alsdan de overige achtereenvolgens kunnen afleiden. Waar er echter goniometrische functiën van $\tfrac{1}{2}x$ voorkomen, zijn er telkens drie zulke eindintegralen noodig, om de verdere te kunnen berekenen. Voorts zij men indachtig, dat deze eindintegralen, en dus ook de algemeene integralen zelve, voor p even tot elliptische voeren, voor p oneven echter niet, zoolang er sprake is van functiën van de geheele x; voor functiën van $\tfrac{1}{2}x$ gaat dit niet evenzeer door. Men vergete hierbij niet, dat overal p telkens met 2 vermindert.

Voor de herleidingsformulen (C) zijn de eindintegralen, als men $F(k,x)$ en $E(k,x)$ eenvoudig door F en E voorstelt,

$$\int\frac{\Delta}{dx} = F, \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma_1)$$

$$\int \sin^2 x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\int\frac{1-\Delta^2}{\Delta}dx = \frac{1}{k^2}(F-E), \ldots\ldots\ldots (\gamma_2)$$

$$\int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2} \int \frac{\Delta^2 - (1-k^2)}{\Delta} dx = \frac{1}{k^2} \{E - (1-k^2) F\} \; ; \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_3)$$

$$\frac{d}{dx} . \tan g\, x . \Delta = \frac{\Delta}{\cos^2 x} + \tan g\, x \frac{-2k^2 \sin x . \cos x}{2\Delta} = \frac{1-k^2 \sin^2 x}{\Delta \cos^2 x} - \frac{k^2 \sin^2 x}{\Delta} = \frac{-k^2 tg^2 x}{\Delta} +$$

$$+ \frac{1 + tg^2 x}{\Delta} - \frac{k^2 \sin^2 x}{\Delta} = \frac{(1-k^2) \tan g^2 x + (1-k^2 \sin^2 x)}{\Delta};$$

dus

$$\int \tan g^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \{-E + \tan g\, x . \Delta\} . \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_4)$$

Stelt men nu in (C_1), (C_2) en (C_3), $p = 4$, substitueert men overal (γ_1), en verder respectieve (γ_2), (γ_3), (γ_4), zoo komt er

$$\int \sin^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^2} \left\{ \sin x . \cos x . \Delta + 2(1+k^2) \int \sin^2 x \frac{dx}{\Delta} - \int \frac{dx}{\Delta} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3k^4} \{(2+k^2) F - (1+k^2) 2E + k^2 \sin x . \cos x . \Delta\} \; , \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_5)$$

$$\int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^2} \left\{ \sin x . \cos x . \Delta - 2(1-2k^2) \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} + (1-k^2) \int \frac{dx}{\Delta} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3k^4} \{(2-3k^2)(1-k^2) F - (1-2k^2) 2E + k^2 \sin x . \cos x . \Delta\} , \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_6)$$

$$\int \tan g^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3(1-k^2)} \left\{ \frac{\tan g^2 x}{\sin x . \cos x} \Delta - 2(2-k^2) \int \tan g^2 x \frac{dx}{\Delta} - \int \frac{dx}{\Delta} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3(1-k^2)^2} \{(2-k^2) 2E - (1-k^2) F + [(1-k^2) \tan g^2 x - (3-k^2)] \tan g x . \Delta\} ; \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_7)$$

$$\int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k \cos x + \Delta} \; , \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_8)$$

$$\int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \; , \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_9)$$

$$\int \tan g\, x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} \; , \quad \ldots \ldots \quad (\gamma_{10})$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \, \Delta} = L \frac{\Delta - \cos x}{\sin x}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{11})$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \, . \, \Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}\sin x + \Delta}{\cos x}, \ldots \ldots \ldots (\gamma_{12})$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang} x \, . \, \Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{13})$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{2} \int \frac{1-\cos x}{\Delta} dx = \frac{1}{2} \left\{ F - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \right\}, \ldots \ldots (\gamma_{14})$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{2} \int \frac{1+\cos x}{\Delta} dx = \frac{1}{2} \left\{ F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \right\}, \ldots \ldots \ldots (\gamma_{15})$$

door middel van (γ_1) en (γ_9);

$$\frac{d}{dx} . 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x . \Delta = \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} x} + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \frac{-2 k^2 \sin x . \cos x}{2 \Delta} = \frac{\Delta^2 - k^2 \sin^2 x . \cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} = \frac{\Delta^2 - (1-\Delta^2) \cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} =$$
$$= \frac{-\cos x + (1+\cos x) \Delta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x - \cos^2 \frac{1}{2} x + 2 \cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta},$$

dus

$$\int \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = F - 2E + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x . \Delta ; \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{16})$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{4} \int \frac{(1-\cos x)^2}{\Delta} dx = \frac{1}{4k^2} \{ E - (1-2k^2) F - 2k \, Bg \sin (k \sin x) \}, \ldots (\gamma_{17})$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{4} \int \frac{(1+\cos x)^2}{\Delta} dx = \frac{1}{4k^2} \{ E - (1-2k^2) F + 2k \, Bg \sin (k \sin x) \}, \ldots (\gamma_{18})$$

naar (γ_1), (γ_9), (γ_3). Stel in (C_6) $p = 4$, dan is, met gebruik van (γ_1), (γ_{16}) en (γ_{22}),

$$\int \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{2\Delta}{\sin \frac{1}{2} x . \cos^3 \frac{1}{2} x} - (5 - 8k^2) \int \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \int \frac{dx}{\Delta} + \int \frac{dx}{tg^2 \frac{1}{2} x . \Delta} \right\} =$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ (1-2k^2) 8E - (5-8k^2) F - \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} [(1-4k^2) + (1-2k^2) 2 \cos x] \Delta \right\}; \ldots \ldots (\gamma_{19})$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\int\frac{1+\cot^2\frac{1}{2}x}{\Delta}dx=2(F-E-\cot\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta),\;\ldots\ldots(\gamma_{20})$$

naar (γ_1) en (γ_{22});

$$\int\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\int\frac{1+\tan^2\frac{1}{2}x}{\Delta}dx=2(F-E+\tan\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta),\;\ldots\ldots(\gamma_{21})$$

naar (γ_1) en (γ_{16});

$$\frac{d}{dx}.\,2\cot\tfrac{1}{2}x.\,\Delta=\frac{-\Delta}{\sin^2\frac{1}{2}x}+2\cot\tfrac{1}{2}x\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{2\,\Delta}=\frac{-\Delta^2-k^2\sin^2x.\cos x}{\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{-\Delta^2-(1-\Delta^2)\cos x}{\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=$$
$$=\frac{-\cos x-(1-\cos x)\,\Delta^2}{\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{-\cos^2\frac{1}{2}x+\sin^2\frac{1}{2}x-2\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta^2}{\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta},$$

dus

$$\int\frac{dx}{\tan^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=F-2E-2\cot\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta;\;\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma_{22})$$

$$\int\tan\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=L\frac{(1+\Delta)(\Delta-\cos x)}{2\sin^2x},\;\ldots\ldots(\gamma_{23})$$

$$\int\frac{dx}{\tan\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\int\frac{1+\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta},\;\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma_{24})$$

waarbij (γ_{11}) en (γ_{13}) worden gebruikt;

$$\frac{d}{dx}.\frac{\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^3\frac{1}{2}x}\Delta+\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{2\,\Delta}=\frac{tg\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Delta-\frac{2k^2\,tg\frac{1}{2}x.\cos x}{\Delta}=$$
$$=\frac{tg\frac{1}{2}x}{\Delta}\{1+tg^2\tfrac{1}{2}x-4k^2\sin^2\tfrac{1}{2}x-2k^2\cos x\}=\frac{tg\frac{1}{2}x}{\Delta}(tg^2\tfrac{1}{2}x+1-2k^2),$$

dus volgens (γ_{23})

$$\int\tan^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Delta-1-(1-2k^2)L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2x};\;\ldots\ldots(\gamma_{25})$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2x\,.\,\Delta}=\int\frac{1+tg^2x}{\Delta}dx=\frac{1}{1-k^2}\{(1-k^2)F-E+\tan x\,.\,\Delta\},\;\ldots(\gamma_{26})$$

naar (γ_1) en (γ_4). Stel nu in (C_7) en (C_8) $p=4$, substitueer overal (γ_1) en verder respective (γ_{26}) en (γ_{21}), zoo komt er

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x\,.\,\Delta}=\frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta+2(1-2k^2)\int\frac{dx}{\cos^2 x\,.\,\Delta}+k^2\int\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3(1-k^2)^2}\left\{(2-3k^2)(1-k^2)F-(1-2k^2)2E+[(1-k^2)+(1-2k^2)2\cos^2 x]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\right\},\,.(\gamma_{27})$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\sin x}{\cos^4\tfrac{1}{2}x}\Delta+2(1+4k^2)\int\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta}-8k^2\int\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(1+2k^2)4F-(1+4k^2)4E+\frac{2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}x}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}[2(1+2k^2)+(1+4k^2)\cos x]\Delta\right\}..(\gamma_{28})$$

Voor de integralen, die oneven machten van $\sin\frac{1}{2}x$ bevatten, heeft men de volgende substitutie noodig, als men de nieuwe standvastigen

$$l=\sqrt{\frac{1+k}{2}},\qquad r=\frac{1}{8k}(1+2k)^2\;\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha_1)$$

invoert.

$$\cos\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}=\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}y,\qquad \Delta(k,x)=\frac{\Delta(l,y)}{\cos^2\tfrac{1}{2}y},\qquad \sin\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{-dy}{\cos^2\tfrac{1}{2}y.\sqrt{2k}},$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}x=\frac{2k-\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}y}{k},\qquad \cos^2\tfrac{1}{2}y=\frac{1}{1+2k\cos^2\tfrac{1}{2}x}=\frac{1}{1+k+k\cos x};\;\ldots(\alpha_2)$$

dus

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dy}{\Delta(l,y)}=\frac{-1}{\sqrt{2k}}F(l,y),\;\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma_{29})$$

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{2k-tg^2\tfrac{1}{2}y}{\Delta(l,y)}dy=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\{-2kF(l,y)+F(l,y)-2E(l,y)+2tg\tfrac{1}{2}y.\Delta(l,y)\}$$

$$[\text{naar }(\gamma_{16})]=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{(1-2k)F(l,y)-2E(l,y)+\frac{2\cos\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\},\;\ldots(\gamma_{30})$$

$$\int\frac{dx}{\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{2k}{-\sqrt{2k}}\int\frac{1}{2k-\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}y}\frac{dy}{\Delta(l,y)}=-\sqrt{2k}\int\frac{1+\cos y}{(2k-1)+(2k+1)\cos y}\frac{dy}{\Delta(l,y)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{2k+1}\int\left\{1+\frac{2}{(2k-1)+(2k+1)\cos y}\right\}\frac{dy}{\Delta(l,y)}=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}F(l,y)+\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\int\frac{(2k-1)-(2k+1)\cos y}{8k-(2k+1)^2\sin^2 y}\frac{dy}{\Delta(l,y)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{-F(l,y)-\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)-\frac{2(1+2k)}{8k-(2k+1)^2\sin^2 y}\frac{d.\sin y}{\Delta(l,y)}\right\}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-L\frac{\sin y+2\sqrt{2k}\,\Delta(l,y)}{2\sqrt{2k}(1-r\sin^2 y)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-L\frac{(\Delta+\cos\tfrac{1}{2}x)}{\sqrt{1+(1-r)4k\cos^2\tfrac{1}{2}x+4k^2\cos^4\tfrac{1}{2}x}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-\tfrac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{\sqrt{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}}..(\gamma_{31})$$

Voor de integralen, die oneven machten van $\cos\frac{1}{2}x$ bevatten, heeft men, bij dezelfde waarden van l en r,

$$\sin\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}=\tan g\tfrac{1}{2}z,\qquad \Delta(k,x)=\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac{1}{2}z},\qquad \cos\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{dz}{\cos^2\frac{1}{2}z.\sqrt{2k}},$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}x=\frac{2k-\tan g^2\frac{1}{2}z}{k},\qquad \cos^2\tfrac{1}{2}z=\frac{1}{1+2k\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{1+k-k\cos x};\,..\,(\alpha_3)$$

derhalve

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\Delta(l,z)}=\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z),\,.........\,(\gamma_{32})$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{2k-tg^2\frac{1}{2}z}{\Delta(l,z)}dz=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{2E(l,z)-(1-2k)F(l,z)-\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\};.(\gamma_{33})$$

even als bij (γ_{30}); en evenzeer, naar dezelfde herleiding als bij (γ_{31}),

$$\int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x.\Delta}=\frac{2k}{\sqrt{2k}}\int\frac{1}{2k-tg^2\frac{1}{2}z}\frac{dz}{\Delta(l,z)}=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\right\}+$$

$$+\tfrac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{\sqrt{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}}.\,.................\,(\gamma_{34})$$

Eenige dezer formulen, die in N°. 6 en 7 voorkomen, kan men vinden in de boven aangehaalde verhandeling van VERDAM; daarvan moesten er echter enkele verbeterd worden.

8. Hetzelfde, wat in de vorige paragrafen voor de herleidingsformulen (C) gedaan is, en waarvan men later een nuttig gebruik zal maken, kan men nu, met eene verwachting op even goeden uitslag, voor het andere stel herleidingsformulen (D) bewerkstelligen. Om die te kunnen gebruiken, is het evenzeer hier noodig, de eindintegralen te kennen; haar aantal is twee, waar het goniometrische functiën der geheele x geldt, en daarentegen drie, zoodra er zulke functiën van $\frac{1}{2}x$ voorkomen. Overigens vermindert in onze formulen (D) de exponent p overal telkens met 2; zoodat ook hier weder de gevallen van evene en onevene p gescheiden voorkomen. Bij goniometrische functiën van de geheele x komen daarbij dan ook elliptische integralen voor, als p even is, terwijl dit niet plaats heeft, zoodra p oneven is.

Hier vindt men nu als eindintegralen

$$\int \Delta\, dx = E\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\delta_1)$$

$$\int sin^2x.\Delta dx = \int \frac{sin^2x - k^2 sin^4x}{\Delta} dx = \frac{1}{3k^2}\{(1-k^2)F - (1-2k^2)E - k^2 sin\,x.cos\,x.\Delta\}\,, \ldots \qquad (\delta_2)$$

naar (γ_1) en (γ_5); en evenzoo naar (γ_2) en (γ_6)

$$\int cos^2x.\Delta dx = \int \frac{(1-k^2)cos^2x + k^2 cos^4x}{\Delta} dx = \frac{1}{3k^2}\{(1+k^2)E - (1-k^2)F + k^2 sin\,x.cos\,x.\Delta\}\,, \ldots \qquad (\delta_3)$$

waarvan de som wederom (δ_1) oplevert. Nog door (γ_4) en (γ_2)

$$\int tang^2 x.\Delta\, dx = \int \frac{(1-k^2)\,tg^2 x + k^2 sin^2 x}{\Delta} dx = F - 2E + tang\,x.\Delta. \ldots\ldots \qquad (\delta_4)$$

Stel nu in (D_1), (D_2), (D_3), $p = 4$, en gebruik (δ_1) en verder respectieve (δ_2), (δ_3), (δ_4), dan wordt

$$\int sin^4x.\Delta dx = \frac{1}{5k^2}\left\{sin\,x.cos\,x.\Delta^3 + (2+4k^2)\int sin^2x.\Delta dx - \int \Delta dx\right\} = \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1+2k^2)2F -$$
$$-(2+3k^2-8k^4)E - [2(1+2k^2) - 3\Delta^2]k^2 sin\,x.cos\,x.\Delta\}\,, \ldots\ldots \qquad (\delta_5)$$

$$\int cos^4 x.\Delta\, dx = \frac{1}{5k^2}\left\{sin\,x.cos\,x.\Delta^3 - (2-6k^2)\int cos^2 x.\Delta\, dx + (1-k^2)\int \Delta\, dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1-3k^2)2F - (2-7k^2-3k^4)E - [2(1-3k^2) - 3\Delta^2]k^2 sin\,x.cos\,x.\Delta\}\,, . \qquad (\delta_6)$$

$$\int tang^4 x.\Delta\, dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{tang^2 x}{sin\,x.cos\,x}\Delta^3 - (4-4k^2)\int tang^2 x.\Delta\, dx - \int \Delta\, dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{(7-8k^2)E - (1-k^2)4F - [4(1-k^2) + 4cos^2 x - 5\Delta^2]\frac{sin\,x}{cos^3 x}\Delta\right\}; \ldots \qquad (\delta_7)$$

$$\frac{d}{dx}.\frac{1}{2}cos\,x.\Delta = -\frac{1}{2}sin\,x.\Delta + \frac{1}{2}cos\,x\frac{-2k^2 sin\,x.cos\,x}{2\Delta} = \frac{sin\,x}{2\Delta}\left\{-\Delta^2 - k^2 cos^2 x\right\} =$$
$$= \frac{sin\,x}{2\Delta}(-2\Delta^2 + 1 - k^2) = -sin\,x.\Delta + \frac{1}{2}(1-k^2)\frac{sin\,x}{\Delta}\,,$$

B 3

dus met behulp van (γ_8)

$$\int \sin x \, . \, \Delta \, dx = \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L \frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \, . \, \Delta \; ; \quad \ldots\ldots \quad (\delta_8)$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{2}\sin x \, . \, \Delta = \frac{1}{2}\cos x \, . \, \Delta + \frac{1}{2}\sin x \frac{-2k^2 \sin x \, . \cos x}{2\Delta} = \frac{\cos x}{2\Delta}\left\{\Delta^2 - k^2 \sin^2 x\right\} =$$

$$= \frac{\cos x}{2\Delta}(2\Delta^2 - 1) = \cos x \, . \, \Delta - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\Delta},$$

dus komt er met behulp van (γ_9)

$$\int \cos x \, . \, \Delta \, dx = \frac{1}{2k} Bg\sin(k \sin x) + \frac{1}{2}\sin x \, . \, \Delta \; ; \quad \ldots\ldots \quad (\delta_9)$$

$$\int tang\, x \, . \, \Delta \, dx = \int tang\, x \frac{1-k^2\sin^2 x}{\Delta} dx = \int \left\{(1-k^2)\frac{tang x}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\} dx =$$

$$= \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + 1 - \Delta, \quad \ldots\ldots \quad (\delta_{10})$$

na gebruik van (γ_{10});

$$\int \frac{dx}{\sin x}.\Delta = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = \int \left(\frac{1}{\sin x} - k^2 \sin x\right)\frac{dx}{\Delta} = L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}, \quad \ldots \quad (\delta_{11})$$

volgens (γ_{11}) en (γ_8); evenzeer volgens (γ_9) en (γ_{12})

$$\int \frac{dx}{\cos x} \, . \, \Delta = \int \frac{1-k^2+k^2\cos^2 x}{\cos x}\frac{dx}{\Delta} = \int \left(\frac{1-k^2}{\cos x} + k^2 \cos x\right)\frac{dx}{\Delta} = k\, Bg\sin(k \sin x) +$$

$$+ \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x} \; ; \quad \ldots\ldots \quad (\delta_{12})$$

$$\int \frac{dx}{tang x}.\Delta = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{tang\, x}\frac{dx}{\Delta} = \int \left\{\frac{1}{tang x} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2\sin x}{1+\Delta} - 1 + \Delta, \ldots \quad (\delta_{13})$$

naar (γ_{13});

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \tfrac{1}{2}\int (1-\cos x)\, \Delta dx = \frac{1}{4}\left\{2E - \frac{1}{k} Bg\sin(k \sin x) - \sin x . \Delta\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (\delta_{14})$$

$$\int cos^2 \tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx = \tfrac{1}{2}\int (1+cos\,x)\,\Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{2E + \frac{1}{k} Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + sin\,x.\Delta\right), \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta_{15})$$

waarbij van (δ_1) en (δ_9) is gebruik gemaakt;

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \int tang^2 \tfrac{1}{2} x \frac{1-k^2 sin^2 x}{\Delta} dx = \int\left(\frac{tg^2 \frac{1}{2} x}{\Delta} - 4k^2 \frac{sin^4 \frac{1}{2}x}{\Delta}\right) dx = 2(1-k^2)F - 3E +$$
$$+ 2\,k Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta_{16})$$

met behulp van (γ_{16}) en (γ_{17}). Verder is, wanneer men (δ_1), (δ_9), (δ_3) gebruikt,

$$\int sin^4 \tfrac{1}{2}\,x\,.\,\Delta\,dx = \tfrac{1}{4}\int (1 - cos\,x)^2 \Delta\, dx = \frac{1}{12\,k^2}\Big\{(1 + 4\,k^2)\,E - (1 - k^2)\,F -$$
$$- 3k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - (3 - cos\,x)k^2\,sin\,x\,.\,\Delta\Big\}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta_{17})$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2}\,x\,.\,\Delta\,dx = \tfrac{1}{4}\int (1 + cos\,x)^2 \Delta\, dx = \frac{1}{12\,k^2}\Big\{(1 + 4\,k^2)\,E - (1 - k^2)\,F +$$
$$+ 3\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + (3 + cos\,x)\,k^2\,sin\,x\,.\,\Delta\Big\}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta_{18})$$

Men stelle in (D_6) $p = 4$, en gebruike daarbij (δ_1), (δ_{16}), (δ_{22}), dan komt er

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \frac{1}{3}\left\{\frac{2}{sin\,\frac{1}{2}x.cos^3\frac{1}{2}x}\Delta^3 - 5\int tang^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx - (1-8k^2)\int \Delta dx + \int \frac{dx}{tang^2\frac{1}{2}x}\Delta\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(11+8k^2)E - (1-k^2)8F - 12kBg\,sin(k\,sin\,x) - [(1+2k^2)+(1+k^2)2cos\,x]\frac{sin\,x}{cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\}; \; . \; . \quad (\delta_{19})$$

$$\int \frac{dx}{sin^2\frac{1}{2}x}\Delta = \int (1+cot^2\tfrac{1}{2}x)\,\Delta\,dx = 2\,(1-k^2)\,F - 2\,E - 2\,k\,Bg\,sin(k\,sin\,x) - 2\,cot\,\tfrac{1}{2}\,x.\Delta\,, \; . \; . \quad (\delta_{20})$$

naar (δ_1) en (δ_{22});

$$\int \frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}\Delta = \int (1+tang^2\tfrac{1}{2}x)\Delta\,dx = 2(1-k^2)F - 2E + 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta, \; . \; . \quad (\delta_{21})$$

naar (δ_1) en (δ_{16});

$$\int \frac{dx}{tang^2\frac{1}{2}\,x}\,\Delta = \int \frac{1-k^2 sin^2 x}{tang^2\frac{1}{2}\,x}\,\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1}{tg^2\frac{1}{2}\,x} - 4\,k^2\,cos^4\,\tfrac{1}{2}\,x\right)\frac{dx}{\Delta} =$$
$$= 2\,(1-k^2)\,F - 3\,E - 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - 2\,cot\,\tfrac{1}{2}\,x\,.\,\Delta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta_{22})$$

naar (γ_{22}) en (γ_{18});

$$\int tang\,\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin x}\Delta\,dx = k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + 1 - \Delta, \ldots (\delta_{23})$$

naar (δ_{11}) en (δ_{18}); evenzeer door dezelfde integralen

$$\int \frac{dx}{tang\,\frac{1}{2}x}\Delta = \int \frac{1+\cos x}{\sin x}\Delta\,dx = k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta} + \Delta - 1; \ldots\ldots (\delta_{24})$$

$$\int tang^3\,\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx = \int tang^3\,\tfrac{1}{2}x\,\frac{1-4k^2\sin^2\frac{1}{2}x\,.\,\cos^2\frac{1}{2}x}{\Delta}\,dx = \int \left\{ tg^3\,\tfrac{1}{2}x - k^2\frac{(1-\cos x)^3}{\sin x}\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int \left\{ tg^3\,\tfrac{1}{2}x - k^2\frac{4-4\cos x - 3\sin^2 x + \sin^2 x\,.\,\cos x}{\sin x}\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int \left\{ tang^3\,\tfrac{1}{2}x - \frac{4k^2}{\sin x} + \frac{4k^2}{tang\,x} + 3k^2\sin x + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= -3k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - (1+2k^2)\,L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + (1+\cos^2\tfrac{1}{2}x)\frac{\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}x} - 2, \ldots (\delta_{25})$$

waarbij gebruik gemaakt werd van (γ_{25}), (γ_{11}), (γ_{13}), (γ_8);

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}\Delta = \int (1+tg^2 x)\,\Delta\,dx = F - E + tang\,x\,.\,\Delta\,, \ldots\ldots\ldots (\delta_{26})$$

naar (δ_1) en (δ_3).

Stel in (D_7) $p=4$, en in (D_8) $p=4$ en $p=6$, dan is, na invoering van (δ_1) overal, en verder van (δ_{26}), van (δ_{15}) en (δ_{21}), van (δ_{28}),

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}\Delta = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta^3 + (2-2k^2)\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Delta - k^2\int\Delta\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{(1-k^2)\,2F - (2-k^2)\,E + [(3-2k^2)-(2-k^2)\sin^2 x]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\right\}, \ldots (\delta_{27})$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta = \frac{1}{3}\left\{\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta^3 + 2\int\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Delta + 16k^2\int\Delta\,dx - 16k^2\int\cos^2\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(1-k^2)\,4F - (1-2k^2)\,4E + [2(1-k^2)+(1-2k^2)\cos x]\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\}, \ldots (\delta_{28})$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta = \frac{1}{5} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta^3 + (4 + 8 k^2) \int \frac{dx}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta - 8 k^2 \int \Delta\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{15} \Big\{ (1 + 2 k^2)(1 - k^2) 16 F - (2 + 3 k^2 - 8 k^4) 8 E +$$

$$+ [4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2) 2 \cos x + 2 \cos^2 x + (3-8k^2)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}, \ldots (\delta_{29})$$

welke laatste integraal hier zoo straks noodig zal zijn bij de behandeling der integralen (δ_{31}) en (δ_{34}).

Gaat men toch over tot de integralen met oneven machten van $\sin \frac{1}{2} x$, dan heeft men ook hier weder de oude substitutie (α_2) noodig; zijn deze ingevoerd, dan moet men bij de beide eerste formulen de integralen (δ_{28}) en (δ_{29}) gebruiken, voor y in plaats van x; en alzoo verkrijgt men

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{-1}{\sqrt{2k}} \int \frac{dy}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \frac{\Delta(l,y)}{\cos^2 \frac{1}{2} y} = \frac{-1}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-l^2) 4 F(l,y) - (1 - 2 l^2) 4 E(l,y) +$$

$$+ [2(1-l^2) + (1-2l^2) \cos y] \frac{\sin y}{\cos^4 \frac{1}{2} y} \Delta(l,y) \Big\} = \frac{-1}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) 2 F(l,y) + 4 k E(l,y) +$$

$$+ [(1-k) - k \cos y] 2 \tan \tfrac{1}{2} y . \Delta \Big\} = \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) F(l,y) + 2k E(l,y) + \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} [1 - 2k \cos^2 \tfrac{1}{2} y] \Big\} =$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) F(l,y) + 2 k E(l,y) + \frac{1 - k + k \cos x}{1 + k + k \cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots . (\delta_{30})$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{-1}{2k\sqrt{2k}} \int \frac{dy}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \frac{\Delta(l,y)}{\cos^2 \frac{1}{2} y} (2k - \tan^2 \tfrac{1}{2} y) = \frac{-1}{2k\sqrt{2k}} \int \left(\frac{2k+1}{\cos^4 \frac{1}{2} y} - \frac{1}{\cos^6 \frac{1}{2} y} \right) \Delta(l,y) dy =$$

$$= \frac{1}{30 k \sqrt{2k}} \Big\{ -(2k+1)(1-k) 10 F(l,y) - (2k+1) 20 k E(l,y) -$$

$$-10(2k+1) \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} (1 - 2k \cos^2 \tfrac{1}{2} y) + (2+k)(1-k) 8 F(l,y) - (3 - 5k - 4k^2) 4 E(l,y) +$$

$$+ [2(1-k)(3+2k) + (2+k)(1-2k) 2 \cos y + 2 \cos^2 y - (1+4k) \Delta^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} y] \frac{\sin y}{\cos^4 \frac{1}{2} y} \Delta \Big\} =$$

$$= \frac{1}{30k\sqrt{2k}} \{ (6-12k)(1-k) F(l,y) - (3+6k^2) 4 E(l,y) + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big[-5(2k+1)(1 - 2k \cos^2 \tfrac{1}{2} y) +$$

$$+ \{ 2 (2 \cos^2 \tfrac{1}{2} y)^2 - (3 + 2k) 2k (2 \cos^2 \tfrac{1}{2} y) + 4(1+k) - (1 + 4k) \Delta^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} y \} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \Big] \Big\} =$$

$$= \frac{1}{30k\sqrt{2k}} \Big\{ (1-2k)(1-k) 6 F(l,y) - (1+2k^2) 12 E(l,y) + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big[-(5 + 22k + 8k^2) +$$

$$+ (4 + 5k + 10k^2)\, 2\cos^2 \tfrac{1}{2} y + 4 \frac{1+k}{\cos^2 \frac{1}{2} y} - (1 + 4k)\, \Delta^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} y \Big]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{15k\sqrt{2k}} \Big\{ (1-2k)(1-k)3F(l,y) - (1+2k^2)6E(l,y) - \cos\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big[(1+14k+4k^2) -$$

$$- 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\Big\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta_{31})$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}\Delta = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{\sin\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} - 4k^2\sin\tfrac{1}{2}x . \cos^2\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x . \Delta} - 4k^2 \int \frac{\tang^2\frac{1}{2}y}{2k}\, \frac{-dy}{\cos^2\frac{1}{2}y . \sqrt{2k}}\, \frac{\cos^2\frac{1}{2}y}{\Delta(l,y)} = \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x . \Delta} + \sqrt{2k}\int \tang^2\tfrac{1}{2}y \frac{dy}{\Delta(l,y)},$$

dus naar (γ_{31}) en (γ_{16})

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}\Delta = \frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,y) + \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2} +$$

$$+ \sqrt{2k}\{F(l,y) - 2E(l,y) + 2\tang\tfrac{1}{2}y . \Delta(l,y)\} = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{2kF(l,y) - (1+2k)2E(l,y) -$$

$$- \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2} + \frac{4k\cos\frac{1}{2}x . \Delta}{1+k+k\cos x} \ldots (\delta_{32})$$

Even zoo moet men bij de integralen met oneven machten van $\cos\frac{1}{2}x$ de vroegere substitutie (α_2) ook hier invoeren; men verkrijgt dan integralen in z, en daarbij zijn dan dezelfde integralen, als boven, te gebruiken.

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\cos^2\frac{1}{2}z}\,\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac{1}{2}z} = \frac{2}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) +$$

$$+ \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta_{33})$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\cos^2\frac{1}{2}z}\,\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac{1}{2}z}(2k - \tang^2\tfrac{1}{2}z) = \frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(1+2k^2)6E(l,z) - (1-2k)(1-k)3F(l,z) -$$

$$+ \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\Big\}, \ldots (\delta_{34})$$

$$\int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\Delta = \int\frac{1-k^2\sin^2 x}{\cos\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}x} - 4k^2\sin^2\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x . \Delta} - 4k^2\int\frac{\tang^2\frac{1}{2}z}{2k}\,\frac{dz}{\cos^2\frac{1}{2}z . \sqrt{2k}}\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}z}{\Delta(l,z)} = \int\frac{dz}{\cos\frac{1}{2}x . \Delta} - \sqrt{2k}\int\tang^2\tfrac{1}{2}z\frac{dz}{\Delta(l,z)} =$$

$$=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{(1+2k)2E(l,z)-2kF(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\right\}+\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}-$$
$$-\frac{4k\sin\frac{1}{2}x.\Delta}{1+k-k\cos x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta_{35})$$

9. Naast het stel algemeene herleidingsformulen, dat in § 2—5 is afgeleid, heeft men later nog een ander stel noodig, dat eenvoudiger is. Men komt daartoe langs denzelfden weg, dat is, in plaats van bij gedeelten te integreeren, door het differentieeren van een geschikten vorm, dien men telkens met zorg moet uitkiezen. Alzoo is vooreerst

$$\frac{d}{dx}.\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p-1)\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$
$$=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-1)\Delta^2+(2n-1)k^2\sin^2 x\}=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-1)-(p-2n)k^2\sin^2 x\},\ .\ (a_{19})$$
$$=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(2n-1)+(p-2n)\Delta^2\};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b_{19})$$

en hieruit leidt men af, wanneer men in (b_{19}) eerst p door $p+2$ vervangt,

$$\int\sin^p x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n)k^2}\left\{-\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}+(p-1)\int\sin^{p-2}x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ldots (A_{19})$$
$$=\frac{1}{2n-1}\left\{\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-2n+2)\int\sin^p x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}\right\}.\ \ldots\ldots\ldots (B_{19})$$

Evenzoo vindt men door differentiatie

$$\frac{d}{dx}.\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p-1)\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$
$$=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-1)\Delta^2+(2n-1)k^2\cos^2 x\}=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-1)(1-k^2)-(p-2n)k^2\cos^2 x\},..(a_{20})$$
$$=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)-(p-2n)\Delta^2\};\ \ldots\ldots\ldots (b_{20})$$

waaruit volgt, mits men eerst $p+2$ voor p stelle in (b_{20}),

$$\int\sin x.\cos^p x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n)k^2}\left\{1-\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-1)(1-k^2)\int\sin x.\cos^{p-2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},..(A_{20})$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{1-\frac{\cos^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-2n+2)\int \sin x\,.\cos^p x\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}\right\}. \quad . \quad (B_{20})$$

Door differentiatie volgt verder

$$\frac{d}{dx}.\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p+1)\frac{1}{\cos^2 x\,.\,tang\,x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{(p+1)\frac{1+tang^2 x}{tang\,x}(1-k^2\sin^2 x)+(2n-1)k^2\sin x\,.\cos x\right\}=$$

$$=\frac{tang^p x.\cos^2 x}{\Delta^{2n+1}}\{(p+1)(1+tang^2 x)(1+tang^2 x-k^2 tang^2 x)+(2n-1)k^2 tang^2 x\}=$$

$$=\frac{tang^p x.\cos^2 x}{\Delta^{2n+1}}\{(p+1)+[2(p+1)-(p-2n+2)k^2]tang^2 x+(p+1)(1-k^2)tang^4 x\}\;,..\;(a_{21})$$

$$=\frac{tang^{p+1}}{\Delta^{2n+1}\sin x\,.\cos x}\{(p+1)\Delta^2+(2n-1)k^2\sin^2 x\,.\cos^2 x\}=$$

$$=\frac{tang^p\,x}{k^2\cos^2 x\,.\,\Delta^{2n+1}}\{(p+1)k^2\Delta^2+(2n-1)(1-\Delta^2)(\Delta^2-1+k^2)\}=$$

$$=\frac{tang^p x}{k^2\cos^2 x.\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[2(2n-1)+(p-2n+2)k^2]\Delta^2-(2n-1)\Delta^4\}\;;..\;(b_{21})$$

waarvan de eerste (a_{21}) eene herleidingsformule oplevert naar de machten van *tang x*, de tweede (b_{21}) eene andere naar de machten van Δ; maar hier zijn, in tegenstelling met hetgeen overal elders verkregen werd, de herleide integralen telkens van verschillende gedaante, in zooverre als de eerstbedoelde integralen den factor $\cos^2 x$ overal in den teller bezitten, terwijl dezelfde factor $\cos^2 x$ bij de tweede soort van integralen juist in den noemer voorkomt. Men heeft dus hier afzonderlijk, wanneer bij de eerste (a_{21}) eerst p door $p-4$ wordt vervangen, door integratie

$$\int tang^p x.\cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}-[2(p-3)-(p-2n-2)k^2]\int tang^{p-2}x.\cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-(p-3)\int tang^{p-4}x\,.\cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\;.\;(A_{21})$$

met de overeenkomstige, waarbij p in $p+2$ en $p+1$ werd veranderd,

$$\int tang^p x.\sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}-[2(p-1)-(p-2n)k^2]\int tang^{p-2}x.\sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-(p-1)\int tang^{p-4}x\,.\sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\;.\;(A'_{21})$$

$$\int tang^p x\,.\,sin\,x\,.\,cos\,x\,\frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-2)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-2} x}{\Delta^{2n-1}} -\right.$$

$$\left.-[2(p-2)-(p-2n-1)k^2]\int tang^{p-2}x.sinx.cosx\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-2)\int tang^{p-4}x.sinx.cosx\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\}, .(A''_{21})$$

benevens

$$\int\frac{tang^p x}{cos^2 x.\Delta^{2n+1}}dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-k^2\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}+[2(2n-1)+(p-2n+2)k^2]\int\frac{tang^p x}{cos^2 x.\Delta^{2n-1}}dx -\right.$$

$$\left.-(2n-1)\int\frac{tang^p x}{cos^2 x\,.\,\Delta^{2n-3}}dx\right\}, \dots \dots \dots (B_{21})$$

en hier, op dezelfde wijze als boven, voor $p-2$ en $p-1$ in de plaats van p,

$$\int\frac{tang^p x}{sin^2 x.\Delta^{2n+1}}dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-k^2\frac{tang^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}+[2(2n-1)+(p-2n)k^2]\int\frac{tang^p x}{sin^2 x.\Delta^{2n-1}}dx -\right.$$

$$\left.-(2n-1)\int\frac{tang^p x}{sin^2 x\,.\,\Delta^{2n-3}}dx\right\}, \dots \dots \dots (B'_{21})$$

$$\int\frac{tang^p x}{sinx.cosx.\Delta^{2n+1}}dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-k^2\frac{tang^p x}{\Delta^{2n-1}}+[2(2n-1)+(p-2n+1)k^2]\int\frac{tang^p x}{sinx.cosx.\Delta^{2n-1}}dx -\right.$$

$$\left.-(2n-1)\int\frac{tang^p x}{sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta^{2n-3}}dx\right\}. \dots \dots \dots (B''_{21})$$

10. Gaat men over tot den boog $\frac{1}{2}x$, dan vervallen ook hier, even als in § 3, alle formulen (b), en mitsdien ook alle de daaruit afgeleide herleidingsformulen (B). Men moet dus alleen trachten de formulen (a) af te leiden, en daaruit dan verder de herleidingsformulen (A), die dan trouwens bij dit onderzoek van het grootste gewicht zijn.

Volgens dezelfde methode, als ook vroeger, komt men dan hier tot het volgende.

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{sin^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{sin^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{p-3}{2}\frac{cos\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x} - \frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\,sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4}\frac{1}{2}x\,.\,cos\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\left\{(p-3)\Delta^2 + (2n-1)\,4\,k^2 sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\,x\right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4}\frac{1}{2}x.cos\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\left\{(p-3)(1-4k^2 sin^2\tfrac{1}{2}x+4k^2 sin^4\tfrac{1}{2}x)+(2n-1)4\,k^2 sin^2\tfrac{1}{2}x.(1-2sin^2\tfrac{1}{2}x)\right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4}\frac{1}{2}x.cos\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\left\{(p-3)-(p-2n-2)\,4\,k^2 sin^2\tfrac{1}{2}x + (p-4n-1)\,4\,k^2 sin^4\tfrac{1}{2}x\right\}, \dots (a_{22})$$

B 4

waaruit men, na integratie, afleidt

$$\int sin^p \tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-4n-1)4k^2}\left\{\frac{2 sin^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} + (p-2n-2)4k^2 \int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. -(p-3)\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\} \dots \dots \dots \dots (A_{22})$$

Vervolgens verkrijgt men ook evenzoo

$$\frac{d}{dx} . \frac{cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{p-3}{2}\,\frac{-sin\frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x} - \frac{2n-1}{2}\,\frac{-2k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{sin\frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{-(p-3)\Delta^2 + (2n-1)4k^2 cos^2\tfrac{1}{2}x . cos\, x\} =$$

$$= \frac{sin\frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{-(p-3)(1-4k^2cos^2\tfrac{1}{2}x+4k^2cos^4\tfrac{1}{2}x)+(2n-1)4k^2cos^2\tfrac{1}{2}x . (2cos^2\tfrac{1}{2}x-1)\} =$$

$$= \frac{sin\frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{-(p-3)+(p-2n-2)4k^2cos^2\tfrac{1}{2}x-(p-4n-1)4k^2cos^4\tfrac{1}{2}x\}, \dots (a_{23})$$

zoodat, na integratie, hieruit volgt

$$\int sin\tfrac{1}{2}x . cos^p\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-4n-1)4k^2}\left\{2 - \frac{2cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} + (p-2n-2)4k^2\int sin\tfrac{1}{2}x . cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. -(p-3)\int sin\tfrac{1}{2}x . cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\} \dots \dots \dots \dots (A_{23})$$

Ten slotte heeft men nog

$$\frac{d}{dx} . \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{p-5}{2}\,\frac{1}{cos^2\frac{1}{2}x . tang\frac{1}{2}x} - \frac{2n-1}{2}\,\frac{-2k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{sin\, x . \Delta^{2n+1}}\{(p-5)\Delta^2 + (2n-1)(1-\Delta^2)cos\, x\} =$$

$$= \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x . cos^4\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{(p-5)\frac{1+tang^2\frac{1}{2}x}{2\,tang\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{cos^4\frac{1}{2}x}-4k^2tang^2\tfrac{1}{2}x\right)+(2n-1)2k^2tang\tfrac{1}{2}x . \left(2-\frac{1}{cos^2\frac{1}{2}x}\right)\right\} =$$

$$= \frac{tang^{p-6}\frac{1}{2}x . cos^4\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{(p-5) + [3(p-5)-(p-2n-4)4k^2]tang^2\tfrac{1}{2}x +$$

$$+ [3(p-5)-(p+2n-6)4k^2]tang^4\tfrac{1}{2}x + (p-5)tang^6\tfrac{1}{2}x\}, \dots \dots (a_{24})$$

waaruit men door integratie afleidt

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{p-5}\left\{\frac{2\,tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} - [3(p-5)-(p+2n-6)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. -[3(p-5)-(p-2n-4)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\} \ldots (A_{24})$$

11. In deze herleidingsformulen kan men nu n negatief nemen, even als dit in § 4 geschiedde, zoodat daardoor de Δ in den teller komt. Bij de formulen (A) heeft dit volstrekt geen bezwaar; daarbij stelle men eenvoudig $n = -n$; maar in dit geval moeten de formulen (B) worden omgekeerd: bij de twee eerste (B_{19}) en (B_{20}) stelle men dan eerst $n = 1 - n$, bij de laatste (B_{21}) moet men $2 - n$ in de plaats van n stellen. Alzoo verkrijgt men dan

$$\int \sin^p x.\cos x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(p+2n)k^2}\left\{-\sin^{p-1}x.\Delta^{2n+1} + (p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{25})$$

$$= \frac{1}{p+2n}\left\{\sin^{p+1}x.\Delta^{2n-1} + (2n-1)\int \sin^p x.\cos x.\Delta^{2n-3}dx\right\}, \ldots (B_{25})$$

$$\int \sin x.\cos^p x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(p+2n)k^2}\left\{1 - \cos^{p-1}x.\Delta^{2n+1} - (p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{26})$$

$$= \frac{1}{p+2n}\left\{1 - \cos^{p+1}x.\Delta^{2n-1} + (2n-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^p x.\Delta^{2n-3}dx\right\}, \ldots\ldots (B_{26})$$

$$\int tang^p x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{tang^{p-3}x.\Delta^{2n-1} - \right.$$

$$\left. -[2(p-3)-(p+2n-2)k^2]\int tang^{p-2}x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx - (p-3)\int tang^{p-4}x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{27})$$

$$\int \frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{2n-3}\left\{k^2\,tang^{p+1}x.\Delta^{2n-3} + \right.$$

$$\left. + [2(2n-3)-(p+2n-2)k^2]\int \frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-3}dx - (2n-3)(1-k^2)\int \frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-5}dx\right\}, \ldots (B_{27})$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(p+4n-1)4k^2}\left\{2\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1} + \right.$$

$$\left. + (p+2n-2)4k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx - (p-3)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{28})$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta^{2n-1}\,dx = \frac{1}{(p+4n-1)\,4k^2}\Big\{2-2\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n+1}+$$

$$+(p+2n-2)4k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx-(p-3)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\},\;\ldots\;(A_{29})$$

$$\int \tan g^p\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n-1}\,dx = \frac{1}{p-5}\Big\}\,2\tan g^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n+1}-$$

$$-[3(p-5)-(p-2n-6)4k^2]\int \tan g^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n-1}\,dx-$$

$$-[3(p-5)-(p+2n-4)\,4k^2]\int \tan g^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n-1}\,dx-$$

$$-(p-5)\int \tan g^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n-1}\,dx\Big\}\;\ldots\ldots\;(A_{30})$$

Maar evenzeer kan men in eenige der herleidingsformulen den exponent p negatief nemen. Alzoo geven (B_{20}) en (B_{26}) rechtstreeks, en (A_{20}), (A_{23}), (A_{26}) en (A_{29}) bij omkeering, wanneer men in deze zes formulen respectieve $p=-p$, $=-p$, $=2-p$, $=4-p$, $=2-p$, en $=4-p$ stelt,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{1}{\cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}}-1-(p+2n-2)k^2\int \frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\Big\},\;.\;(A_{31})$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\Big\{1-\frac{1}{\cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}}+(p+2n-2)\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}\Big\},\;\ldots\ldots\;(B_{31})$$

$$\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^p\tfrac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{2}{\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^{2n-1}}-2+(p+2n-2)\,4k^2\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-$$

$$-(p+4n-3)\,4k^2\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\Big\},\;\ldots\ldots\;(A_{32})$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{\Delta^{2n+1}}{\cos^{p-1}x}-1-(p-2n-2)\,k^2\int \frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta^{2n-1}dx\Big\},\;.\;(A_{33})$$

$$=\frac{1}{p-2n}\Big\{\frac{\Delta^{2n-1}}{\cos^{p-1}x}-1-(2n-1)(1-k^2)\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\Delta^{2n-3}\,dx\Big\},\;\ldots\ldots\;(B_{33})$$

$$\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^p\tfrac{1}{2}x}\Delta^{2n-1}\,dx = \frac{1}{p-1}\Big\{2\frac{\Delta^{2n+1}}{\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x}-2+(p-2n-2)\,4k^2\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x}\Delta^{2n-1}\,dx-$$

$$-(p-4n-3)\,4k^2\int \frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x}\Delta^{2n-1}\,dx\Big\}\;\ldots\ldots\;(A_{34})$$

12. Even als in § 6 kan men nu uit deze algemeene herleidingsformulen andere afleiden, waarin de Δ, hetzij in den noemer, hetzij in den teller, maar slechts tot de eerste macht voorkomt; en op deze uitkomsten komt het bij ons volgend onderzoek wel in de eerste plaats aan. Hierbij vervalt het doel der herleidingsformulen (B), en heeft men in de andere (A_{19}) tot (A_{24}), (A_{31}) en (A_{32}) [of evenzeer in de overige vergelijkingen (A)] $n=0$ te nemen. Op die wijze ontstaat het volgend stel.

$$\int \sin^p x \, . \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2}\left\{ -\sin^{p-1} x \, . \Delta + (p-1)\int \sin^{p-2} x \, . \cos x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (E_1)$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2}\left\{ 1 - \cos^{p-1} x \, . \Delta - (p-1)(1-k^2)\int \sin x \, . \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots \quad (E_2)$$

$$\int \tang^p x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{ \tang^{p-3} x . \Delta - [2(p-3)-(p-2)k^2]\int \tang^{p-2} x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \tang^{p-4} x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (E_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)4k^2}\left\{ 2 \sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \, . \Delta + (p-2)\, 4k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (E_4)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \cos^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)4k^2}\left\{ 2 - 2 \cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta + (p-2)\, 4k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (E_5)$$

$$\int \tang^p \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-5}\left\{ 2 \tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x . \Delta - [3(p-5)-(p-6)4k^2]\int \tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - [3(p-5)-(p-4)4k^2]\int \tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-5)\int \tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta}\right\}, \ldots \quad (E_6)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{ \frac{\Delta}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-2)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \frac{dx}{\Delta}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (E_7)$$

$$\int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^p \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1}\left\{ \frac{2\Delta}{\cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x} - 2 + (p-2)4k^2 \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} - (p-3)4k^2 \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta}\right\} \ldots (E_8)$$

De herleidingsformulen, waarbij de Δ in den noemer voorkomt, worden op dezelfde wijze afgeleid, wanneer men in de algemeene herleidingsformulen (A_{25}) tot (A_{30}), (A_{33}) en (A_{34}) de $n = 1$ stelt. Alzoo vindt men

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\left\{ -\sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots (F_1)$$

$$\int \sin x . \cos^p x . \Delta\, dx = \frac{1!}{(p+2)k^2}\left\{ 1 - \cos^{p-1} x . \Delta^3 - (p-1)(1-k^2)\int \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta\, dx \right\}, \ldots (F_2)$$

$$\int \tang^p x . \cos^2 x . \Delta dx = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{ \tang^{p-3} x . \Delta^3 - [2(p-3) - pk^2]\int \tang^{p-2} x . \cos^2 x . \Delta dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \tang^{p-4} x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^2}\left\{ 2\sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 4pk^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_4)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^2}\left\{ 2 - 2\cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 + 4pk^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_5)$$

$$\int \tang^p \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{1}{p-5}\left\{ 2\tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 - [3(p-5) - (p-8)4k^2]\int \tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx - \right.$$
$$\left. - [3(p-5) - (p-2)4k^2]\int \tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx - (p-5)\int \tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx \right\}, \ldots (F_6)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\Delta\, dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-4)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}\Delta\, dx \right\}, \ldots (F_7)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x}\Delta dx = \frac{1}{p-1}\left\{ \frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} - 2 + (p-4)4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x}\Delta dx - (p-7)4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x}\Delta dx \right\} . . (F_8)$$

13. Zoodra men nu deze herleidingsformulen gebruiken wil, hetzij rechtstreeks, hetzij bij de toepassing in de volgende hoofdstukken, tot welk doel zij eigenlijk hier werden afgeleid, heeft men de eindintegralen noodig; dat is die bijzondere gevallen, welke om de een of andere reden niet uit de herleidingsformulen zelve kunnen worden afgeleid, of ook zulke, die de eerste gevallen bij de toepassing

uitmaken. Daar de exponent p hier, evenals overal vroeger, telkens met twee vermindert, heeft men ook hier weder onderscheid te maken tusschen de gevallen, dat p even of oneven is. Onder de eindintegralen echter, die hier noodig zijn, bevinden zich onderscheidene, die reeds vroeger in § 7 en 8 zijn afgeleid, en die derhalve hier niet op nieuw behoeven te worden opgesteld.

Zoo kan men bij de herleidingsformulen (E) gebruiken de (γ_9), (γ_{13}), (γ_8), (γ_{10}), (γ_2), (γ_3), (γ_{24}), (γ_{32}), (γ_{23}), (γ_{29}), (γ_{18}), (γ_{17}), terwijl er behalve deze, nog de volgende noodig zijn.

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{2k^2}\int\frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2 sin^2 x)=\frac{1}{k^2}(1-\Delta)\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon_1)$$

$$\int sin^3x.cosx\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{2k^2}\int\frac{1-\Delta^2}{k^2}\frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2sin^2x)=\frac{-1}{3k^4}\{-2+3\Delta-\Delta^3\}=\frac{1}{3k^4}(1-\Delta)^2(2+\Delta),\ .(\varepsilon_2)$$

$$\int sin^2 x\,.\,cos\,x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-\Delta^2}{k^2}cos\,x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k^3}\{Bg\,sin\,(k\,sin\,x)-k\,sin\,x\,.\,\Delta\}\ ,\ \ldots\ldots \quad (\varepsilon_3)$$

naar (γ_9) en (δ_9);

$$\int sinx.cos^3x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{2k^2}\int\frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}\frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2sin^2x)=\frac{-1}{3k^4}\{(2-3k^2)-3(1-k^2)\Delta+\Delta^3\}=$$

$$=\frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(3k^2+\Delta-2),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon_4)$$

$$\int sinx.cos^2x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}sinx\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k^3}\left\{(1-k^2)L\frac{\Delta+kcosx}{1+k}+k-kcosx.\Delta\right\},\ .\ (\varepsilon_5)$$

volgens (γ_8) en (δ_8);

$$\int\frac{sin^3 x}{cos\,x}\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-cos^2 x}{cos\,x}sin\,x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\,cos\,x}-\frac{1}{k^2}(1-\Delta)\ ,\ .\ (\varepsilon_6)$$

met gebruik van (γ_{10}) en (ε_1);

$$\int\frac{cos^3 x}{sin\,x}\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-sin^2 x}{sin\,x}cos\,x\frac{dx}{\Delta}=L\frac{2\,sin\,x}{1+\Delta}-\frac{1}{k^2}(1-\Delta)\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon_7)$$

naar (γ_{13}) en (ε_1);

$$\int sin^2\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-cos^2\frac{1}{2}x}{\Delta}cos\tfrac{1}{2}xdx=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{F(l,z)-2E(l,z)+\frac{2sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-kcosx}\Delta\right\},\ .\ (\varepsilon_8)$$

volgens (γ_{32}), (γ_{33}); en evenzoo naar (γ_{29}) en (γ_{30})

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-\sin^2\frac{1}{2}x}{\Delta}\sin\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{2E(l,y)-F(l,y)-\frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\}..(\varepsilon_9)$$

Verder, als men (γ_8) en (ε_1) invoert,

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int(1-\cos x)\sin x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4k^2}\left\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-1+\Delta\right\},\ldots(\varepsilon_{10})$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int(1+\cos x)\sin x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4k^2}\left\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-\Delta+1\right\}.\ldots(\varepsilon_{11})$$

Stel nu in de herleidingsformulen (E_4) en (E_5) $p=4$; en gebruik bij de eerste uitkomst (ε_8) en (γ_{32}), bij de tweede (ε_9) en (γ_{29}); dan komt er

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{12k^2}\left\{2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta+8k^2\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\int\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{-1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{(1-4k)F(l,z)+8kE(l,z)-\frac{1+5k-k\cos x}{1+k-k\cos x}2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\},\ldots(\varepsilon_{12})$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{12k^2}\left\{2-2\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta+8k^2\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\int\sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{(1-4k)F(l,y)+8kE(l,y)-\frac{1+5k+k\cos x}{1+k+k\cos x}2\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}+2\sqrt{2k}\right\}..(\varepsilon_{13})$$

Ten slotte heeft men met behulp van (γ_{11}), (γ_{13}), (γ_8) en (ε_1)

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+\cos x)^3}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{4+4\cos x-3\sin^2x-\sin^2x.\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta}-\frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-\frac{1}{4k^2}(1-\Delta),\ldots\ldots\ldots(\varepsilon_{14})$$

$$\int\frac{\sin^5\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{(1-\cos x)^3}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{4-4\cos x-3\sin^2x+\sin^2x.\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2x}-\frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}+\frac{1}{4k^2}(1-\Delta).\ldots\ldots(\varepsilon_{15})$$

14. Gaan wij over tot de herleidingsformulen (F), dan behouden de vroeger

gevonden integralen (δ_9), (δ_{13}), (δ_8), (δ_{10}), (δ_{22}), (δ_{34}), (δ_{24}), (δ_{33}), (δ_{23}), (δ_{30}), (δ_{18}) en (δ_{17}) ook hier hare toepassing. Bovendien is nog de bepaling van de volgende integralen hier noodzakelijk.

$$\int \sin x . \cos x . \Delta\, dx = -\frac{1}{2k^2}\int \Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2 \sin^2 x) = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3), \quad \ldots\ldots\ldots (\xi_1)$$

$$\int \sin^3 x . \cos x . \Delta\, dx = \frac{-1}{2k^2}\int \frac{1-\Delta^2}{k^2}\Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2 \sin^2 x) = \frac{-1}{15k^4}(-2+5\Delta^3-3\Delta^5) =$$

$$= \frac{1}{15k^4}(1-\Delta)^2(2+4\Delta+6\Delta^2+3\Delta^3). \quad \ldots\ldots\ldots (\xi_2)$$

Wanneer men de herleidingsformule (B_{25}) toepast voor $n=1$, $p=2$, en daarna de (ϵ_3) gebruikt, zoo wordt

$$\int \sin^2 x . \cos x . \Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{\sin^3 x . \Delta + \int \sin^2 x . \cos x \frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8k^3}\{Bg \sin(k \sin x) + (1-2\Delta^2)\, k \sin x . \Delta\}; \quad \ldots\ldots\ldots (\xi_3)$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . \Delta\, dx = \frac{-1}{2k^2}\int \frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}\Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x) =$$

$$= \frac{1}{15k^4}\{-(2-5k^2)+5(1-k^2)\Delta^3-3\Delta^5\}. \quad \ldots\ldots\ldots (\xi_4)$$

Past men nu de vroegere herleidingsformule (B_{26}) hier toe voor $p=2$ en $n=1$, dan moet men naderhand (ϵ_5) substitueeren, en verkrijgt alzoo

$$\int \sin x . \cos^2 x . \Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{1-\cos^3 x . \Delta + (1-k^2)\int \sin x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8k^3}\left\{(1-k^2)^2 L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + k(1+k^2) + [(1-k^2)-2\Delta^2]\, k\cos x . \Delta\right\}; \ldots (\xi_5)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\Delta\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\sin x . \Delta\, dx = \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} -$$

$$-\frac{1}{3k^2}(1-\Delta)\{(1-3k^2)+\Delta+\Delta^2\}, \quad \ldots\ldots\ldots (\xi_6)$$

naar (δ_{10}) en (ξ_1);

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}\Delta dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x.\Delta dx=L\frac{2\sin x}{1+\Delta}-\frac{1}{3k^2}(1-\Delta)[(1+3k^2)+\Delta+\Delta^2]\,,\ldots(\xi_7)$$

volgens (δ_{13}) en (ξ_1);

$$\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\int(1-\cos^2\tfrac{1}{2}x)\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3+4k)(1-k)F(l,z)-(3-4k^2)2E(l,z)-$$

$$-\left[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\right]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\ldots(\xi_8)$$

na substitutie van (δ_{33}) en (δ_{34});

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\int(1-\sin^2\tfrac{1}{2}x)\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)2E(l,y)-(3+4k)(1-k)F(l,y)+$$

$$+\left[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\right]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\ldots(\xi_9)$$

met gebruik van (δ_{30}) en (δ_{31}). Vervolgens, wanneer men (δ_8) en (ξ_1) invoert,

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos x)\sin x.\Delta dx=\frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}-$$

$$-2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta+2\Delta^3\Big\},\ldots\ldots\ldots\ldots(\xi_{10})$$

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos x)\sin x.\Delta dx=\frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+$$

$$+2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta-2\Delta^3\Big\}.\ldots\ldots\ldots\ldots(\xi_{11})$$

Neemt men $p=4$ in de herleidingsformulen (F_4) en (F_5), en voert men daarop, of de integralen (ξ_8) en (δ_{33}), of de andere (ξ_9) en (δ_{30}) in, dan verkrijgt men

$$\int\sin^4\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{28k^2}\Big\{2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta^3+16k^2\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx-\int\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}=$$

$$=\frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{-(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,z)-(29-32k^2)2kE(l,z)-\Big[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2-$$

$$-32(1+k)k^2\cos x-2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\ldots(\xi_{12})$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \frac{1}{28k^2}\left\{2 - 2cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^3 + 16k^2\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx - \int sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\left\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y)+(29-32k^2)2kE(l,y)+15+\left[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - 32(1+k)k^2 cos\,x - 2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\,cos\,x}\right]cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\} \ldots\ldots \quad (\xi_{13})$$

Ten slotte vindt men na invoering in beide integralen van (ϑ_{11}), (ϑ_{13}), (ϑ_8) en (ξ_1)

$$\int \frac{cos^5\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{(1+cos\,x)^3}{sin\,x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{4+4\,cos\,x - 3\,sin^2 x - sin^2 x.cos\,x}{sin\,x}\Delta dx =$$

$$= L\frac{2(\Delta - cos x)}{1+\Delta} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}\{-(2+33k^2)+(8+3cos x)3k^2\Delta+2\Delta^3\},\ldots(\xi_{14})$$

$$\int \frac{sin^5\tfrac{1}{2}x}{cos\tfrac{1}{2}x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{(1-cos\,x)^3}{sin\,x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{4-4\,cos\,x - 3\,sin^2 x + sin^2 x.cos\,x}{sin\,x}\Delta dx =$$

$$= L\frac{(\Delta - cos x)(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k cos x}{1+k} - \frac{1}{24k^2}\{-(2+15k^2)+(8-3cos x)3k^2\Delta+2\Delta^3\}\ldots(\xi_{15})$$

15. Voor het gebruik is het noodig de voorgaande uitkomsten in tafels te vereenigen: zoo ontstonden de Tafels 1—32; terwijl voor de regelmaat hierbij gevoegd zijn de Tafels 33 en 34, die eerst in de volgende Hoofdstukken te voorschijn treden, zoodat men dan ook aldaar de eindintegralen bepaald vindt.

TAFELS 1—34.

AANMERKINGEN.

De integralen zijn genomen tusschen de grenzen 0 en x.

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \qquad F = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \qquad E = \int_0^x dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}.$$

Verder is bij

$$\Delta(l, y), \qquad F(l, y), \qquad E(l, y), \qquad \Pi(-r, l, y),$$

$$\Delta(l, z), \qquad F(l, z), \qquad E(l, z), \qquad \Pi(-r, l, z),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad l^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z = \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad r = \frac{1}{8k}(1 + 2k)^2.$$

TAFEL 1.

$$\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\sin^{p-3}x \,.\, \cos x \,.\, \Delta + (p-2)(1+k^2)\int \sin^{p-2}x \frac{dx}{\Delta} - (p-3)\int \sin^{p-4}x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x . \Delta} = L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x}. \qquad \int \frac{dx}{\Delta} = F. \qquad \int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \qquad \int \sin^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(F - E).$$

$$\int \sin^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{\cos x \,.\, \Delta - 1 + \frac{1}{k}(1+k^2)\, L\frac{1+k}{k\cos x + \Delta}\right\}.$$

$$\int \sin^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}\{(2+k^2)F - (1+k^2)\,2E + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

TAFEL 2.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{pk^2}\left\{-\sin^{p-1}x \,.\, \Delta + (p-1)\int \sin^{p-2}x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2\sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x). \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3}\{Bg \sin(k\sin x) - k \sin x . \Delta\}. \qquad \int \sin^3 x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)^2(2+\Delta).$$

TAFEL 3.

$$\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\sin x . \cos^{p-3} x . \Delta - (p-2)(1-2k^2)\int \cos^{p-2}x \frac{dx}{\Delta} + (p-3)(1-k^2)\int \cos^{p-4}x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \,.\, \Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}\sin x + \Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x). \qquad \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\{E - (1-k^2)F\}.$$

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{\sin x \,.\, \Delta - \frac{1}{k}(1-2k^2)\, Bg \sin(k \sin x)\right\}.$$

$$\int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}\{(2-3k^2)(1-k^2)F - (1-2k^2)\,2E + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

TAFEL 4.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ 1 - \cos^{p-1} x \,.\, \Delta - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}. \quad \int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \quad \int \sin x . \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3} \left\{ (1-k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + k - k\cos x \,.\, \Delta \right\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4} \left\{ (1-\Delta)(3k^2+\Delta-2) \right\}.$$

TAFEL 5.

$$\int \tang^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\tang^{p-2} x}{\sin x . \cos x} \Delta - (p-2)(2-k^2) \int \tang^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-3) \int \tang^{p-4} x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\tang x \,.\, \Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}. \quad \int \frac{dx}{\Delta} = F. \quad \int \tang x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1+k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}.$$

$$\int \tang^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} (\tang x \,.\, \Delta - E).$$

$$\int \tang^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3(1-k^2)^2} \left\{ (2-k^2)\, 2E - (1-k^2) F + [(1-k^2)\tang^2 x - (3-k^2)] \tang x \,.\, \Delta \right\}.$$

TAFEL 6.

$$\int \tang^p x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)} \left\{ \tang^{p-3} x . \Delta - [2(p-3) - (p-2)k^2] \int \tang^{p-2} x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-3) \int \tang^{p-4} x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\tang x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta). \quad \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2} \{ E - (1-k^2) F \}.$$

$$\int \tang x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta). \quad \int \tang^2 x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(F - E).$$

$$\int \tang^3 x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 7.

$$\int \frac{dx}{\cos^p x.\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta + (p-2)(1-2k^2) \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x.\Delta} + (p-3) k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x.\Delta} \right\}.$$

$$\int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x). \qquad \int \frac{dx}{\Delta} = F. \qquad \int \frac{dx}{\cos x.\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} \sin x + \Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x.\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \{(1-k^2) F - E + \tang x.\Delta\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x.\Delta} = \frac{1}{3(1-k^2)^2} \left\{ (2-3k^2)(1-k^2) F - (1-2k^2) 2E + [(1-k^2) + (1-2k^2) 2\cos^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \right\}.$$

TAFEL 8.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-2) k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \sin x.\cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(3k^2 + \Delta - 2).$$

$$\int \sin x.\cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3} \left\{ (1-k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} + k - k \cos x.\Delta \right\}.$$

$$\int \sin x.\cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta). \qquad \int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}.$$

TAFEL 9.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)4k^2} \Big\{ - \sin x.\sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x.\Delta + (p-3) 8k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (p-4)(1+4k^2) \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x.\Delta} = 2\{F - E - \cot \tfrac{1}{2} x.\Delta\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x.\Delta} = -\frac{\sqrt{2k}}{1+2k} \left\{ F(l,y) + \frac{1-2k}{4k} \Pi(-r,l,y) \right\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1+k^2-2r)2k(1+\cos x) + \Delta^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\Delta} = F. \qquad \int \sin \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} F(l,y). \qquad \int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2} \left\{ F - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \right\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}} \left\{ (1-2k) F(l,y) - 2E(l,y) + \frac{2\cos \frac{1}{2} x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x} \Delta \right\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2} \{E - (1-2k^2) F - 2k\, Bg \sin (k \sin x)\}.$$

TAFEL 10.

$$\int sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)\,4k^2}\Big\{ 2\, sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta + (p-2)\,4k^2 \int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (p-3)\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int \frac{cos\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2(\Delta - cos x)}{1+\Delta}. \quad \int cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \quad \int sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k}L\frac{1+k}{k cos x + \Delta}.$$

$$\int sin^2\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\Big\{F(l,z) - 2E(l,z) + \frac{2\, sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k-k\,cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int sin^3\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\Big\{k L\frac{1+k}{k\,cos x + \Delta} - 1 + \Delta\Big\}.$$

$$\int sin^4\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\Big\{-(1-4k)F(l,z) - 8kE(l,z) + \frac{1+5k-k\,cos x}{1+k-k\,cos x} 2 sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 11.

$$\int cos^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)\,4k^2}\Big\{sin\,x \,.\, cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta + (p-3)\,8k^2\int cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} -$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\int cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} + (p-5)\int cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{cos^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta} = 2\,\{F - E + tang\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int\frac{dx}{cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta} = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\} + \frac{1}{2}L\frac{(\Delta + sin\tfrac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-cos x)+\Delta^2}. \quad \int\frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \qquad \int cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2}\Big\{F + \frac{1}{k}Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\Big\}.$$

$$\int cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z) - (1-2k)F(l,z) - \frac{2\,sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k-k\,cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\{E - (1-2k^2)F + 2k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\}.$$

TAFEL 12.

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)\,4k^2}\Big\{2-2\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta + (p-2)4k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} -$$
$$-(p-3)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{(1+\Delta)(\Delta-\cos x)}{2\sin^2 x}.\quad \int \sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,y).\quad \int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,y) - F(l,y) - \frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\Big\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}+1-\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\Big\{(1-4k)F(l,y)+8kE(l,y)-\frac{1+5k+k\cos x}{1+k+k\cos x}2\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}+2\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 13.

$$\int \tang^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{8\tang^{p-3}\frac{1}{2}x}{\sin^2 x}\Delta - [(3p-7)-(p-2)4k^2]\int \tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} -$$
$$-[(3p-11)-(p-4)4k^2]\int \tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} - (p-5)\int \tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{\tang^2\frac{1}{2}x.\Delta} = F-2E-2\cot\tfrac{1}{2}x.\Delta.\quad \int\frac{dx}{\tang\frac{1}{2}x.\Delta} = L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta}.\quad \int\frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int \tang\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{(1+\Delta)(\Delta-\cos x)}{2\sin^2 x}.$$

$$\int \tang^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = F-2E+2\tang\tfrac{1}{2}x.\Delta.\quad \int \tang^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Delta-(1-2k^2)L\frac{(1+\Delta)(\Delta-\cos x)}{2\sin^2 x}-1.$$

$$\int \tang^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3}\Big\{(1-2k^2)8E-(5-8k^2)F-\frac{2\tang\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}[(1-4k^2)+(1-2k^2)2\cos x]\Delta\Big\}.$$

TAFEL 14.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-5}\Big\{ 2 tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta - [3(p-5)-(p-6)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} -$$

$$- [3(p-5)-(p-4)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang\tfrac{1}{2}x} cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2(\Delta - cos\,x)}{1+\Delta} - \frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\,cos\,x+\Delta} - \frac{1}{4k^2}(1-\Delta).$$

$$\int cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\{E-(1-2k^2)F+2k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\}.$$

$$\int tang\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\Big\{kL\frac{1+k}{k\,cos\,x+\Delta}+1-\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}(F-E). \qquad \int tang^3\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^3}\Big\{kL\frac{1+k}{k\,cos\,x+\Delta}-1+\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\{E-(1-2k^2)F-2k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\}.$$

$$\int tang^5\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{(\Delta-cos\,x)(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} - \frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\,cos\,x+\Delta} + \frac{1}{4k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 15.

$$\int\frac{dx}{cos^p\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{sin\,x}{cos^p\tfrac{1}{2}x}\Delta + (p-2)(1+4k^2)\int\frac{dx}{cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta} - (p-3)8k^2\int\frac{dx}{cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta} +$$

$$+ (p-4)4k^2\int\frac{dx}{cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta}\Big\}.$$

$$\int cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z)-(1-2k)F(l,z)-\frac{2\,sin\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\,cos\,x}\Delta\Big\}.$$

$$\int cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2}\Big\{F+\frac{1}{k}Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\Big\}.$$

$$\int cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \qquad \int\frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int\frac{dx}{cos\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\} + \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+sin\tfrac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-cos\,x)+\Delta^2}.$$

$$\int\frac{dx}{cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta} = 2\{F-E+tang\tfrac{1}{2}x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{dx}{cos^4\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{2}{3}\Big\{(1+2k^2)2F-(1+4k^2)2E+4[2(1+2k^2)+(1+4k^2)cos\,x]\frac{tang\tfrac{1}{2}x}{cos^2\tfrac{1}{2}x}\Delta\Big\};$$

TAFEL 16.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{2\Delta}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} - 2 + (p-2) 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} - (p-3) 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{12 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1-4k) F(l,y) + 8k E(l,y) - \frac{1+5k+k\cos x}{1+k+k\cos x} 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} + 2\sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2} \left\{ k L \frac{1+k}{k \cos x + \Delta} + 1 - \Delta \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}} \left\{ 2 E(l,y) - F(l,y) - \frac{2 \cos \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x} \Delta \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \qquad \int \sin \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} F(l,y). \qquad \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{(1+\Delta)(\Delta - \cos x)}{2 \sin^2 x}.$$

TAFEL 17.

$$\int \sin^p x . \Delta dx = \frac{1}{(p+1)k^2} \left\{ \sin^{p-3} x . \cos x . \Delta^3 + [(p-2) + pk^2] \int \sin^{p-2} x . \Delta dx - (p-3) \int \sin^{p-4} x . \Delta dx \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \Delta = L \frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + k L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k}. \qquad \int \Delta dx = E.$$

$$\int \sin x . \Delta dx = \frac{1}{2k} (1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta.$$

$$\int \sin^2 x . \Delta dx = \frac{1}{3k^2} \{ (1-k^2) F - (1-2k^2) E - k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

$$\int \sin^4 x . \Delta dx = \frac{1}{15 k^4} \{ (1-k^2)(1+2k^2) 2F - (2+3k^2-8k^4) E + [2(1+2k^2) - 3\Delta^2] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

TAFEL 18.

$$\int \sin^p x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{(p+2)k^2} \left\{ -\sin^{p-1} x . \Delta^3 + (p-1) \int \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta dx \right\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \Delta dx = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} + \Delta - 1. \qquad \int \cos x . \Delta dx = \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x . \Delta.$$

$$\int \sin x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{3k^2} (1 - \Delta^3). \qquad \int \sin^2 x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{8k^3} \{ Bg \sin (k \sin x) + (1 - 2\Delta^2) k \sin x . \Delta \}.$$

$$\int \sin^3 x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{15 k^4} (1-\Delta)^2 (2 + 4\Delta + 6\Delta^2 + 3\Delta^3).$$

TAFEL 19.

$$\int \cos^p x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{(p+1)k^2}\Big\{\sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3 - [(p-2)-(p-1)\,2\,k^2]\int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \, dx + (p-3)(1-k^2)\int \cos^{p-4} x \,.\, \Delta \, dx\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}\Delta = k\, Bg\sin(k \sin x) + \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sin x \,.\, \sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}. \qquad \int \Delta\, dx = E.$$

$$\int \cos x \,.\, \Delta dx = \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x \,.\, \Delta. \quad \int \cos^2 x \,.\, \Delta dx = \frac{1}{3k^2}\{(1+k^2)E-(1-k^2)F+k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int \cos^4 x \,.\, \Delta dx = \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1-3k^2)2F-(2-7k^2-3k^4)E-[2(1-3k^2)-3\Delta^2]k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

TAFEL 20.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\Big\{1-\cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 - (p-1)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \, dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\Delta dx = \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}+1-\Delta. \quad \int \sin x \,.\, \Delta dx = \frac{1}{2k}(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{8k^3}\Big\{(1-k^2)^2 L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+k(1+k^2)+[(1-k^2)-2\Delta^2]k\cos x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{15k^4}\{-(2-5k^2)+5(1-k^2)\Delta^3-3\Delta^5\}.$$

TAFEL 21.

$$\int \tan g^p x \,.\, \Delta dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{\tan g^{p-2} x}{\sin x \,.\, \cos x}\Delta^3 - [(p-2)2-pk^2]\int \tan g^{p-2} x \,.\, \Delta dx - (p-3)\int \tan g^{p-4} x \,.\, \Delta dx\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\tan g x}\Delta = L\frac{2\sin x}{1+\Delta}+\Delta-1. \quad \int \Delta dx = E. \quad \int \tan g x \,.\, \Delta dx = \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}+1-\Delta.$$

$$\int \tan g^2 x \,.\, \Delta \, dx = F - 2E + \tan g x \,.\, \Delta.$$

$$\int \tan g^4 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\Big\{(7-8k^2)E-(1-k^2)4F-[4(1-k^2)+4\cos^2 x-5\Delta^2]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\Big\}.$$

TAFEL 22.

$$\int tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)} \Big\{ tang^{p-3} x \,.\, \Delta^3 -$$

$$- [2(p-3) - p k^2] \int tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta\, dx - (p-3) \int tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^2 x}{tang\, x} \Delta\, dx = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} - \frac{1}{3k^2}(1-\Delta)\, \{(1+3k^2) + \Delta + \Delta^2\}.$$

$$\int cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3k^2} \{ (1+k^2) E - (1-k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int tang\, x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3).$$

$$\int tang^2 x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3k^2} \{ (1-k^2) F - (1-2k^2) E - k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int tang^3 x . cos^2 x . \Delta dx = \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{3k^2}(1-\Delta)\, [(1-3k^2) + \Delta + \Delta^2].$$

TAFEL 23.

$$\int \frac{dx}{cos^p x}\Delta = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{\sin x}{cos^{p-1} x}\Delta^3 + [(p-2)-(p-3)2k^2] \int \frac{dx}{cos^{p-2} x}\Delta + (p-5)k^2 \int \frac{dx}{cos^{p-4} x}\Delta \Big\}.$$

$$\int \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{2k} Bg \sin(k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta. \qquad \int \Delta\, dx = E,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}\Delta = k\, Bg \sin(k \sin x) + \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x}\Delta = F - E + tang\, x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x}\Delta = \frac{1}{3(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\, 2F - (2-k^2) E + [(3-2k^2) - (2-k^2) \sin^2 x] \frac{\sin x}{cos^3 x}\Delta \Big\}.$$

TAFEL 24.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \Delta\, dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-4) k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta\, dx \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . \Delta\, dx = \frac{1}{15 k^4} \{ -(2-5k^2) + 5(1-k^2) \Delta^3 - 3 \Delta^5 \}.$$

$$\int \sin x . \cos^2 x . \Delta\, dx = \frac{1}{8 k^3} \left\{ (1-k^2)^2 L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + \Delta} + k(1+k^2) + [(1-k^2) - 2\Delta^2] k \cos x . \Delta \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos x . \Delta\, dx = \frac{1}{3 k^2}(1-\Delta^3). \quad \int \sin x . \Delta\, dx = \frac{1}{2k}(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \Delta\, dx = \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x} + 1 - \Delta.$$

TAFEL 25.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2) 4 k^2} \left\{ - \sin x . \sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 + 8 p k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx - \right.$$

$$\left. - [(p-4) + (p-2) 4 k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx + (p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx \right\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{\sin^2 \frac{1}{2} x} dx = 2(1-k^2) F - 2E - 2k\, Bg \sin (k \sin x) - 2 \cot \tfrac{1}{2} x . \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{\sin \frac{1}{2} x} dx = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k} \left\{ 2k F(l,y) - 2(1+2k) E(l,y) - \frac{1}{4k}(1-2k) \Pi(-r,l,y) \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r) 2k(1+\cos x) + \Delta^2} + \frac{4k \cos \frac{1}{2} x}{1+k+k \cos x} \Delta.$$

$$\int \Delta dx = E. \quad \int \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2k E(l,y) + (1-k) F(l,y) + \frac{1-k+k \cos x}{1+k+k \cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{4} \left\{ 2E - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) - \sin x . \Delta \right\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{15 k \sqrt{2k}} \left\{ (1-k)(1-2k) 3 F(l,y) - (1+2k^2) 6 E(l,y) - \right.$$

$$\left. - \left[(1+14k+4k^2) - 4(1+k) k \cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k^2)\Delta^2}{1+k+k \cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{12 k^2} \{ (1+4k^2) E - (1-k^2) F - 3k\, Bg \sin(k \sin x) - (3 - \cos x) k^2 \sin x . \Delta \}.$$

TAFEL 26.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)\,4\,k^2}\Big\{2 \sin^{p-3} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 + 4\,p\,k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx -$$

$$-(p-3)\int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\Delta\, dx = k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L\,\frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} + \Delta - 1.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{2}{3\sqrt{2k}}\Big\{2\,k\,E(l,z) + (1-k)\,F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin \tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{4k}(1-k^2)\,L\,\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos x . \Delta.$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{15\,k\sqrt{2k}}\Big\{(3+4k)(1-k)\,F(l,z) - (3-4k^2)\,2\,E(l,z) -$$

$$-\Big[(1+2k)^2 - 4\,(1+k)\,k\cos x - \frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin \tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{24\,k^3}\Big\{3\,k(1-k^2)\,L\,\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} - 2 + 3k^2 - 3\,k^2\cos x . \Delta + 2\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \Delta\, dx = \frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{-(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,z) - (29-32\,k^2)\,2\,k\,E(l,z) -$$

$$-\Big[5 - 15\Delta^2 + 8k(1+2k)^2 - 32(1+k)k^2\cos x - 2k\,\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin \tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

B 7

TAFEL 27.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)\,4k^2} \Big\{ \sin x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 8pk^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$- [(p-4) + (p-2)\,4k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} \,.\, \Delta\, dx + (p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} x}\, dx = 2(1-k^2)\, F - 2E + 2k\, Bg \sin (k \sin x) + 2 \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{\cos \frac{1}{2} x}\, dx = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ (1+2k)\, 2E(l,z) - 2kF(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\, \Pi(-r,l,z) \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2} L \frac{(\sin \frac{1}{2} x + \Delta)^2}{(1+k-2r)\, 2k(1-\cos x) + \Delta^2} - \frac{4k \sin \frac{1}{2} x}{1+k-k\cos x} \Delta.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \qquad \int \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4} \Big\{ 2E + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) + \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{15k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+2k^2)\, 6E(l,z) - (1-k)(1-2k)\, 3F(l,z) +$$

$$+ \Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2} \{ (1+4k^2)E - (1-k^2)F + 3k\, Bg \sin (k \sin x) + (3+\cos x)\, k^2 \sin x . \Delta \}.$$

TAFEL 28.

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^p \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^3}\Big\{2-2\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3+4pk^3\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx -$$

$$-(p-3)\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} \Delta\, dx = k L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} + L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} + 1 - \Delta.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{-2}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k) F(l,y) + 2kE(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{4k}(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos x . \Delta.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)\, 2\, E(l,y) - (3+4k)(1-k) F(l,y) +$$

$$+\Big[(1+2k)^2 - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + 2 + 3k^2 - 3k^2 \cos x . \Delta - 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{210k^3\sqrt{2k}}\Big\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y) + (29-32k^2)2kE(l,y) +$$

$$+15+\Big[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2 - 32(1+k)k^3\cos x - 2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos \tfrac{1}{2} x . \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 29.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{p-1}\left\{\frac{2\, tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx - \right.$$

$$\left. - [(3p-11)-(p-2)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx\right\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{tang^2\tfrac{1}{2}x}dx = 2(1-k^2)F - 3E - 2k\,Bg\,sin(k\,sin\,x) - 2\,cot\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{tang\tfrac{1}{2}x}dx = k\,L\frac{\Delta + k\,cos\,x}{1+k} + L\frac{2(\Delta - cos\,x)}{1+\Delta} + \Delta - 1.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \qquad \int tang\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = k\,L\frac{\Delta + k\,cos\,x}{1+k} + L\frac{(\Delta - cos\,x)(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} + 1 - \Delta.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = 2(1-k^2)F - 3E + 2k\,Bg\,sin(k\,sin\,x) + 2\,tang\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = 3k\,L\frac{1+k}{\Delta + k\,cos\,x} - (1+2k^2)L\frac{(\Delta - cos\,x)(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} + (1+cos^2\tfrac{1}{2}x)\frac{\Delta}{cos^2\tfrac{1}{2}x} - 2.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3}\left\{(11+8k^2)E - (1-k^2)8F - 12k\,Bg\,sin(k\,sin\,x) - \right.$$

$$\left. - [(1+2k^2)+(1+k^2)2\,cos\,x]\frac{sin\,x}{cos^4\tfrac{1}{2}x}\Delta\right\}.$$

TAFEL 30.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{p+5}\Big\{ 2\,tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x . \Delta^3 - [3(p-5)-(p-8)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx -$$

$$-[3(p-5)-(p-2)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4 \frac{1}{2}x}{tg\,\frac{1}{2}x}\Delta dx = L\frac{2(\Delta - cos x)}{1+\Delta} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}[-(2+33k^2)+(8+3\cos x)3k^2\Delta + 2\Delta^3].$$

$$\int cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1+4k^2)E - (1-k^2)F + 3k\,Bg\sin(k\sin x) + (3+\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tg\,\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + 2 + 3k^2 - 3k^2\cos x . \Delta - 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int tg^2\,\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1-k^2)F - (1-2k^2)E - k^2\sin x . \cos x . \Delta\}.$$

$$\int tg^3\,\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} - 2 + 3k^2 - 3k^2\cos x . \Delta + 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int tg^4\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1+4k^2)E - (1-k^2)F - 3k\,Bg\sin(k\sin x) - (3-\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tg^5\,\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . \Delta dx = L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} -$$

$$-\frac{1}{24k^2}[-(2+15k^2)+(8-3\cos x)3k^2\Delta + 2\Delta^3].$$

TAFEL 31.

$$\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^p \frac{1}{2} x} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \Delta^3 + [(p-2) + (p-4)\, 4\, k^2] \int \frac{\Delta\, dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} - (p-6) 8\, k^2 \int \frac{\Delta\, dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} + \right.$$

$$\left. + (p-8)\, 4\, k^2 \int \frac{\Delta\, dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} \right\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{15\, k \sqrt{2\, k}} \left\{ (1 + 2\, k^2)\, 6\, E(l, z) - (1-k)(1-2\, k)\, 3\, F(l, z) + \right.$$

$$\left. + \left[(1 + 14\, k + 4\, k^2) - 4(1+k) k \cos x - \frac{2(4 + 5k + 10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1 + k - k \cos x} \right] \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2\, k} \right\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4} \left\{ 2\, E + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) + \sin x \,.\, \Delta \right\}.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{2}{3 \sqrt{2\, k}} \left\{ 2\, k\, E(l, z) + (1-k)\, F(l, z) + \frac{1 - k - k \cos x}{1 + k - k \cos x} \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2\, k} \right\}.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \quad \int \frac{\Delta\, dx}{\cos \frac{1}{2} x} = \frac{\sqrt{2k}}{1 + 2k} \left\{ (1 + 2k) 2 E(l, z) - 2\, k\, F(l, z) + \frac{1}{4k} (1 - 2k)\, \Pi(-r, l, z) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2\, r)\, 2\, k (1 - \cos x) + \Delta^2} - \frac{4\, k \sin \frac{1}{2} x \,.\, \Delta}{1 + k - k \cos x}.$$

$$\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = 2 (1 - k^2) F - 2\, E + 2\, k\, Bg \sin (k \sin x) + 2 \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^4 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{3} \left\{ (1 - k^2)\, 4\, F - (1 - 2\, k^2)\, 4\, E + [2 (1 - k^2) + (1 - 2\, k^2) \cos x] \frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta \right\}.$$

$$\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^6 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{15} \left\{ (1 + 2\, k^2)(1 - k^2)\, 16\, F - (2 + 3\, k^2 - 8\, k^4)\, 8\, E + \right.$$

$$\left. + [4(1-k^2)(1 + 4\, k^2) + (1 + 2\, k^2)(3 - 4\, k^2) 2 \cos x + 2 \cos^2 x + (3 - 8\, k^2) \Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \right\}.$$

TAFEL 32.

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta dx=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-2+(p-4)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}\Delta dx-(p-7)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}\Delta dx\right\}.$$

$$\int\cos^4\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y)+(29-32k^2)2kE(l,y)+15+$$
$$+\left[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2-32(1+k)k^2\cos x-2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\right]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{24k^3}\left\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta-2\Delta^3\right\}.$$

$$\int\cos^2\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)2E(l,y)-(3+4k)(1-k)F(l,y)+$$
$$+\left[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\right]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4k}(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos x.\Delta.$$

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{-2}{3\sqrt{2k}}\left\{2kE(l,y)+(1-k)F(l,y)+\frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\}.$$

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\Delta dx=kL\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}+1-\Delta.$$

TAFEL 33.

$$\int sin^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ \frac{sin^{p-3} x . cos x}{\Delta} + [(p-2)+(p-4)k^2] \int sin^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} - (p-3) \int sin^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ E - \frac{k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta} \right\}. \qquad \int sin\, x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\Delta - cos\, x}{(1-k^2)\Delta}.$$

$$\int sin^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2(1-k^2)} \left\{ E - (1-k^2) F - \frac{k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta} \right\}.$$

$$\int sin^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\Delta - cos\, x}{(1-k^2)\Delta} + \frac{1}{k} L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1+k} \right\}.$$

$$\int sin^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4(1-k^2)} \left\{ (2-k^2) E - (1-k^2) 2 F - \frac{k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta} \right\}.$$

TAFEL 34.

$$\int cos^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ \frac{sin\, x . cos^{p-3} x}{\Delta} - [(p-2) - (p-3) 2 k^2] \int cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} + \right.$$

$$\left. + (p-3)(1-k^2) \int cos^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ E - \frac{k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta} \right\}. \qquad \int cos\, x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{sin\, x}{\Delta}.$$

$$\int cos^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ F - E \right\} + \frac{sin\, x . cos\, x}{\Delta}.$$

$$\int cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{k} Bg\, sin\, (k\, sin\, x) - (1-k^2) \frac{sin\, x}{\Delta} \right\}.$$

$$\int cos^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4} \left\{ (2-k^2) E - (1-k^2) 2 F - \frac{(1-k^2) k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta} \right\}.$$

HOOFDSTUK II.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN NOG DE ELLIPTISCHE INTEGRAAL DER EERSTE SOORT, F, BEVATTEN.

1. Nu alzoo het materiaal gereed is, kunnen wij overgaan tot de afleiding van ons herleidingstheorema. Wanneer men zich herinnert, dat men eene integraal naar een parameter kan differentieeren, ook wanneer die parameter niet in de te integreeren functie, maar alleen in eene van de grenzen der integratie, voorkomt; dat is hier

$$\frac{d}{da}\int_0^a f(x)\,dx = f(a);$$

— zoo is klaarblijkelijk

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[\varphi(x)\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 y}}\right] = \frac{d\varphi(x)}{dx}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 y}} + \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}.$$

dat is

$$\frac{d}{dx}[\varphi(x).F] = F\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{\Delta}.$$

Wanneer men deze integreert, zoo komt er

$$\varphi(x).F = \int\frac{\varphi(x)\,dx}{\Delta} + \int F\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx,$$

derhalve

$$\int F\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx = \varphi(x).F - \int\frac{\varphi(x)\,dx}{\Delta}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Dewijl deze integralen hier, evenzeer als al onze integralen, tusschen de grenzen 0 en x moeten genomen worden, is dit dus ook bij de geïntegreerde functie $\varphi(x).F$ het geval. Bij de grens $x = 0$ wordt ook F gelijk nul; maar nu mag

$\varphi(x)$ natuurlijk niet oneindig worden. Vandaar dat bij de voorgaande herleidingsformulen (zie Hoofdstuk I) de factoren $\frac{1}{sin^p x}$ en $\frac{1}{tang^p x}$ onder het integraalteeken werden uitgesloten, maar de factor $\frac{1}{cos^p x}$ daarentegen is opgenomen.

Wij kunnen nu derhalve gerustelijk overgaan tot het toepassen van het theorema (**α**) en zullen een aanvang maken met de integralen (γ_1) tot (γ_{34}); deze leveren ons

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2k^2}\{E - F\,.\,\Delta^2\}, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\int \frac{sin\,x}{cos^3 x} F\,dx = \frac{1}{2(1-k^2)}\{E + (1-k^2)\,tang\,x\,.\,F - tang^2 x\,.\,\Delta\}, \quad \ldots \quad (2)$$

$$\int sin^3 x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{12k^4}\{(1+k^2)\,2E - (2+k^2-3k^4 sin^4 x)F - k^2 sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\}, \ldots (3)$$

$$\int sin\,x.cos^3 x.F\,dx = \frac{1}{12k^4}\{[(2-5k^2)+3k^4 sin^2 x.(1+cos^2 x)]F - (1-2k^2)2E + k^2 sin\,x.cos\,x.\Delta\}, \ldots (4)$$

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^5 x} F\,dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2}\{[1 + 3(1-k^2)\,tang^4 x]\,(1-k^2)F - (2-k^2)\,2E + $$
$$+ [(3-k^2) - (1-k^2)\,tang^2 x]\,tang\,x\,.\,\Delta\}, \quad \ldots \quad (5)$$

$$\int cos\,x\,.\,F\,dx = sin\,x\,.\,F + \frac{1}{k} L\,\frac{k\,cos\,x + \Delta}{1+k}, \quad \ldots \quad (6)$$

$$\int sin\,x\,.\,F\,dx = -\,cos\,x\,.\,F + \frac{1}{k}\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x), \quad \ldots \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} F = tang\,x\,.\,F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L\,\frac{(1+\sqrt{1-k^2})\,cos\,x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}, \quad \ldots \quad (8)$$

$$\int \frac{cos\,x}{sin^2 x} F\,dx = -\frac{1}{sin\,x} F + L\,\frac{\Delta - cos\,x}{sin\,x}, \quad \ldots \quad (9)$$

$$\int \frac{sin\,x}{cos^2 x} F\,dx = \frac{1}{cos\,x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L\,\frac{\sqrt{1-k^2}\,sin\,x + \Delta}{cos\,x}, \quad \ldots \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} F = -\frac{1}{tang\,x} F + L\,\frac{2\,sin\,x}{1+\Delta}, \quad \ldots \quad (11)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F\, dx = -\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F + 2E - 2 \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta, \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin^3 \frac{1}{2} x} F\, dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F - 2E - 2 \cot \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta, \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{8k^2}\{(1 - 2k^3 + 4k^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} x) F - E + 2k B_y \sin(k \sin x)\}, \quad \ldots (14)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{8k^2}\{E - (1 - 2k^2 + 4k^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} x) F + 2k B_y \sin(k \sin x)\}, \quad \ldots (15)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F\, dx = \frac{1}{6}\left\{(5 - 8k^2 + 3 \tan^4 \tfrac{1}{2} x) F - (1 - 2k^2) 8E + \frac{2 \tan \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x}[(1 - 4k^2) + (1 - 2k^2) 2 \cos x] \Delta\right\}, \ldots (16)$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, y), \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, z), \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F = 2 \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, F + 2L \frac{2 \sin^2 x}{(1 + \Delta)(\cos x + \Delta)}, \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F\, dx = -\frac{2}{\sin \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1 + 2k}\left\{F(l, y) + \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, y)\right\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2k (1 + \cos x) + \Delta^2}, \ldots (20)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\, dx = \frac{2}{\cos \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1 + 2k}\left\{F(l, z) + \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, z)\right\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2k (1 - \cos x) + \Delta^2}, \ldots (21)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F = -\frac{2}{\tan \frac{1}{2} x} F + 2L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1 + \Delta}, \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{2}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{2E(l, y) - (1 - 2k) F(l, y) - \frac{2 \cos \frac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}}{1 + k + k \cos x} \Delta\right\}, \ldots (23)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{2E(l, z) - (1 - 2k) F(l, z) - \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}}{1 + k - k \cos x} \Delta\right\}, \ldots (24)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} F\, dx = \frac{2}{3}\left\{\tan^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta + 1 + (1 - 2k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x}\right\}, \ldots (25)$$

*

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} F dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2} \Big\{ (1-2k^2) 2E + [1+6(1-k^2) tg^2 x + 3(1-k^2) tang^4 x](1-k^2) F -$$

$$- [(1-k^2) + (1-2k^2) 2 \cos^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \Big\}, \dots\dots\dots\dots (26)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{6} \Big\{ (1 + 4k^2) 4E - [(1+8k^2) - 6 tang^2 \tfrac{1}{2} x - 3 tang^4 \tfrac{1}{2} x] F -$$

$$- [2(1+2k^2) + (1+4k^2) \cos x] \frac{2 tang \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}. \dots\dots\dots (27)$$

2. Ten einde op de algemeene herleidingsformulen (C_1) tot (C_8) ons theorema toe te passen, zullen wij het liever eerst omkeeren

$$\int \varphi(x) \frac{dx}{\Delta} = \varphi(x) F - \int F \frac{d\varphi(x)}{dx} dx. \dots\dots\dots\dots\dots (\alpha_1)$$

Nu kunnen wij toch dit theorema op elke der integralen toepassen, die in elke formule (C) voorkomen, en vinden dan weder eene herleidingsformule tusschen integralen van denzelfden vorm als de boven beschouwde.

Langs dien weg vindt men naar (C_1)

$$(p-1)k^2 \Big\{ \sin^p x . F - p \int \sin^{p-1} x . \cos x . F dx \Big\} = \cos x \ \sin^{p-3} x . \Delta + (p-2)(1+k^2) \Big\{ \sin^{p-2} x . F -$$

$$-(p-2) \int \sin^{p-3} x . \cos x . F dx \Big\} - (p-3) \Big\{ \sin^{p-4} x . F - (p-4) \int \sin^{p-5} x . \cos x . F dx \Big\}.$$

Wanneer men eerst p vervangt door $p+1$, dan vindt men na herleiding

$$\int \sin^p x . \cos x . F dx = \frac{1}{p(p+1)k^2} \Big\{ (p-1)^2 (1+k^2) \int \sin^{p-2} x . \cos x . F dx -$$

$$-(p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . \cos x . F dx - [\cos^2 x + (1 - p\cos^2 x)\Delta^2] \sin^{p-3} x . F - \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta \Big\} .. (I)$$

Voor p even zijn de eindintegralen voor $p=2$ de integralen (6) en (9); welke laatste echter verdwijnt, wegens den factor ($p-2$). Voor p oneven zijn de eindintegralen voor $p=5$ de integralen (3) en (1).

De formule (C_2) levert evenzoo

$$(p-1)k^2 \Big\{ \cos^p x . F + p \int \cos^{p-1} x . \sin x . F dx \Big\} = \sin x . \cos^{p-3} x . \Delta - (p-2)(1-2k^2) \Big\{ \cos^{p-2} x . F +$$

$$+ (p-2) \int \cos^{p-3} x . \sin x . F dx \Big\} + (p-3)(1-k^2) \Big\{ \cos^{p-4} x . F + (p-4) \int \cos^{p-5} x . \sin x . F dx \Big\}.$$

Om den verlangden vorm te verkrijgen moet men ook hier $p+1$ stellen voor p, en verder herleiden; dan komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\,dx = \frac{1}{p(p+1)k^2}\Big\{-(p-1)^2(1-2k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, F\,dx +$$

$$+(p-2)(p-3)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-4}x.F\,dx+[\cos^2 x-(2-p\sin^2 x)\Delta^2]\cos^{p-3}x.F+\sin x \cos^{p-2}x.\Delta\Big\}\,..\,(\mathrm{II})$$

Voor evene p zal men als eindintegralen hebben de integralen (7) en (10), hoewel deze laatste voor $p=2$ uit de herleidingsformule verdwijnt. Voor onevene p zal men voor $p=5$ de integralen (4) en (1) als eindintegralen vinden.

Nog geeft ons de herleidingsformule (C_3)

$$(p-1)(1-k^2)\Big\{\tang^p x\,.\,F-p\int\frac{\tang^{p-1}x}{\cos^2 x}F\,dx\Big\}=\frac{\tang^{p-2}x}{\sin x.\cos x}\Delta-(p-2)(2-k^2)\Big\{\tang^{p-2}x.F-$$

$$-(p-2)\int\frac{\tang^{p-3}x}{\cos^2 x}F\,dx\Big\}-(p-3)\Big\{\tang^{p-4}x\,.\,F-(p-4)\int\frac{\tang^{p-5}x}{\cos^2 x}F\,dx\Big\}.$$

Ook hier moet men p door $p+1$ vervangen; eene verdere herleiding geeft dan

$$\int\frac{\tang^p x}{\cos^2 x}F\,dx=\frac{1}{p(p+1)(1-k^2)}\Big\{-(p-1)^2(2-k^2)\int\frac{\tang^{p-2}x}{\cos^2 x}F\,dx-$$

$$-(p-2)(p-3)\int\frac{\tang^{p-4}x}{\cos^2 x}F\,dx-[\cos^2 x-(p-\cos^2 x)\Delta^2]\frac{\tang^{p-3}x}{\cos^4 x}F-\frac{\tang^p x}{\sin^2 x}\Delta\Big\}\,..\,(\mathrm{III})$$

Hier worden voor p even de eindintegralen voor $p=2$ gegeven door de integralen (8) en (11), waarbij echter wederom de laatste wegens den factor $(p-2)$ uit de herleidingsformule (III) wegvalt. Voor p oneven vindt men voor $p=5$ als eindintegralen de integralen (5) en (2).

3. Verder kan men de formule (C_4) evenzoo behandelen.

$$(p-2)4k^2\Big\{\sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}p\int\sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,F\,dx\Big\}=-\sin x\,.\,\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta+$$

$$+(p-3)8k^2\Big\{\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{2}(p-2)\int\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.F\,dx\Big\}-(p-4)(1+4k^2)\Big\{\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F-$$

$$-\frac{1}{2}(p-4)\int\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.F\,dx\Big\}+p-5)\Big\{\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{2}(p-6)\int\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.F\,dx\Big\},$$

dat is na behoorlijke herleiding, en wanneer men eerst voor de regelmaat $p+1$ in de plaats van p heeft gesteld,

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{(p^2-1)4k^2}\Big\{ (p-1)(p-2)\,8k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx +$$

$$+ [2\cos x - \{(p-5)+(p-1)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\} \ldots (\text{IV})$$

Hier zijn voor evene p, als men $p=4$ stelt, de integralen (23), (17) en (20) en eindintegralen; waarbij is op te merken, dat de laatste wegens den factor $(p-4)$ in de herleidingsformule (IV) niet voorkomt. Als p oneven is, stelle men om de eindintegralen te vinden $p=5$, dan verdwijnt uit de herleidingsformule, wegens den factor $(p-5)$, de hier vreemde, onbekende integraal $\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F dx$; terwijl er nog overblijven als eindintegralen de gevonden integralen (14) en (7).

De herleidingsformule (C_5) leert evenzoo

$$(p-2)\,4k^2\Big\{\cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}p\int \cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x \,.\, \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} = \sin x \,.\, \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta +$$

$$+ (p-3)\,8k^2\Big\{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-2)\int \cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x \,.\, \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} -$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\Big\{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-4)\int \cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} +$$

$$+(p-5)\Big\{\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-6)\int \cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\}.$$

Wanneer men hierin vooreerst p door $p+1$ vervangt, en daarna behoorlijk herleidt, verkrijgt men de gezochte herleidingsformule,

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{(p^2-1)4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)\,8k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx + (p-4)(p-5)\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx +$$

$$+ [2\cos x + \{(p-5)-(p-1)\cos x\}\Delta^2]\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\} \ldots (\text{V})$$

Zoolang p even is, vindt men hier voor $p=4$ als eindintegralen de integra-

len (24), (18) en (21), waarvan de laatste bij het gebruik der herleidingsvergelijking onnoodig is, omdat de factor $(p-4)$ haar doet verdwijnen; wordt p oneven, dan komen er voor $p=5$ de integralen (15) en (7) als eindintegralen, terwijl de hier vreemde, onbekende integraal $\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F\,dx$, wegens den factor $(p-5)$ niet in rekening komt.

Door middel van de herleidingsformule (C_6) komt er

$$(p-1)\left\{ tang^p \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{2} p \int \frac{tang^{p-1} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx \right\} = \frac{2\, tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x . \cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta -$$

$$-\left[(3p-7)-(p-2)\,4k^2\right]\left\{ tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{2}(p-2) \int \frac{tang^{p-3} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx \right\} -$$

$$-\left[(3p-11)-(p-4)\,4k^2\right]\left\{ tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{2}(p-4) \int \frac{tang^{p-5} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx \right\} -$$

$$-(p-5)\left\{ tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{2}(p-6) \int \frac{tang^{p-7} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx \right\}.$$

Deze geeft nu, na vervanging van p door $p+1$, en verdere herleiding,

$$\int \frac{tang^p \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{p(p+1)} \left\{ -\left[(3p-4)-(p-1)\,4k^2\right](p-1) \int \frac{tang^{p-2} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx - \right.$$

$$-\left[(3p-8)-(p-3)4k^2\right](p-3) \int \frac{tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx - (p-4)(p-5) \int \frac{tang^{p-6} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx -$$

$$\left. -\left[\cos x - (p-2-\cos x)\,\Delta^2\right] \frac{2\, tang^{p-5} \frac{1}{2} x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} F - \frac{4\, tang^{p-3} \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x . \cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta \right\} \ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

Voor p even, worden de integralen (25), (19) en (22) de eindintegralen voor $p=4$, waarbij echter de laatste integraal wegvalt, omdat de factor $(p-4)$ haar doet verdwijnen. Daarentegen vindt men voor p oneven als eindintegralen, voor $p=5$, de integralen (16) en (12), terwijl de hier onbekende integraal $\int \frac{dx}{\sin x} F$, wegens den factor $(p-5)$ niet in aanmerking komt.

4. Vervolgens verkrijgt men door de herleidingsformule (C_7)

$$(p-1)(1-k^2)\left\{ \frac{1}{\cos^p x} F + p \int \frac{\sin x}{\cos^{p+1} x} F\,dx \right\} = \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta + (p-2)(1-2k^2)\left\{ \frac{1}{\cos^{p-2} x} F + \right.$$

$$\left. + (p-2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} F\,dx \right\} + (p-3)k^2 \left\{ \frac{1}{\cos^{p-4} x} F + (p-4) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-3} x} F\,dx \right\}.$$

Vervangt men hierin p door $p-1$, en herleidt men, zoo komt er

$$\int\frac{\sin x}{\cos^p x}F dx=\frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{(p-3)^2(1-2k^2)\int\frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}F dx+(p-4)(p-5)k^2\int\frac{\sin x}{\cos^{p-4} x}F dx-\right.$$
$$\left.-\left[\cos^2 x-\{2+(p-4)\sin^2 x\}\Delta^2\right]\frac{1}{\cos^{p-1} x}F-\frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}\Delta\right\}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{VII})$$

Indien wij eerst p even onderstellen, worden voor $p=4$ de eindintegralen onze integralen (7) en (10); deze eerste echter komt in de formule (VII) niet voor, omdat de factor $(p-4)$ de integraal doet verdwijnen. Neemt men daarentegen p oneven, zoo komen er als eindintegralen voor $p=7$ de integralen (26) en (2).

Eindelijk geeft de herleidingsformule (C_8)

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p \frac{1}{2}x}F+\frac{1}{2}p\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}F dx\right\}=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta+(p-2)(1+4k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(p-2)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F dx\right\}-(p-3)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F+\frac{1}{2}(p-4)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}F dx\right\}+$$
$$+(p-4)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F+\frac{1}{2}(p-6)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}F dx\right\}.$$

Ook in deze moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen en vervolgens de noodige herleidingen doen plaats hebben, om ten slotte te verkrijgen

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}F dx=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{(p-3)^2(1+4k^2)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F dx-\right.$$
$$-(p-4)(p-5)8k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F dx+(p-5)(p-7)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F dx+$$
$$\left.+\left[2\cos x-\{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2\right]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta\right\}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\text{VIII})$$

Neemt men eerst p even aan, dan worden de eindintegralen voor $p=4$ de integralen (24), (18) en (21). Neemt men daarentegen p oneven, dan komen er als eindintegralen voor $p=7$ de integralen (27) en (12), terwijl daarbij wegens den factor $(p-7)$ de onbekende integraal $\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}F dx$ toch van zelve verdwijnt.

5. Uit deze acht algemeene herleidingsformulen, kan men door eenvoudige herleiding, nog een nieuw, oogenschijnlijk eenvoudiger, stel afleiden.

Ten aanzien van de vergelijking (I), neme men den niet herleiden vorm, zoo als men dien uit de herleidingsformule (C_1) dadelijk vond, en stelle daarin overal de goniometrische herleiding

$$sin^l x \,.\, cos\, x = \frac{sin^l x}{cos\, x} cos^2 x = \frac{sin^l x}{cos\, x} (1 - sin^2 x) = \frac{1}{cos\, x} (sin^l x - sin^{l+2} x);$$

zoo komt er

$$(p-1)\, k^2 \left\{ sin^p x \,.\, F - p \int (sin^{p-1} x - sin^{p+1} x) \frac{F}{cos\, x} dx \right\} = cos\, x \,.\, sin^{p-3} x \,.\, \Delta +$$

$$+ (p-2)(1+k^2) \left\{ sin^{p-2} x \,.\, F - (p-2) \int (sin^{p-3} x - sin^{p-1} x) \frac{F}{cos\, x} dx \right\} -$$

$$- (p-3) \left\{ sin^{p-4} x \,.\, F - (p-4) \int (sin^{p-5} - sin^{p-3} x) \frac{F}{cos\, x} dx \right\}.$$

Daar hier de hoogste macht van sinus onder het integraalteeken $sin^{p+1} x$ is, moet men p door $p-1$ vervangen, en dan die integraal oplossen.

$$\int sin^p x \,.\, F \frac{dx}{cos\, x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2} \Big\{ [(p-3)^2 + (2p^2 - 9p + 11) k^2] \int sin^{p-2} x . F \frac{dx}{cos\, x} -$$

$$- [(2p^2 - 15p + 29) + (p-3)^2 k^2] \int sin^{p-4} x \,.\, F \frac{dx}{cos\, x} + (p-4)(p-5) \int sin^{p-6} x \,.\, F \frac{dx}{cos\, x} +$$

$$+ [cos^2 x + \{1 - (p-2) cos^2 x\} \Delta^2]\, sin^{p-5} x \,.\, F + sin^{p-4} x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta \Big\} \quad \ldots . \text{(IX)}$$

Geen der integralen (1) tot (27) kan hier als eindintegralen dienen; daarover zal straks afzonderlijk worden gehandeld.

Op dezelfde wijze kan men den niet herleiden vorm van de herleidingsformule (II) behandelen, aanmerkende dat $sin\, x \,.\, cos^l x = \frac{cos^l x}{sin\, x} sin^2 x = \frac{1}{sin\, x} (cos^l x - cos^{l+2} x)$.

$$(p-1)\, k^2 \left\{ cos^p x \,.\, F + p \int (cos^{p-1} x - cos^{p+1} x) \frac{F}{sin\, x} dx \right\} = sin\, x \,.\, cos^{p-3} x \,.\, \Delta -$$

$$- (p-2)(1 - 2k^2) \left\{ cos^{p-2} x \,.\, F + (p-2) \int (cos^{p-3} x - cos^{p-1} x) \frac{F}{sin\, x} dx \right\} +$$

$$+ (p-3)(1-k^2) \left\{ cos^{p-4} x \,.\, F + (p-4) \int (cos^{p-5} x - cos^{p-3} x) \frac{F}{sin\, x} dx \right\}.$$

Ook hier moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen; dan geeft eene verdere herleiding

$$\int cos^p x . F\frac{dx}{sin\,x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2}\Big\{-[(p-3)^2+(3p^2-15p+20)k^2]\int cos^{p-2}x . F\frac{dx}{sin\,x} -$$

$$-[(2p^2-15p+29)-(3p^2-21p+38)k^2]\int cos^{p-4}x . F\frac{dx}{sin\,x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2)\int cos^{p-6}x . F\frac{dx}{sin x} - [cos^2 x - \{2-(p-2)sin^2 x\}\Delta^2]cos^{p-5}x . F - sin x . cos^{p-4}x . \Delta\Big\} \ldots (X)$$

Nog kan men den niet herleiden vorm van de herleidingsformule (III) op dergelijke wijze behandelen, dewijl hier

$$\frac{tang^l x}{cos^2 x} = tang^l x . (1 + tang^2 x) = tang^l x + tang^{l+2} x$$

is; dit levert hier

$$(p-1)(1-k^2)\Big\{tang^p x . F - p\int(tang^{p-1}x + tang^{p+1}x)\,F dx\Big\} = \frac{tang^{p-2}x}{sin\,x . cos\,x}\Delta -$$

$$-(p-2)(2-k^2)\Big\{tang^{p-2}x . F - (p-2)\int(tang^{p-3}x + tang^{p-1}x)\,F dx\Big\} -$$

$$-(p-3)\Big\{tang^{p-4}x . F - (p-4)\int(tang^{p-5}x + tang^{p-3}x)F dx\Big\}.$$

Wanneer men hier p door $p-1$ vervangt, en verder herleidt, zoo verkrijgt men

$$\int tang^p x . Fdx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\Big\{-[(2p^2-15p+20)-(2p^2-15p+12)k^2]\int tang^{p-2}x . Fdx -$$

$$-[(3p^2-21p+38)-(p-3)^2 k^2]\int tang^{p-4}x . F dx - (p-4)(p-5)\int tang^{p-6}x . F dx -$$

$$-[cos^2 x - (p-2-cos^2 x)\Delta^2]\frac{tang^{p-5}x}{cos^4 x}F - \frac{tang^{p-4}x}{cos^2 x}\Delta\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots (XI)$$

Zoo als wij reeds boven zagen, treden hier als eindintegralen enkele nieuwe onbekende integralen op, waarbij ook de reeds vroeger vermelde voorkomen. Wanneer wij deze hier opnemen, en door grieksche letters aanduiden,

$$\int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha, \quad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta, \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx = \gamma, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx = \delta,$$

$$\text{dus} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} F = \gamma + \delta, \quad \int F\,dx = \varepsilon \;, \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

dan kunnen wij alle eindintegralen uitdrukken.

Bij de herleidingsformule (IX) worden zij voor evene p, dus voor $p = 6$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha \;, \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \int \cos x \,.\, F\,dx = \alpha - \sin x \,.\, F - \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} \;, \ldots \ldots (29)$$

naar de integraal (6);

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \int \cos x \,.\, F\,dx - \int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx.$$

Deze laatste kan voor $p = 2$ uit de herleidingsformule (I) worden gevonden.

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6k^2} \left\{ (1 + k^2) \int \cos x \,.\, F\,dx - [\cos^2 x + (1 - 2\cos^2 x)\Delta^2] \frac{F}{\sin x} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\},$$

dus naar de integraal (6)

$$= \frac{1}{6k^2} \left\{ 2k^2 \sin^3 x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 + k^2) L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\} ; \ldots \ldots (30)$$

derhalve

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \frac{1}{6k^2} \left\{ (3 + \sin^2 x) 2k^2 \sin x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 + 7k^2) L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\} \ldots (31)$$

Daarentegen voor onevene p, voor $p = 5$,

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta, \ldots \ldots \ldots \ldots (32)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx = \gamma \;; \ldots \ldots \ldots \ldots (33)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} F\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \gamma - \frac{1}{2\,k^2}\{E - F \,.\, \Delta^2\}\,, \quad \ldots \quad (34)$$

naar de integraal (1).

Op dergelijke wijze vindt men als eindintegralen bij de herleidingsformule (X), eerst voor evene p, als men $p = 6$ stelt,

$$\int \frac{dx}{\sin x} F = \beta\,, \quad \ldots \quad (35)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} F\,dx = \beta - \int \sin x \,.\, F\,dx = \beta + \cos x \,.\, F - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x)\,, \quad \ldots \quad (36)$$

bij gebruik van de integraal (7);

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\,dx = \beta - \int \sin x \,.\, F\,dx - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F\,dx.$$

Wanneer men eerst de laatste integraal voor $p = 2$ uit de herleidingsformule (II) zoekt, komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\left\{-(1-2k^2)\int \sin x \,.\, F\,dx + [\cos^2 x - 2\cos^3 x \,.\, \Delta^2]\frac{F}{\cos x} + \sin x.\Delta\right\},$$

dus, bij gebruik van de integraal (7),

$$= \frac{1}{6\,k^2}\left\{-2\,k^2 \cos^3 x \,.\, F - \frac{1}{k}(1 - 2\,k^2)\, Bg \sin (k \sin x) + \sin x \,.\, \Delta\right\}; \quad \ldots \quad (37)$$

waardoor de vorige wordt

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\,dx = \beta + \frac{1}{6\,k^2}\,\{(3 + \cos^2 x)\,2\,k^2 \cos x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 - 8\,k^2) Bg \sin(k \sin x) - \sin x \,.\, \Delta\}. \quad . \; (38)$$

Neemt men echter p oneven, dan worden voor $p = 5$ de eindintegralen

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta\,, \quad \ldots \quad (32)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx = \delta\,, \quad \ldots \quad (39)$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} F\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \delta - \frac{1}{2k^2}\{E - F\,.\,\Delta^2\}, \quad \ldots \quad (40)$$

naar de integraal (1).

Ten slotte kan men voor de eindintegralen der herleidingsformule (XI), indien men vooreerst p even stelt, voor $p = 6$ de volgende formulen vinden.

$$\int F\,dx = \varepsilon\,, \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

$$\int tang^2 x . F dx = -\int F\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} F = -\varepsilon + tang\, x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}, \ldots (42)$$

volgens de integraal (8);

$$\int tang^4 x \,.\, F\,dx = +\int F\,dx - \int F \frac{dx}{\cos^2 x} + \int F \frac{tang^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Uit de herleidingsformule (III) zelve kan men deze laatste integraal afleiden, als men $p = 2$ stelt.

$$\int \frac{tang^2 x}{\cos^2 x} F\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} F\,dx = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\} - (2-k^2) \int \frac{dx}{\cos^2 x} F -$$

$$- [\cos^2 x - (2 - \cos^2 x)\Delta^2] \frac{1}{\sin x \,.\, \cos^3 x} F - \frac{1}{\cos^2 x}\Delta + 1 \Big\} =$$

$$= \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ 2(1-k^2) tang^3 x \,.\, F - \frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} - \frac{1}{\cos^2 x}\Delta + 1 \Big\}, \ldots (43)$$

waarbij van de vroeger geworden integraal (8) gebruik gemaakt is. Derhalve volgt nu hier

$$\int tang^4 x \,.\, F\,dx = \varepsilon - \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (3 - tang^2 x)\, 2\,(1-k^2)\, tang\, x \,.\, F +$$

$$+ \frac{8-7k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta - 1 \Big\}. \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Neemt men daarentegen p oneven, zoo worden de eindintegralen voor $p = 5$

$$\int cot\,x\,.\,F\,dx = \delta\ , \qquad (45)$$

$$\int tang\,x\,.\,F\,dx = \gamma\ , \qquad (46)$$

$$\int tang^3 x\,.\,F\,dx = \int (sec^2 x - 1)\,tang\,x\,.\,F\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos^3 x} F\,dx - \int tang\,x\,.\,F\,dx =$$

$$= -\gamma + \frac{1}{2\,(1-k^2)} \left\{ E + (1-k^2)\,tang\,x\,.\,F - tang^2 x\,.\,\Delta \right\}, \qquad (47)$$

naar (2).

Uit de hier gebruikte integralen (30), (37), (43) kan men nog gereedelijk de volgende afleiden met behulp der integralen (6), (7), (8).

$$\int cos^3 x\,.\,F\,dx = \int cos\,x\,.\,F\,dx - \int sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6\,k^2} \left\{ (3 - sin^2 x)\,2\,k^2\,sin\,x\,.\,F - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k}(1 - 5\,k^2)\,L\frac{k\,cos\,x + \Delta}{1 + k} + cos\,x\,.\,\Delta - 1 \right\}, \qquad (48)$$

$$\int sin^3 x\,.\,F\,dx = \int sin\,x\,.\,F\,dx - \int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6\,k^2} \left\{ -(3 - cos^2 x)\,2\,k^2\,cos\,x\,.\,F + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}(1 + 4\,k^2)\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - sin\,x\,.\,\Delta \right\}, \qquad (49)$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x} F = \int \frac{dx}{cos^2 x} F + \int \frac{tang^2 x}{cos^2 x} F\,dx = \frac{1}{6\,(1-k^2)} \left\{ (3 + tang^2 x)\,(1-k^2)\,2\,tang\,x\,.\,F + \right.$$

$$\left. + \frac{4 - 5\,k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1 + \sqrt{1-k^2})\,cos\,x}{\sqrt{1+k^2} + \Delta} - \frac{1}{cos^2 x}\Delta + 1 \right\}. \qquad (50)$$

5. Keeren wij terug tot de herleidingsformulen, en wel tot (IV) in den nog niet herleiden vorm, en stelt men daarin

$$sin^l \tfrac{1}{2} x\,.\,cos\,\tfrac{1}{2} x = \frac{sin^l \frac{1}{2} x\,.\,cos^2 \frac{1}{2} x}{cos\,\frac{1}{2} x} = \frac{1}{cos\,\frac{1}{2} x} sin^l \tfrac{1}{2} x\,.\,(1 - sin^2 \tfrac{1}{2} x) = \frac{sin^l \frac{1}{2} x - sin^{l+2} \frac{1}{2} x}{cos\,\frac{1}{2} x},$$

zoo komt er

$$(p-2)\,4k^2\left\{\sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}p\int\left(\sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x-\sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\cos\frac{1}{2}x}dx\right\}=-\sin x\,.\,\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta+$$

$$+(p-3)\,8k^2\left\{\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}(p-2)\int\left(\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x-\sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\cos\frac{1}{2}x}dx\right\}-$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\left\{\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}(p-4)\int\left(\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x-\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\cos\frac{1}{2}x}dx\right\}+$$

$$+(p-5)\left\{\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}(p-6)\int\left(\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x-\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\cos\frac{1}{2}x}dx\right\};$$

en deze levert, nadat men eerst p door $p-1$ heeft vervangen,

$$\int\sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}=\frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2}\left\{(p-3)^2\,12k^2\int\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}-\right.$$

$$-\left[(p-5)^2+(3p^2-24p+49)k^2\right]\int\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}+$$

$$+\left[(2p^2-23p+67)+(p-5)^2 4k^2\right]\int\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}-(p-6)(p-7)\int\sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}-$$

$$\left.-\left[2\cos x-\left\{(p-7)+(p-3)\cos x\right\}\Delta^2\right]\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,F-2\sin x\,.\,\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\right\}\;..\;\text{(XII)}$$

Evenzoo kan men in de niet herleide formule (V) de volgende goniometrische vervorming

$$\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^l\tfrac{1}{2}x=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}(1-\cos^2\tfrac{1}{2}x)\cos^l\tfrac{1}{2}x=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}(\cos^l\tfrac{1}{2}x-\cos^{l+2}\tfrac{1}{2}x)$$

invoeren en verkrijgt alzoo

$$(p-2)\,4k^2\left\{\cos^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F+\frac{1}{2}p\int\left(\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x-\cos^{p+1}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\sin\frac{1}{2}x}dx\right\}=\sin x\,.\,\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta+$$

$$+(p-3)\,8k^2\left\{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,F+\frac{1}{2}(p-2)\int\left(\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x-\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\sin\frac{1}{2}x}dx\right\}-$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\left\{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F+\frac{1}{2}(p-4)\int\left(\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x-\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\sin\frac{1}{2}x}dx+\right.$$

$$+(p-5)\left\{\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F+\frac{1}{2}(p-6)\int\left(\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x-\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{F}{\sin\frac{1}{2}x}dx\right\}.$$

In deze formule verandere men eerst p in $p-1$, dan geeft eene verdere herleiding

$$\int cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F\frac{dx}{sin\tfrac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)4k^2}\Big\{(p-3)^2 12k^2 \int cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,F\frac{dx}{sin\tfrac{1}{2}x} -$$

$$-[(p-5)^2 - (3p^2 - 24p + 49)4k^2]\int cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,F\frac{dx}{sin\tfrac{1}{2}x} +$$

$$+[(2p^2-23p+67)+(p-5)^2 4k^2]\int cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{sin\tfrac{1}{2}x} - (p-6)(p-7)\int cos^{p-8}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{sin\tfrac{1}{2}x} +$$

$$+[2\cos x - \{(p-7)-(p-3)\cos x\}\Delta^2]\, cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,F - 2\sin x\,.\,cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\Big\} \;..\; \text{(XIII)}$$

Eindelijk kan men ook de herleidingsformule (VI) veranderen; daartoe stelle men in den niet herleiden vorm

$$\frac{tang^l \tfrac{1}{2}x}{cos^2\tfrac{1}{2}x} = tang^l\tfrac{1}{2}x\,.\,(1 + tang^2\tfrac{1}{2}x) = tang^l\tfrac{1}{2}x + tang^{l+2}\tfrac{1}{2}x,$$

waardoor er komt

$$(p-1)\Big\{tang^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \frac{1}{2}p\int(tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x + tg^{p+1}\tfrac{1}{2}x)\,F\,dx\Big\} = \frac{2\,tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta -$$

$$-[(3p-7)-(p-2)4k^2]\Big\{tang^{p-2}x.F - \frac{1}{2}(p-2)\int(tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x + tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x)\,F\,dx\Big\} -$$

$$-[(3p-11)-(p-4)4k^2]\Big\{tg^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F - \frac{1}{2}(p-4)\int(tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x + tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x)F\,dx\Big\} -$$

$$-(p-5)\Big\{tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \frac{1}{2}(p-6)\int(tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x + tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x)\,F\,dx\Big\}.$$

Om hieruit tot eene herleidingsformule te geraken, moet men eerst p door $p-1$ vervangen; dan geeft de verdere herleiding

$$\int tang^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{-[(2p^2-11p+16)-(p-3)^2 2k^2]\,2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\,F dx -$$

$$-[(3p^2-24p+50)-(p^2-8p+17)4k^2]\,2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,F\,dx -$$

$$-[(2p^2-21p+56)-(p-5)^2 2k^2]\,2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\,dx - (p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x.F dx +$$

$$+[-\cos x + (p-4-\cos x)\Delta^2]\,2\frac{tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x}{cos^6\tfrac{1}{2}x} - 4\frac{tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta\Big\} \;......\; \text{(XIV)}$$

Ook hier treden nieuwe integralen als eindintegralen op. Neem daartoe

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta, \quad \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} F = \eta, \quad \int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \beta - \delta, \quad \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F dx = \beta + \delta,$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x . \cos\frac{1}{2}x} F = 2\beta \; , \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

dan kan men, met de herleidingsformule (XII) beginnende, en daarin vooreerst p even nemende, $p = 8$ stellen, zoodat er als eindintegralen voorkomen

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta \; , \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

$$\int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F - \int \cos\tfrac{1}{2}x . F dx = \zeta - 2\sin\tfrac{1}{2}x . F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,y) \; , \ldots \quad (52)$$

met behulp van de integraal (17);

$$\int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx - \int \sin^2\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x . F dx = \zeta - \frac{1}{3}(7 - \cos x)\sin\tfrac{1}{2}x . F -$$

$$- \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \left\{ 2E(l,y) - (1 - 8k) F(l,y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1 + k + k\cos x} \Delta \right\} \; , \ldots\ldots \quad (53)$$

wanneer men daarbij de integraal (23) gebruikt; vervolgens

$$\int \frac{\sin^6\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx - \int \sin^4\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x . F dx.$$

Deze laatste integraal nu kan men door middel van de herleidingsformule (IV) voor $p = 4$ rechtstreeks afleiden

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{60k^2} \left\{ 48k^2 \int \sin^2\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x . F dx - (1 + 4k^2) \int \cos\tfrac{1}{2}x . F dx + \right.$$

$$\left. + [2\cos x - (-1 + 3\cos x)\Delta^2] \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} + \frac{2\sin x}{\sin\frac{1}{2}x} \Delta - 4 \right\},$$

dat is door gebruik te maken van de integralen (23) en (17),

$$= \frac{1}{30k^2} \left\{ 12k^2 \sin^5\tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{\sqrt{2k}} [16kE(l,y) - (1 + 8k - 12k^2) F(l,y)] - \right.$$

$$\left. - 16k \frac{\cos\frac{1}{2}x}{1 + k + k\cos x} \Delta + 2\cos\tfrac{1}{2}x . \Delta - 2 \right\} \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

en hiermede wordt dan

$$\int \frac{\sin^6 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \zeta - \frac{1}{30 k^2} \Big\{ (73 - 16 \cos x + 3 \cos^2 x) k^2 \sin \tfrac{1}{2} x . F +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2k}} [36 k E(l,y) - (1 + 18k - 92 k^2) F(l,y)] - 36 k \frac{\cos \frac{1}{2} x}{1 + k + k \cos x} \Delta + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta - 2 \Big\} \quad (55)$$

Bij onevene p daarentegen kan men $p = 7$ stellen, en verkrijgt dan de eindintegralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} F = 2 \beta \,, \quad (56)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \beta - \delta \,, \quad (57)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta + \frac{1}{2} \cos x . F - \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) \,, \quad (58)$$

na toepassing van de integraal (7);

$$\int \frac{\sin^5 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta -$$

$$- \frac{1}{8 k^2} \{ [1 - (1 + 6 \cos x - \cos^2 x) k^2] F - E + 6 k Bg \sin (k \sin x) \} \,, \quad (59)$$

volgens de integraal (14).

Evenzoo bij de herleidingsformule (XIV) neme men vooreerst $p = 8$, om de eindintegralen voor evene p te vinden; deze zijn

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F = \eta \,, \quad (60)$$

$$\int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F - \int \sin \tfrac{1}{2} x . F dx = \eta + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,z) \,, \quad (61)$$

na invoering der integraal (18); en evenzoo door middel van de integraal (24)

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx - \int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . \sin \tfrac{1}{2} x . F dx = \eta + \frac{1}{3} (7 + \cos x) \cos \tfrac{1}{2} x . F -$$

$$- \frac{1}{3 k \sqrt{2k}} \Big\{ 2 E(l,z) - (1 - 8k) F(l,z) + \frac{2 \sin \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1 + k - k \cos x} \Delta \Big\} \,, \quad (62)$$

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx - \int \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx.$$

Vooreerst berekene men deze laatste integraal uit de herleidingsformule (V) voor $p = 4$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \frac{1}{60\,k^2} \Big\{ 48\,k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx - (1 + 4\,k^2) \int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx +$$

$$+ \left[2 \cos x + (-1 - 3 \cos x)\,\Delta^2 \right] \frac{F}{\cos \frac{1}{2} x} + \frac{2 \sin x}{\cos \frac{1}{2} x} \Delta \Big\},$$

of wanneer men hierin de waarde der integralen (24) en (18) overbrengt,

$$= \frac{1}{30\,k^2} \Big\{ -12\,k^2 \cos^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \left[16\,k\,E(l,z) - (1 + 8\,k - 12 k^2)\,F(l,z) \right] -$$

$$- 16\,k \frac{\sin \frac{1}{2} x}{1 + k - k \cos x} \Delta + 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \Big\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

Men kan dus thans de waarde der vorige bepalen

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \eta + \frac{1}{30\,k^2} \Big\{ (73 + 16 \cos x + 3 \cos^2 x)\,k^2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \left[36\,k\,E(l,z) - \right.$$

$$\left. - (1 + 18\,k - 92\,k^2)\,F(l,z) \right] - 36\,k \frac{\sin \frac{1}{2} x}{1 + k + k \cos x} \Delta - 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \Big\} \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

Vervolgens neme men $p = 7$ voor de eindintegralen, in het geval van p oneven,

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos \frac{1}{2} x} F = 2\,\beta \,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \beta + \delta \,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

$$\int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta + \delta + \frac{1}{2} \cos x . F - \frac{1}{2k} Bg \sin(k \sin x), \quad \ldots \quad (66)$$

met gebruik van de integraal (7). Deze en de integraal (15) invoerende, heeft men verder

*

$$\int \frac{\cos^5 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx - \int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \beta + \delta +$$

$$+ \frac{1}{8 k^2} \{[1 - (1 - 6 \cos x - \cos^2 x) k^2] F - E - 6 k Bg \sin (k \sin x)\}, \ldots\ldots \quad (67)$$

naar de integraal (15).

Bij de herleidingsformule (XIV) zal men voor evene p bij de onderstelling $p = 8$ de eindintegralen verkrijgen

$$\int F dx = \epsilon \,, \ldots\ldots \quad (41)$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int F dx + \int F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = -\epsilon + 2 tang \tfrac{1}{2} x . F - 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} \,, \ldots \quad (68)$$

wanneer men de integraal (19) invoert. En daarop, de integraal (25) gebruikende,

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int tang^2 \tfrac{1}{2} x . F dx + \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} F dx = \epsilon + \frac{2}{3} \Big\{ -(1 + 2 \cos x) \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F +$$

$$+ (2 - k^2) 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta + 1 \Big\} \ldots\ldots \quad (69)$$

Verder is nog

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int tang^4 \tfrac{1}{2} x . F dx + \int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx.$$

Deze laatste integraal bepale men uit de algemeene herleidingsformule (VI) voor $p = 4$, en gebruike later de integralen (25) en (19);

$$\int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{20} \Big\{ -(8 - 12 k^2) 3 \int \frac{tang^2 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx - (4 - 4 k^2) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F +$$

$$- [\cos x - (2 - \cos x) \Delta^2] \frac{2}{\cos^5 \frac{1}{2} x . \sin \frac{1}{2} x} F - \frac{4}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta + 4 \Big\};$$

na herleiding, invoering der integralen, en herleiding komt er dan

$$\int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{cos^2 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{5} \Big\{ 2\, tang^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - 2\,(1 - 6k^2 + 6k^4)\, L \frac{(\Delta - cos\, x)\,(1 + \Delta)}{2\, sin^2 x} +$$

$$+ \left[(1 - 3k^2) + (2 - 3k^2)\, cos\, x\right] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2} x} - 3\,(1 - 2k^2) \Big\}, \dots \dots \dots (70)$$

en daarmede wordt de vorige

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\varepsilon + \frac{1}{15} \Big\{ (13 + 24 cos x + 23 cos^2 x) \frac{sin \frac{1}{2} x}{2 cos^5 \frac{1}{2} x} F - (23 - 28k^2 + 18k^4) 2 L \frac{(\Delta - cos x)(1 + \Delta)}{2\, sin^2 x} +$$

$$+ \left[(8 - 9k^2) + (11 - 9k^2)\, cos\, x\right] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2} x} - (19 - 18k^2) \Big\} \dots \dots \dots (71)$$

Terwijl voor onevene p de onderstelling $p = 7$ als eindintegralen levert

$$\int cot \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \beta + \delta, \dots \dots \dots (65)$$

$$\int tang \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \beta - \delta, \dots \dots \dots (57)$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int \frac{sin \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x} F dx + \int sin \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \delta - \beta + \frac{1}{2} cos x . F + \frac{1}{2k} Bg sin (k sin x), \dots (72)$$

als men daarbij de integraal (7) gebruikt; deze en de integraal (16) geven verder

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F dx + \int \frac{sin^3 \frac{1}{2} x}{cos^5 \frac{1}{2} x} F dx = \beta - \delta + \frac{1}{6} \Big\{ (5 - 8k^2 - 3 cos x + 3 tg^4 \tfrac{1}{2} x) F -$$

$$- (1 - 2k^2)\, 8 E - \frac{3}{k} Bg\, sin\, (k\, sin\, x) + \left[(1 - 4k^2) + (1 - 2k^2) 2\, cos\, x\right] \frac{2\, tang \frac{1}{2} x}{cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\} \dots (73)$$

7. Ten slotte kan men nog eene dergelijke herleiding als vroeger aan de algemeene formulen (VII) en (VIII) doen ondergaan.

Vooreerst voere men in de niet-herleide vergelijking (VII) de identiteit in

$$\frac{sin\, x}{cos^l x} = \frac{sin^2 x}{sin\, x \,.\, cos^l x} = \frac{1 - cos^2 x}{sin\, x \,.\, cos^l x} = \frac{1}{sin\, x \,.\, cos^l x} - \frac{1}{sin\, x \,.\, cos^{l-2} x},$$

zoo verkrijgt men

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{1}{\cos^p x}F-p\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\,\cos^{p+1}x}F-\int\frac{dx}{\sin x\,.\,\cos^{p-1}x}F\right)\right\}=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta+(p-2)(1-2k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}x}F-(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-1}x}F-\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-3}x}F\right)\right\}+$$

$$+(p-3)k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}x}F-(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\,\cos^{p-3}x}F-\int\frac{dx}{\sin x\,.\,\cos^{p-5}x}F\right)\right\}.$$

Bij deze uitkomst moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen, en erlangt dan ten slotte

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos^p x}F=\frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{-[(2p^2-9p+11)-(3p^2-15p+20)k^2]\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-2}x}F-\right.$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-21p+38)k^2]\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-4}x}F-(p-4)(p-5)k^2\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-6}x}F-$$

$$\left.-[\cos^2 x+\{2+(p-4)\sin^2 x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}x}F-\frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (XV)$$

De eindintegralen, die bij deze herleidingsformule behooren, zijn reeds vroeger gevonden. Deze zijn bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (32), (39) en (40); bij evene p, voor $p=4$, de integralen (35), (36) en (38); benevens de volgende

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos^2 x}F=\int\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)F\,dx=\beta+\frac{1}{\cos x}F-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}\sin x+\Delta}{\cos x}\ldots\ (74)$$

Verder gebruike men de identieke herleiding

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^l\frac{1}{2}x}-\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{l-2}\frac{1}{2}x}$$

bij de herleidingsformule (VIII), immers voor dat deze tot haar eindvorm was teruggebracht, dan komt er

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}p\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta+$$

$$+(p-2)(1+4k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}-$$

$$-(p-3)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}+$$

$$+(p-4)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-6)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos^{p-7}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}.$$

Ook hier moet men weder p door $p-1$ vervangen, en men zal vinden

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^p\frac{1}{2}x}F=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)^2 4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-24p+49)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F+(p-5)^2 12k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-(p-5)(p-7)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}F+[2\cos x+\{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XVI)}$$

De eindintegralen, behoorende bij deze herleidingsformulen, zijn evenzeer reeds vroeger gevonden. Zij worden, als p even is, voor $p=3$, gegeven door de integralen (56), (65), (66) en (67); en bijaldien p oneven is, voor $p=4$, door de integralen (60), (61), (62) en (64), waarbij nog behoort

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^2\frac{1}{2}x}F=\int\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}\right)F\,dx=\eta+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}x}F-\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z)-$$

$$+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\}-\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}\ldots\ldots\ldots (75)$$

8. Voordat wij verder gaan, willen wij eerst de gebezigde nieuwe transcendenten iets nader beschouwen. Men kan op alle de methode van het gedeeltelijk integreeren toepassen, en daarna nog somtijds die van het ontwikkelen van een of anderen factor onder het integraal teeken in eene reeks.

$$\alpha=\int\frac{dx}{\cos x}F=\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\,tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)=F.L\,tg(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)-\int L\,tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=F.L\,tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)-2\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\int\sin(2n+1)x\frac{dx}{\Delta},\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$\beta=\int\frac{dx}{\sin x}F=\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\,tang\,\tfrac{1}{2}x=F.L\,tang\,\tfrac{1}{2}x-\int L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=F.L\,tang\,\tfrac{1}{2}x+2\sum_0^\infty\frac{1}{2n+1}\int\cos(2n+1)x\frac{dx}{\Delta},\ldots\ldots\ldots (35)$$

$$\gamma=\int\frac{\sin x}{\cos x}F\,dx=-\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\cos x=-F.L\cos x+\int L\cos x\frac{dx}{\Delta}=-F.L\cos x-$$

$$-\int\frac{dx}{\Delta}\Big\{L2+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\cos 2nx}{n}\Big\}=-F.L2\cos x-\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\int\cos 2nx\frac{dx}{\Delta},\ldots (33)$$

$$\delta=\int\frac{\cos x}{\sin x}F dx=\int F dx\frac{d}{dx}.L\sin x=F.L\sin x-\int L\sin x\frac{dx}{\Delta}=F.L\sin x+\int\frac{dx}{\Delta}\left\{L2+\sum_1^\infty\frac{\cos 2nx}{n}\right\}=$$

$$=F.L\,2\sin x+\sum_1^\infty\frac{1}{n}\int\cos 2nx\frac{dx}{\Delta},\qquad(39)$$

$$\varepsilon=\int F dx=x.F-\int\frac{x\,dx}{\Delta},\qquad(41)$$

$$\zeta=\int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}F=2\int F dx\frac{d}{dx}.L\,tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)=2F.L\,tang\tfrac{1}{2}(\pi+x)-2\int L\,tang\tfrac{1}{2}(\pi+x)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=2F.L\,tang\tfrac{1}{2}(\pi+x)-4\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\int\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta},\qquad(51)$$

$$\eta=\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}F=2\int F dx\frac{d}{dx}.L\,tang\tfrac{1}{2}x=2F.L\,tang\tfrac{1}{2}x-2\int L\,tang\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=2F.L\,tang\tfrac{1}{2}x+4\sum_0^\infty\frac{1}{2n+1}\int\cos(2n+1)\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}.\qquad(60)$$

Uit deze uitkomsten blijkt echter duidelijk, dat men hier werkelijk met nieuwe afzonderlijke transcendenten te doen heeft.

9. Beproeven wij nu, wat er te vinden zij omtrent die integralen, waarbij nog eene macht van Δ als factor voorkomt, hetzij eene onevene, zoodat de integraal eene irrationeele wordt, hetzij eene evene, wanneer zij derhalve rationeel blijft. Men vindt, altijd weder door de methode van gedeeltelijk integreeren,

$$\int\varphi(x)\frac{dx}{\Delta^{n-1}}=\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}F-\int F dx\left\{\frac{1}{\Delta^{n-2}}\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)\frac{n-2}{2}\frac{2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^n}\right\}=$$

$$=\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}F-\int\frac{F\,dx}{\Delta^n}\left\{\Delta^2\frac{d\varphi(x)}{dx}+(n-2)k^2\sin x.\cos x.\varphi(x)\right\}.\qquad(b)$$

Alles hangt nu af van den vorm, dien de factor tusschen { } onder het laatste integraalteeken verkrijgen zal, en deze hangt wederom te zamen met den vorm van de $\varphi(x)$ zelve.

Stellen wij dus vooreerst $\varphi(x)=\sin^{p+1}x$, dan wordt die herleidingsformule (*b*)

$$\int\sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^{n-1}}=\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int F\frac{dx}{\Delta^n}\{\Delta^2(p+1)\sin^p x.\cos x+(n-2)k^2\sin^{p+2}x.\cos x\}=$$

$$=\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int F\frac{dx}{\Delta^n}\sin^p x.\cos x\{(p+1)+(n-p-3)k^2\sin^2 x\},\qquad(G_1).$$

$$=\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int F\frac{dx}{\Delta^n}\sin^p x.\cos x.\{(n-2)-(n-p-3)\Delta^2\}, \quad . . . \quad (G_2)$$

waarbij in de eerste (G_1) de exponent n standvastig blijft, en de p verandert, terwijl daarentegen in de andere (G_2) de exponent p standvastig blijft, maar de n verandert. Beide vergelijkingen worden zeer vereenvoudigd door de onderstelling $p=n-3$, en leveren ons dan, na oplossing der eenige in het tweede lid overgebleven integraal,

$$(n-2)\int \sin^{n-3}x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^n}=\frac{\sin^{n-2}x}{\Delta^{n-2}}F-\int \sin^{n-2}x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} \quad . . . . . \quad (G_3)$$

Maar ook in het algemeen kan men de vergelijkingen (G_2) en (G_1) oplossen, waarbij in deze laatste eerst p door $p-2$ moet vervangen worden.

$$\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^n}=\frac{1}{n-2}\left\{\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int \sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^{n-1}}+(n-p-3)\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^{n-2}}\right\}, . . (G_4)$$

$$=\frac{1}{(n-p-1)k^2}\left\{\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int \sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^{n-1}}-(p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^n}\right\} . . (XVII)$$

Nu kan men den zamenhang tusschen onze integralen beter overzien. Vooreerst stelle men in de bijzondere vergelijking (G_3) $n=3$, $=1$ en $=-1$, dan komt er achtereenvolgens

$$\int \cos x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{\sin x}{\Delta}F-\int \sin x\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{\sin x}{\Delta}F+\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}}\left(Bg\,tg\frac{k\cos x}{\sqrt{1-k^2}}-Bg\,tg\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right)=$$

$$=\frac{\sin x}{\Delta}F-\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}}Bg\cos\frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta}, \quad . . . . \quad (76)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}F\frac{dx}{\Delta}=-\frac{\Delta}{\sin x}F+\int \frac{dx}{\sin x}=-\frac{\Delta}{\sin x}F+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x, \quad . . . . \quad (77)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\Delta.F dx=\frac{1}{3}\left\{-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}F+\int \frac{dx}{\sin^3 x}\Delta^2\right\}=\frac{1}{3}\left(-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}F+\int \frac{dx}{\sin^3 x}-k^2\int \frac{dx}{\sin x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}F-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}(1-2k^2)L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\right\}. \quad . . . . \quad (78)$$

Deze integralen zijn alleen te gebruiken bij de herleidingsformulen (G_4) in het geval, dat p even is; maar voor onevene waarden van p geeft de vergelijking

Digitized by Google

(G_3) niets, wegens den factor $n-2=p-1$, enz. In zulk geval moet men iedere integraal rechtstreeks behandelen.

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\int F\,dx\frac{d}{dx}\,.\,\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta}-\int\frac{1}{\Delta}\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta}-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,Bg\,tang\,(tang\,x\,.\sqrt{1-k^2})\right\},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k^2}\int F\,dx\frac{d}{dx}.\Delta=-\frac{1}{k^2}\left\{\Delta\,.\,F-\int\Delta\frac{dx}{\Delta}\right\}=\frac{1}{k^2}\{x-\Delta\,.\,F\}\ldots(80)$$

Nu geeft vooreerst de vergelijking (G_4), voor $n=3$ en $n=1$,

$$\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^3}=sin^{p+1}\,x\frac{F}{\Delta}-\int sin^{p+1}\,x\frac{dx}{\Delta^2}-p\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta},\ \ldots\ldots \quad (G_5)$$

$$\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}=-sin^{p+1}x\,.\,\Delta\,.\,F+\int sin^{p+1}x\,dx+(p+2)\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx\,;\ldots(G_6)$$

en vervolgens geeft wederom de laatste vergelijking, waarnaar men daarin $p=1$ stelt en verder gebruik maakt van de gevonden integraal (80),

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx=\frac{1}{3}\left\{sin^2\,x\,.\,\Delta\,.\,F-\int sin^2\,x\,dx+\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{6\,k^2}\{(2-k^2)\,x+k^2\,sin\,x\,.\,cos\,x-2\,\Delta^3\,.\,F\}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

En thans kan men ook in de herleidingsformule (XVII) n achtereenvolgens door 3, 1 en -1 vervangen, waardoor eindelijk het drietal vergelijkingen ontstaat.

$$\int sin^px.cosx.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-\frac{sin^{p-1}x}{\Delta}F+\int sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^2}+(p-1)\int sin^{p-2}x.cosx.F\frac{dx}{\Delta^3}\right\},\ldots(XVIII)$$

$$\int sin^px.cosx.F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{pk^2}\left\{-sin^{p-1}x.\Delta.F+\int sin^{p-1}x\,dx+(p-1)\int sin^{p-2}x.cosx.F\frac{dx}{\Delta}\right\},\ldots(XIX)$$

$$\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx=\frac{1}{(p+2)\,k^2}\left\{-sin^{p-1}\,x\,.\,\Delta^3\,.\,F+\int sin^{p-1}\,x\,.\,\Delta^2\,dx\,+\right.$$

$$\left.+\,(p-1)\int sin^{p-2}\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx\right\}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (XX)$$

In het geval van onevene waarden van p vindt men voor de eindintegralen, als men $p = 3$ stelt, de integralen (79), (80) en (81). Indien daarentegen p evene waarden heeft, laten deze herleidingsformulen de integralen (76), (77) en (78) niet als eindintegralen toe, omdat respectieve voor $p = 2, = 0, = -2$, de noemers van de tweede leden verdwijnen, en de vergelijkingen derhalve onbruikbaar worden. Men moet daarom trachten, die drie eindintegralen rechtstreeks te bepalen.

$$\int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int (1 - \Delta^2) cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \int cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} - \int cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta} \right\},$$

$$\int \frac{cos\, x}{sin^2 x} \Delta \,.\, F\, dx = \int \frac{1 - k^2 sin^2 x}{sin^2 x} \frac{cos\, x}{\Delta} F\, dx = \int \frac{cos\, x}{sin^2 x} F \frac{dx}{\Delta} - k^2 \int cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}.$$

Beide integralen worden dus tot de derde $\int cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}$ herleid, die voor $p = 0$ uit (XIX) ontstaat. Wel is waar kan men deze, door de methode van gedeeltelijk integreeren, nog verder transformeeren; maar men blijft toch op eene eigene transcendente stuiten.

$$\int cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{\Delta} F \frac{d}{dx} . (k \sin x) = \frac{1}{k} \int F\, dx \frac{d}{dx} . Bg \sin (k \sin x) =$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ F \,.\, Bg \sin (k \sin x) - \int Bg \sin (k \sin x) \frac{dx}{\Delta} \right\} = \theta; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

en hiermede wordt nu, met behulp trouwens van de integralen (76) en (77),

$$\int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\theta + \frac{\sin x}{\Delta} F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} Bg \cos \frac{1 - k^2(1 - \cos x)}{\Delta} \right\}, \ldots \quad (83)$$

$$\int \frac{cos\, x}{sin^2 x} \Delta \,.\, F\, dx = -k^2 \theta - \frac{\Delta}{\sin x} F + L\, tang\, \tfrac{1}{2} x. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

Tot dusverre hadden wij slechts met irrationeele integralen te doen, waarbij Δ^{-3}, Δ^{-1}, Δ^{+1} in den teller voorkwamen. Zoodra men daarentegen evene machten van de Δ invoert, vervallen hier de positieve exponenten, omdat men dan alleen met geheele vormen te doen heeft, zoo als in de theoremata (I) tot (XVI) werden behandeld. Wat de positieve waarden van n en dus de negatieve machten in dat geval betreft, nemen wij $n = 2$ en $n = 4$.

*

Voor $n=2$ geven de vergelijkingen (G_3) en (G_4) niets; dan heeft men echter

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=-\frac{1}{2\,k^2}\int F\frac{dx}{\Delta^2}\,\frac{d}{dx}.\Delta^2=\frac{1}{2\,k^2}\left\{-F.\,L\,\Delta^2+\int L\,\Delta^2\frac{dx}{\Delta}\right\}=\iota\,,\,..\,(85)$$

$$\int cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{2\,k}\int F\frac{2\,dx}{1-k^2\,sin^2x}\,\frac{d}{dx}.(k\,sinx)=\frac{1}{2k}\left\{F.\,L\frac{1+ksinx}{1-ksinx}-\int L\frac{1+ksinx}{1-ksinx}\,\frac{dx}{\Delta}\right\}=\varkappa\,..\,(86)$$

Zoo als men echter gereedelijk ziet, zijn beide vreemde, onbekende integralen, en vormen zij trouwens een paar nieuwe transcendenten. Maar nu wordt dan ook de algemeene herleidingsformule (XVII) voor $n=2$

$$\int sin^px.cosx.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-sin^{p-1}x.F+\int sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta}+(p-1)\int sin^{p-2}x.cos\,x.F\frac{dx}{\Delta^2}\right\},..(XXI)$$

waarbij nu de transcendenten (85) en (86) als eindintegralen behooren.

Ten einde den weg te bereiden voor het tweede geval van $n=4$, stelle men vooreerst $n=4$ in (G_3), dan komt er

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^2x}{\Delta^2}F-\int sin^2x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}=\frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2}F-E+\frac{k^2}{\Delta}sinx.cosx\right\}..\,(87)$$

Vervolgens neme men ook $n=4$ in (G_4), dan is

$$\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^2}F-\int sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^3}-(p-1)\int sin^p\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.\;.\,(G_7)$$

Ten einde hierin met goeden uitslag $p=2$ te kunnen stellen, is men verplicht deze onderstelling eerst in de herleidingsformule (XXI) in te voeren, waardoor er komt, later met behulp der integralen (86) en (γ_8),

$$\int sin^2\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-sin\,x\,.\,F+\int sin\,x\frac{dx}{\Delta}+\int cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left\{\varkappa-sin\,x\,.\,F-\frac{1}{k}\,L\,\frac{\Delta+k\,cos\,x}{1+k}\right\};\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(88)$$

en hiermede leidt men uit de herleidingsformule (G_7) voor $p=2$ af

$$\int sin^2x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^3x}{\Delta^2}F-\int sin^3x\frac{dx}{\Delta^3}-\int sin^2x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\,k^2}\left\{-\varkappa+\frac{sin\,x}{\Delta^2}F+\frac{cos\,x-\Delta}{(1-k^2)\,\Delta}\right\}.\,(89)$$

Evenzoo stelle men in de herleidingsformule (XXI) $p=3$, dan is

$$\int sin^3 x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ - sin^2 x \,.\, F + \int sin^2 x \frac{dx}{\Delta} + 2 \int sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left\{ - sin^2 x \,.\, F + \frac{1}{k^2}(F - E) + 2\iota \right\} = \frac{1}{2k^4} \left\{ \Delta^2 . F - E + 2k^2 \iota \right\} \dots . (90)$$

En nu kan men in de vergelijking (G_7) $p=3$ stellen, en verkrijgt dan

$$\int sin^3 x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{sin^4 x}{\Delta^2} F - \int sin^4 x \frac{dx}{\Delta^3} - 2 \int sin^3 x \,.\, cos\, x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ \frac{1}{\Delta^2} F - \frac{1}{1-k^2} E + \frac{k^2 sin\, x \,.\, cos\, x}{(1-k^2)\Delta} - 2k^2 \iota \right\} \dots\dots\dots\dots . (91)$$

Thans kan men eindelijk $n=4$ stellen in de algemeene herleidingsformule (XVII) zoodat

$$\int sin^p x . cos x . F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ -\frac{sin^{p-1} x}{\Delta^2} F + \int sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^3} + (p-1) \int sin^{p-2} x . cos x . F \frac{dx}{\Delta^4} \right\} ,.. \text{(XXII)}$$

die de integralen (87), (89) en (91) tot eindintegralen heeft.

Bij de vorige bewerkingen had men de volgende integralen noodig.

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ E - \frac{k^2 sin\, x \,.\, cos\, x}{\Delta} \right\} , \dots\dots\dots\dots (\eta_1)$$

$$\int sin\, x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\Delta - cos\, x}{(1-k^2)\Delta} , \dots\dots\dots\dots (\eta_2)$$

$$\int sin^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int (1-\Delta^2) \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left[\int \frac{dx}{\Delta^3} - \int \frac{dx}{\Delta} \right] = \frac{1}{k^2(1-k^2)} \left\{ E - (1-k^2)F - \frac{k^2 sin x . cos x}{\Delta} \right\} , \dots (\eta_3)$$

$$\int sin^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int sin x \frac{dx}{\Delta^3}(1-\Delta^2) = \frac{1}{k^2} \left[\int sin x \frac{dx}{\Delta^3} - \int sin x \frac{dx}{\Delta} \right] = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\Delta - cos\, x}{(1-k^2)\Delta} + \frac{1}{k} L \frac{\Delta + k cos x}{1+k} \right\} , .. (\eta_4)$$

$$\int sin^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4} \int \frac{1-2\Delta^2+\Delta^4}{\Delta^3} dx = \frac{1}{k^4} \left\{ \int \frac{dx}{\Delta^3} - 2 \int \frac{dx}{\Delta} + \int \Delta dx \right\} = \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{1}{1-k^2} \left(E - \frac{k^2 sin x . cos x}{\Delta} \right) - \right.$$

$$\left. - 2F + E \right\} = \frac{1}{k^4(1-k^2)} \left\{ (2-k^2)E - (1-k^2)2F - \frac{k^2 sin\, x \,.\, cos\, x}{\Delta} \right\} , \dots (\eta_5)$$

waar gebruik werd gemaakt van de integralen (γ_1) en (γ_8).

Wilde men in de algemeene herleidingsformule (*b*) de onderstelling $\varphi(x) = sin^{p+1}x.\cos x$ beproeven, waartoe naar het vroeger behandelde wel aanleiding was, dan zoude men verkrijgen

$$\int sin^{p+1}x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{sin^{p+1}x.\cos x}{\Delta^{n-2}}F - \int F\frac{dx}{\Delta^n}\{\Delta^2[(p+1)\sin^p x.\cos^2 x - \sin^{p+2}x] + \\ + (n-2)k^2\sin^{p+2}x.\cos^2 x\} =$$

$$= \frac{sin^{p+1}x.\cos x}{\Delta^{n-2}}F - \int \sin^p x.F\frac{dx}{\Delta^n}\{\Delta^2[(p+1)-(p+2)\sin^2 x] + (n-2)k^2\sin^2 x.(1-\sin^2 x)\} =$$

$$= \frac{sin^{p+1}x.\cos x}{\Delta^{n-2}}F - \int \sin^p x.F\frac{dx}{\Delta^n}\{(p+1)-[(p+2)+(p-n+3)k^2]\sin^2 x + (p-n+4)k^2\sin^4 x\} \;,.\;(G_8)$$

$$= \frac{sin^{p+1}x.\cos x}{\Delta^{n-2}}F - \int \sin^p x.F\frac{dx}{\Delta^n}\{(n-2)(1-\sin^2 x) + [(p-n+3)-(p-n+4)\sin^2 x]\Delta^2\} =$$

$$= \frac{sin^{p+1}x.\cos x}{\Delta^{n+2}}F - \frac{1}{k^2}\int \sin^p x.F\frac{dx}{\Delta^n}\{-(n-2)(1-k^2)-[(p-2n+6)-(p-n+3)k^2]\Delta^2+(p-n+4)\Delta^4\} \;,.(G_9)$$

waar de (G_8) naar de machten van $\sin x$, daarentegen de (G_9) naar die van Δ is gerangschikt; maar geene van beide herleidingsformulen leveren iets bruikbaars.

10. Daarentegen zal ten derde de onderstelling $\varphi(x) = \cos^{p+1}x$ ons bij het algemeene theorema (*b*) tot de volgende bruikbare uitkomsten voeren.

$$\int \cos^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{\cos^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F - \int F\frac{dx}{\Delta^n}\{-\Delta^2(p+1)\cos^p x.\sin x + (n-2)k^2\sin x.\cos^{p+2}x\} =$$

$$= \frac{\cos^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F - \int F\frac{dx}{\Delta^n}\sin x.\cos^p x.\{-(p+1)(1-k^2) + (n-p-3)k^2\cos^2 x\}, \ldots (H_1)$$

$$= \frac{\cos^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F - \int F\frac{dx}{\Delta^n}\sin x.\cos^p x.\{-(n-2)(1-k^2) + (n-p-3)\Delta^2\}. \;.\;.\;.\;.\; (H_2)$$

Bij de eerste dezer herleidingen (H_1) verandert de exponent p, terwijl de exponent n standvastig blijft, maar bij de tweede (H_2) daarentegen geschiedt juist het omgekeerde. Men kan in beide eene groote vereenvoudiging aanbrengen door $p = n - 3$ te nemen, en dan de eenige integraal, die in het tweede lid overblijft, op te lossen; langs dien weg verkrijgt men uit beide

$$(n-2)(1-k^2)\int \sin x\,.\cos^{n-3} x\,.F\frac{dx}{\Delta^n} = -\frac{\cos^{n-2} x}{\Delta^{n-2}}F + \int \cos^{n-2} x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} \;\ldots\ldots\; (H_3)$$

Wanneer men de algemeene vergelijkingen (H_2) en (H_1) zelve wil oplossen, waartoe men in de laatstgenoemde eerst p door $p-2$ moet vervangen, zoo verkrijgt men

$$\int \sin x\,.\cos^p x\,.F\frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{(n-2)(1-k^2)}\left\{-\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}}F + \int \cos^{p+1} x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3)\int \sin x\,.\cos^p x\,.F\frac{dx}{\Delta^{n-2}}\right\}, \;\ldots\ldots\; (H_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2}\left\{\frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^{n-2}}F - \int \cos^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^{n-1}} + (p-1)(1-k^2)\int \sin x\,.\cos^{p-2} x\,.F\frac{dx}{\Delta^n}\right\} \;..\; (XXIII)$$

In de vergelijking (H_3) stelle men thans $n = 3$, $= 1$, $= -1$, en er komt

$$\int \sin x\,.F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta}F + \int \cos x\frac{dx}{\Delta^2}\right\} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta}F + \frac{1}{2k}L\frac{1-k\sin x}{1+k\sin x}\right\}, \;..\; (92)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{\Delta}{\cos x}F - \int \frac{dx}{\cos x}\right) = \frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}F - L\,tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right\}, \;\ldots\; (93)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\Delta.F\,dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\Delta^3}{\cos^3 x}F - \int \frac{dx}{\cos^3 x}\Delta^2\right\} = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\Delta^3}{\cos^3 x}F - \frac{1-k^2}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1+k^2)\,L\,tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right\} \;\ldots\ldots\; (94)$$

Deze integralen nu zijn bij de herleidingsformule (H_4) alleen van dienst, wanneer de exponent p even is. Indien echter p oneven is, kan ons de vergelijking (H_3) niet helpen, omdat de factor $n-2$ alsdan in den noemer verdwijnt; men moet dan in zulk geval iedere integraal afzonderlijk zoeken te bepalen, en komt dus van zelf terug op de vroeger gevonden integralen (79), (80) en (81). Deze laatste echter konde ook gevonden worden, als men in die herleidingsformule (H_4) $n = 3$ en $= 1$ stelt, waardoor er eerst verkregen wordt

$$\int \sin x\,.\cos^p x\,.F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta}F + \int \cos^{p+1} x\frac{dx}{\Delta^2} - p\int \sin x\,.\cos^p x\,.F\frac{dx}{\Delta}\right\}, \;..\; (H_5)$$

$$\int \sin x.\cos^p x.F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\left\{\cos^{p+1}x.\Delta.F - \int \cos^{p+1}x\,dx + (p+2)\int \sin x.\cos^p x.\Delta.F\,dx\right\} \;..\; (H_6)$$

Stel vervolgens in de algemeene herleidingsformule (XXIII) $n = 3$, $= 1$ en $= -1$, ten einde tot het volgende drietal formulen te geraken,

$$\int \sin x . \cos^p x . F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2} \left\{ -\frac{\cos^{p-1} x}{\Delta} F + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^2} - (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . F \frac{dx}{\Delta^3} \right\}, .. \text{(XXIV)}$$

$$\int \sin x . \cos^p x . F \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{pk^2} \left\{ -\cos^{p-1} . \Delta . F + \int \cos^{p-1} x dx - (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . F \frac{dx}{\Delta} \right\}, .. \text{(XXV)}$$

$$\int \sin x . \cos^p x . \Delta . F dx = \frac{1}{(p+2)k^2} \left\{ -\cos^{p-1} x . \Delta^3 . F + \int \cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta . F dx \right\}; \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXVI)}$$

waarbij nu de bovenvermelde integralen (79), (80) en (81) de eindintegralen worden in het bijzonder geval dat p oneven is, zoodra men $p = 3$ stelt. Indien evenwel de waarde van dien exponent p even is, verdwijnen de integralen (89), (92), (93) en (94), omdat dan de noemers $p-2$, p en $p+2$ zelve verdwijnen. Men is alsdan genoodzaakt, die integralen rechtstreeks te gaan bepalen, en vindt dan ook voorloopig

$$\int \sin x . \cos^2 x . F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int (\Delta^2 - 1 + k^2) \sin x . F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \int \sin x . F \frac{dx}{\Delta} - (1-k^2) \int \sin x . F \frac{dx}{\Delta^3} \right\},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta . F dx = \int \frac{1 - k^2 + k^2 \cos^2 x}{\cos^2 x} \frac{\sin x}{\Delta} F dx = (1-k^2) \left\{ \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} F \frac{dx}{\Delta} + k^2 \int \sin x . F \frac{dx}{\Delta} \right\},$$

zoodat alle zijn teruggebracht tot de middelste integraal $\int \sin x . F \frac{dx}{\Delta}$, die ook voor $p = 0$ uit de herleidingsformule (XXV) volgt. Maar zij blijft eene vreemde integraal, dat is eene nieuwe transcendente, al is zij ook vatbaar om door gedeeltelijk integreeren herleid te worden.

$$\int \sin x . F \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{k} \int F \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \cos^2 x}{1-k^2}}} \frac{d}{dx} . \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} = -\frac{1}{k} \int F dx \frac{d}{dx} . L \frac{k \cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} =$$

$$= -\frac{1}{k} F . L \frac{k \cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{k} \int L \frac{k \cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{k} F . L \frac{k \cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{1}{k} L \sqrt{1-k^2} . F +$$

$$+ \frac{1}{k} \int L (k \cos x + \Delta) \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{k} F . L (k \cos x + \Delta) + \frac{1}{k} \int L (k \cos x + \Delta) \frac{dx}{\Delta} = \lambda .. (95)$$

En hiermede worden nu, wanneer men gebruik maakt van de integralen (92) en (93), de vorige eindintegralen

$$\int sin\, x\,.\,cos^2 x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\lambda + \frac{cos\, x}{\Delta}F - \frac{1}{2\,k}L\frac{1-k\,sin\,x}{1+k\,sin\,x}\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (96)$$

$$\int\frac{sin\,x}{cos^2 x}\Delta\,.\,F\,d\,x = k^2\lambda + \frac{\Delta}{cos\,x}F - L\,tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right). \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (97)$$

Stapt men van de onevene waarden van n af, en gaat men tot de evene over, dan worden de overeenkomstige integralen daardoor rationeel; en hier moet men onderscheid maken tusschen negatieve en positieve waarden van n. In het eerste dezer gevallen komt er eene macht van Δ^2 in den teller; deze kan men dus ontwikkelen, en daarbij wordt men teruggevoerd tot de integralen, die in het begin van dit Hoofdstuk zijn behandeld. In het andere geval daarentegen komen de machten van Δ^2 in den noemer; en alzoo wordt men weder tot nieuwe integralen gevoerd; men bepale zich hier tot $n = 2$ en $n = 4$.

Wanneer men in de herleidingsformulen (H_3) en (H_4) $n = 2$ wilde stellen, zouden zij niets opleveren; men moet die integralen dus rechtstreeks zoeken en komt dan eerst tot de vorige integraal (83) en daarenboven tot de volgende

$$\int sin\,x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^2} = -\frac{1}{k}\int F\frac{d\,x}{1-k^2+k^2 cos^2 x}\frac{d}{d\,x}.(k\,cos x) = -\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}}\left\{Bg\,tg\frac{k\,cos\,x}{\sqrt{1-k^2}}.F - \right.$$

$$\left. -\int Bg\,tang\frac{k\,cos\,x}{\sqrt{1-k^2}}\frac{dx}{\Delta}\right\} = \mu, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (98)$$

die evenzeer eene nieuwe bijzondere transcendente vormt.

Nu kan men in de herleidingsformule (XXIII) $n = 2$ en $n = 4$ stellen, waardoor men verkrijgt

$$\int sin\,x\,.\,cos^p x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)\,k^2}\left\{- cos^{p-1} x\,.\,F + \int cos^{p-1} x\frac{d\,x}{\Delta} - \right.$$

$$\left. -(p-1)(1-k^2)\int sin\,x\,.\,cos^{p-2} x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^2}\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (XXVII)$$

$$\int sin\,x\,.\,cos^p x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)\,k^2}\left\{- cos^{p-1} x\frac{F}{\Delta^2} + \int cos^{p-1} x\frac{d\,x}{\Delta^3} - \right.$$

$$\left. -(p-1)(1-k^2)\int sin\,x\,.\,cos^{p-2} x\,.\,F\frac{d\,x}{\Delta^4}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (XXVIII)$$

Hier zijn bij de vergelijking (XXVII) de integralen (85) of (98) eindintegralen, al naarmate de exponent p oneven of even is. Bij de vergelijking (XXVIII) daarentegen is voor p oneven de eindintegraal reeds gevonden in de integraal (87); maar zoodra p even wordt, moet men de overeenkomstige eindintegraal nog zoeken. Daartoe onderstelle men eerst $n = 4$, en $p = 2$ in de herleidingsformule (H_4), dan is

$$\int \sin x . \cos^2 x . F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^3 x}{\Delta^2} F + \int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} - \int \sin x . \cos^2 x . F \frac{dx}{\Delta^2} \right\};$$

om hierin de laatste integraal te bepalen, stelle men wederom $p = 2$ in de vergelijking (XXVII), zoo wordt

$$\int \sin x . \cos^2 x . F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x . F + \int \cos x \frac{dx}{\Delta} - (1-k^2) \int \sin x . F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left\{ -(1-k^2)\mu - \cos x . F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \right\}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (99)$$

waardoor ten slotte

$$\int \sin x . \cos^2 x . F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \mu + \frac{\cos x}{\Delta^2} F - \frac{\sin x}{\Delta} \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (100)$$

Nog stelle men in de herleidingsformule (XXVII) $p = 3$, dan komt er

$$\int \sin x . \cos^3 x . F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x . F + \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - 2(1-k^2) \int \sin x . \cos x . F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x . F + \frac{1}{k^2} [E - (1-k^2) F] - 2(1-k^2)\iota \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ -\Delta^2 . F + E - 2(1-k^2) k^2 \iota \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (101)$$

En nu kan men ook in de algemeene herleidingsvergelijking (H_4) $n = 4$ en $p = 3$ stellen, waardoor men verkrijgt

$$\int \sin x . \cos^3 x . F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^4 x}{\Delta^2} F + \int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta^3} - 2 \int \sin x . \cos^3 x . F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ -\frac{1-k^2}{\Delta^2} F + E - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} + 2k^2 \iota \right\}, \quad \ldots \ldots (102)$$

na invoering der vorige integraal.

Uit de herleidingen aan het slot van N°. 9 blijkt ten duidelijkste, dat de onderstelling $\varphi(x) = \sin x . \cos^{p+1} x$ hier evenmin tot bruikbare uitkomsten zoude kunnen voeren.

Bij de vorige herleidingen heeft men, behalve de bekende integralen (η_1) en (η_4), nog gebruikt de volgende

$$\int \cos x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta}, \qquad (\eta_6)$$

$$\int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{\Delta^3}[\Delta^2 - (1-k^2)] = \frac{1}{k^2}[F - E] + \frac{\sin x . \cos x}{\Delta}, \qquad (\eta_7)$$

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int \frac{\cos x\, dx}{\Delta^3}[\Delta^2 - (1-k^2)] = \frac{1}{k^2}\left\{\int \cos x \frac{dx}{\Delta} - (1-k^2)\int \cos x \frac{dx}{\Delta^3}\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) - (1-k^2)^2 \frac{\sin x}{\Delta}\right\}, \qquad (\eta_8)$$

$$\int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4}\int \frac{(1-k^2)^2 - 2(1-k^2)\Delta^2 + \Delta^4}{\Delta^3} dx = \frac{1}{k^4}\left\{(1-k^2)^2 \int \frac{dx}{\Delta^3} - 2(1-k^2)\int \frac{dx}{\Delta} + \int \Delta dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^4}\left\{(1-k^2)^2\left(E - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta}\right) - 2(1-k^2)F + E\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^4}\left\{(2-k^2)E - (1-k^2)2F - (1-k^2)k^2 \frac{\sin x . \cos x}{\Delta}\right\}. \qquad (\eta_9)$$

Dit viertal integralen, alsmede het vijftal, afgeleid aan het einde van N°. 9, komen voort uit de algemeene herleidingsvergelijkingen (A_1), (B_1) en (A_2), (B_2) van het eerste Hoofdstuk, wanneer men aldaar $n = 1$ neemt.

$$\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{\frac{\sin^{p-3} x . \cos x}{\Delta} + [(p-2)+(p-4)k^2]\int \sin^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} - (p-3)\int \sin^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3}\right\}, \qquad (C_9)$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{k^2 \sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta} - p(1-k^2)\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta} + (p+1)\int \sin^p x . \Delta dx\right\}, \qquad (C_{10})$$

$$\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{\frac{\sin x . \cos^{p-3} x}{\Delta} - [(p-2)-(p-3)2k^2]\int \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} + (p-3)(1-k^2)\int \cos^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3}\right\}, \qquad (C_{11})$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{k^2 \sin x . \cos^{p+1} x}{\Delta} - p\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta} + (p+1)\int \cos^p x . \Delta\, dx\right\} \qquad (C_{12})$$

11. Indien wij beproeven voort te gaan met de volgende overeenkomstige onderstellingen, dan vinden wij eerstens bij de onderstelling $\varphi(x) = tang^{p+1} x$ in de formule (*b*)

$$\int tang^{p+1}x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 (p+1) \frac{tang^p x}{cos^2 x} + (n-2) k^2 \sin x . \cos x . tang^{p+1} x \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . cos^2 x . \{(p+1) + [(2-k^2)(p+1) + (n-2)k^2] tang^2 x + (1-k^2)(p+1) tang^4 x\}, \ldots \ldots \ldots \quad (I_1)$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . \{(n-2) + [(p-n+3) + (p+1) tang^2 x] \Delta^2\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{k^2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^2 x} \{-(n-2)(1-k^2) + [(n-2)2 - (n-p-3)k^2] \Delta^2 - (n-2) \Delta^4\} \ldots \ldots \ldots \quad (I_2)$$

Nemen wij daarna $\varphi(x) = \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x}$, zoo komt er

$$\int \frac{tang^{p+1}x}{cos^2 x} \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{tang^{p+1}x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 \left[(p+1) \frac{tang^p x}{cos^4 x} - 2\, tang^{p+1} x \frac{-\sin x}{cos^3 x} \right] + (n-2) k^2 tang^{p+1} x \frac{\sin x}{\cos x} \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . \{(p+1) + [2(p+2) + (n-p-3)k^2] tang^2 x + (p+3)(1-k^2) tang^4 x\}, . (I_3)$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^4 x} \{\Delta^2 \{(p+1) + 2 \sin^2 x\} + (n-2) k^2 \sin^2 x . cos^2 x\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1}x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \frac{1}{k^2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^4 x} \{-(n-2)(1-k^2) + [2(n-1) - (n-p-3)k^2] \Delta^2 - n \Delta^4\} . . (I_4)$$

Vervolgens stellen wij in die herleidingsvergelijking (*b*) $\varphi(x) = sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x$, dan wordt deze

$$\int sin^{p+1} \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 \frac{p+1}{2} sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2} x + (n-2) k^2 \sin x . \cos x . sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x \right\} =$$

$$= \frac{sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \{(p+1) + (n-p-3) 4k^2 sin^2 \tfrac{1}{2}x - (2n-p-5) 4k^2 sin^4 \tfrac{1}{2}x\}, . . (I_5)$$

$$= \frac{sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . \{2(n-2) - (2n-p-5)\Delta^2 - (n-2) 8 k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x\} . . (I_6)$$

Eindelijk beproeve men nog de onderstelling $\varphi(x) = \sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x$, en men zal verkrijgen

$$\int \sin^{p+1} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{\sin^{p+1} \frac{1}{2}x . \cos \frac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \Big\{ -\frac{1}{2}\Delta^2 [(p+1)\sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^{p+2} \tfrac{1}{2}x] +$$

$$+ (n-2)\, k^2 \sin x . \cos x . \sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x \Big\} = \frac{\sin^{p+1} \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin^p \tfrac{1}{2}x . \{(p+1) -$$

$$- [(p+2) - (n-p-3) 4 k^2] \sin^2 \tfrac{1}{2} x - (3n-2p-9) 4 k^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} x + (2n-p-6) 4 k^2 \sin^6 \tfrac{1}{2} x\} \,..\, (I_7)$$

De aandachtige beschouwing van deze herleidingen doet ons duidelijk zien, dat wij ons onderzoek niet behoeven voort te zetten. Immers het gelukte ons wel in de formulen (I_1), (I_3), (I_5) en (I_7) alles naar de machten p te ordenen van den goniometrischen factor onder het integraalteeken, even als dit in (I_2) en (I_4) gelukte ten aanzien van de machten van Δ; in (I_6) echter niet meer; maar dit helpt ons toch niet. Gaan wij toch de redeneeringen van N⁰. 9 en 10 na, dan blijkt al aanstonds, dat zelfs de eenvoudigste der bovenstaande vergelijkingen zich tot zulk een gedachtengang niet meer leenen willen.

12. Wenden wij ons tot de herleidingsvergelijkingen (E_1) tot (E_8) in § 12 van het eerste Hoofdstuk afgeleid, dan moeten wij, om te geraken tot de vruchtbare toepassing van het theorema (α) op deze formulen, eerst de daarbij voorkomende eindintegralen zoeken te bepalen. Daaronder zijn reeds vroeger de volgende gevonden

$\int \sin x . F\, dx$, ... (7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} F$, ... (11) $\int \cos x . F\, dx$, ... (6)

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} F$, ... (8) $\int \tan x . \cos^2 x . F\, dx$, ... (1) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F$, ... (22)

$\int \sin \tfrac{1}{2} x . F\, dx$, ... (18) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F$, ... (19) $\int \cos \tfrac{1}{2} x . F\, dx$, ... (17)

$\int \tan \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F\, dx$, ... (15) $\int \tan^3 \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F\, dx$, ... (14)

waarbij nog behoort

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . F\, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x)\, F\, dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon - \sin x . F - \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} \Big\}, \; . \; . \; . \; (103)$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . F\, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x)\, F\, dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x . F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} \Big\}. \; . \; . \; . \; (104)$$

De nog ontbrekende zullen moeten afgeleid worden uit de integralen (ε_1) tot (ε_{15}), waarbij telkens een of meer der vorige uitkomsten noodig bevonden worden, ten einde eene nieuwe, gewenschte integraal afzonderlijk te bepalen; want daar $\varphi(x)$ overal uit een produkt of quotient bestaat, bevat $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ steeds twee termen, die, na herleiding, eene reeds bekende en daarnaast de bedoelde nieuwe integraal opleveren.

$$\int \sin^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon - \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (105)$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon + \sin x \,.\, \cos x \,.\, F - \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (106)$$

$$\int \sin^4 x . F dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon - (3 + 2\sin^2 x)\sin x . \cos x . F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4 - 2\Delta - 2\Delta^2 + 9k^2)\right\}, \ldots (107)$$

$$\int \cos^4 x . F dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon + (3 + 2\cos^2 x)\sin x . \cos x . F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4 - 2\Delta - 2\Delta^2 - 15k^2)\right\}, \ldots (108)$$

$$\int \sin^3 x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^3}\left\{-(2 + \sin^2 x)\, 2k^3 \cos x . F + (1 + 4k^2) Bg\sin(k\sin x) - k\sin x . \Delta\right\}, \ldots (109)$$

$$\int \cos^3 x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^3}\left\{(2 + \cos^2 x) 2k^3 \sin x . F - (1 - 5k^2) L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - k + k\cos x . \Delta\right\}, \ldots (110)$$

$$\int \tang^4 x . \cos^2 x . F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon + (2 + \cos^2 x)\frac{\sin x}{2\cos x}F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L\frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{2k^2}(1-\Delta), . (111)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\tang^2 x} F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon - (2 + \sin^2 x)\frac{\cos x}{2\sin x}F + L\frac{2\sin x}{1+\Delta} + \frac{1}{2k^2}(1-\Delta), \ldots . (112)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{1}{3}(5 - \cos x)\cos\tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{(1+4k)F(l,z) - 2E(l,z) + \frac{2\sin\frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\}, . (113)$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x)\sin\tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{(1+4k)F(l,y) - 2E(l,y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\}, . (114)$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon - (4 - \cos x)\sin x \,.\, F - \frac{1}{k^2}\left[4kL\frac{k\cos x + \Delta}{1+k} + 1 - \Delta\right]\right\}, \ldots (115)$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{8} \left\{ 3\varepsilon + (4 + cos x) sin x . F + \frac{1}{k^2} \left[4 k L \frac{k cos x + \Delta}{1+k} + \Delta - 1 \right] \right\}, \ldots (116)$$

$$\int sin^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\frac{2}{15}(8 + 4 sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 sin^4 \tfrac{1}{2} x) cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{30 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1 - 12k - 32k^2) F(l,z) + \right.$$

$$\left. + 24 E(l,z) - \frac{1 + 13k - k cos x}{1 + k - k cos x} 2 sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \ldots \ldots (117)$$

$$\int cos^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{2}{15}(8 + 4 sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 sin^4 \tfrac{1}{2} x) sin \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{30 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1 - 12k - 32k^2) F(l,y) + \right.$$

$$\left. + 24 E(l,y) - \frac{1 + 13k + k cos x}{1 + k + k cos x} 2 cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} - 2\sqrt{2k} \right\}, \ldots \ldots (118)$$

$$\int \frac{cos^4 \tfrac{1}{2} x}{tang^2 \tfrac{1}{2} x} F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon - \frac{1}{8} \left\{ 5(4 + cos x) + 4 \frac{(1 + cos x)^2}{1 - cos x} \right\} sin x . F + 2 L \frac{2(\Delta - cos x)}{1 + \Delta} -$$

$$- \frac{1}{k} L \frac{k cos x + \Delta}{1 + k} - \frac{9}{8k^2}(1 - \Delta), \ldots \ldots (119)$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x . sin^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon + \frac{1}{8} \left\{ 5(4 - cos x) + 4 \frac{(1 - cos x)^2}{1 + cos x} \right\} sin x . F - 2 L \frac{(\Delta - cos x)(1 + \Delta)}{2 sin^2 x} +$$

$$+ \frac{1}{k} L \frac{k cos x + \Delta}{1 + k} - \frac{9}{8k^2}(1 - \Delta). \ldots \ldots (120)$$

Verder zal het blijken, dat men nog de volgende integralen noodig heeft

$$\int F dx, \ldots . (41) \qquad \int \frac{cos^2 x}{tang\, x} F dx, \ldots . (40) \quad \text{en} \quad \int tang^3 x . cos^2 x . F dx, \ldots . (34)$$

$$\int cot \tfrac{1}{2} x . cos^4 \tfrac{1}{2} x . F dx, \ldots . (67) \qquad \int tang^5 \tfrac{1}{2} x . cos^4 \tfrac{1}{2} x . F dx, \ldots . (59)$$

$$\int \frac{dx}{cos\, x} F, \ldots . (28) \qquad \int \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} F. \ldots . (51)$$

13. Nu wij wederom al de benoodigde materialen gereed hebben, kunnen wij overgaan tot het afleiden der algemeene herleidingsformulen zelve, en wel door de toepassing telkens van het vroegere theorema (α), thans gebracht onder den vorm (α_1). Langs dien weg levert de vergelijking (E_1)

$$pk^2 \left\{ sin^p x . cos x . F - \int F dx [p sin^{p-1} x . cos^2 x - sin^{p+1} x] \right\} = - sin^{p-1} x . \Delta + (p-1) \left\{ sin^{p-2} x . cos x . F - \right.$$

$$\left. - \int F dx [(p-2) sin^{p-3} x . cos^2 x - sin^{p-1} x] \right\}.$$

Wanneer men den tweeledigen vorm onder het integraalteeken telkens aldus herleidt

$$A\sin^{a-1}x.\cos^2x-\sin^{a+1}x=A\sin^{a-1}x.(1-\sin^2x)-\sin^{a+1}x=A\sin^{a-1}x-(A+1)\sin^{a+1}x,$$

en daarna de p door $p-1$ vervangt, zoo komt er

$$\int\sin^p x.Fdx=\frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{[(p-2)^2+(p-1)^2k^2]\int\sin^{p-2}x.Fdx-(p-2)(p-3)\int\sin^{p-4}x.Fdx-$$
$$-[1-(p-1)\Delta^2]\sin^{p-3}x.\cos x.F-\sin^{p-2}x.\Delta\Big\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXIX)}$$

Hierbij komen als eindintegralen bij evene p, voor $p=2$, de integralen (11), (41), (105) en (107); bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (7) en (109).

De vergelijking (E_2) op dezelfde wijze behandeld, geeft ons

$$pk^2\Big\{\sin x.\cos^p x.F-\int Fdx[\cos^{p+1}x-p\sin^2x.\cos^{p-1}x]\Big\}=$$

$$=1-\cos^{p-1}x.\Delta-(p-1)(1-k^2)\Big\{\sin x.\cos^{p-2}x.F-\int Fdx[\cos^{p-1}x-(p-2)\sin^2x.\cos^{p-3}x]\Big\};$$

en omdat

$$\cos^{a+1}x-A\sin^2x.\cos^{a-1}x=\cos^{a+1}x-A\cos^{a-1}x.(1-\cos^2x)=(A+1)\cos^{a+1}x-A\cos^a x$$

is, verkrijgt men daaruit, na verwisseling van p door $p-1$,

$$\int\cos^p x.Fdx=\frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{[(p-1)^2k^2+(p-2)^2(1-k^2)]\int\cos^{p-2}x.Fdx-$$
$$-(p-2)(p-3)\int\cos^{p-4}x.Fdx-[1-k^2-(p-1)\Delta^2]\sin x.\cos^{p-3}x.F-1+\cos^{p-2}x.\Delta\Big\} \ldots \text{(XXX)}$$

Bij evene waarden van p komen er hier, voor $p=2$, de integralen (8), (41), (106) en (108) als eindintegralen voor; terwijl er daarentegen bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (6) en (110) dien rol vervullen.

Vervolgens geeft de vergelijking (E_3), wederom langs denzelfden weg,

$$(p-3)(1-k^2)\Big\{\tan^p x.\cos^2x.F-\int Fdx[p\tan^{p-1}x-2\tan^p x.\sin x.\cos x]\Big\}=\tan^{p-3}x.\Delta-$$

$$-[2(p-3)-(p-2)k^2]\Big\{\tan^{p-2}x.\cos^2x.F-\int Fdx[(p-2)\tan^{p-3}x-2\tan^{p-2}x.\sin x.\cos x]\Big\}-$$

$$-(p-3)\Big\{\tan^{p-4}x.\cos^2x.F-\int Fdx[(p-4)\tan^{p-5}x-2\tan^{p-4}x.\sin x.\cos x]\Big\}.$$

Hier heeft men nu de goniometrische herleiding noodig

$$A\,tang^{a-1}x - 2\,tang^a x.sin\,x.cos\,x = A\,tang^{a-1}x\,.\,cos^2 x\,.\,(1+tang^2 x) - 2\,tang^a x\,.\,cos^2 x\,.\,tang\,x =$$
$$= (A-2)\,tang^{a+1}x\,.\,cos^2 x + A\,tang^{a-1}x\,.\,cos^2 x.$$

Past men deze onder het integraalteeken overal toe, en stelt men daarop $p-1$ voor p in de plaats, zoo geeft de oplossing dezer vergelijking

$$\int tang^p x.cos^2 x.Fdx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11)-(2p^2-13p+19)k^2] \int tang^{p-2}x.cos^2 x.Fdx -$$
$$-[(3p-13)(p-4)-(p-3)^2k^2] \int tang^{p-4}x.cos^2 x.Fdx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6}x.cos^2 x.\,Fdx +$$
$$+ [-cos^2 x + \{(p-4)+cos^2 x\}\,\Delta^2]\,\frac{tang^{p-5}x}{cos^2 x}\,F - tang^{p-4}x\,.\,\Delta \Big\}, \quad \ldots . \quad \text{(XXXI)}$$

waarbij nu de volgende eindintegralen behooren. Vooreerst, voor evene p, stelle men $p=6$, dan verkrijgt men (112), (106), (105) en (111); daarna, voor onevene p, stelle men $p=5$, en vindt alsdan de integralen (40), (1) en (34).

14. De volgende herleidingsvergelijkingen met het argument $\frac{1}{2}x$ kan men evenzoo behandelen. Zoo levert de formule (E_4) naar het theorema ($\boldsymbol{a}_1$)

$$(p-1)4k^2\Big\{ sin^p \tfrac{1}{2}x\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\,[p\,sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x] \Big\} = 2\,sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta +$$
$$+ (p-2)4k^2\Big\{ sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\,[(p-2)sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x] \Big\} -$$
$$-(p-3)\Big\{ sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\,[(p-4)\,sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x] \Big\}.$$

Op den tweeledigen vorm onder het integraalteeken kan men nu de goniometrische herleiding toepassen

$$A\,sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x.cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^a\tfrac{1}{2}x = A\,sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,(1-sin^2\tfrac{1}{2}x) - sin^a\tfrac{1}{2}x = A\,sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x - (A+1)\,sin^a\tfrac{1}{2}x\,;$$

daarbij blijkt wederom even als vroeger de noodzakelijkheid om de exponent p met de eenheid te verlagen, en alsdan kan men de gezochte integraal oplossen.

$$\int sin^p \tfrac{1}{2} x . F d x = \frac{1}{p(p-2)4k^2} \Big\{ (p-2)^2 8 k^2 \int sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x . F d x -$$

$$- [(p-4)^2 + (p-3)^2 4 k^2] \int sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F d x + (p-4)(p-5) \int sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F d x +$$

$$+ [2(1-k^2) + 2 k^2 cos\, x - (p-2) \Delta^2]\, sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . sin\, x . F + 4\, sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta \Big\} \ldots \text{(XXXII)}$$

Wat de eindintegralen betreft, die bij deze formule behooren, moet men wederom onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden van p. Is p even, dan stelle men $p = 4$, en men verkrijgt de integralen (22), (41), (103) en (115); is p daarentegen oneven, zoo stelle men $p = 7$, om tot de integralen (18), (113) en (117) te geraken.

Op dezelfde wijze verkrijgt men door de herleidingsformule (E_5) vooreerst

$$(p-1)4 k^2 \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x . cos^p \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [cos^{p+1} \tfrac{1}{2} x - p\, sin^2 \tfrac{1}{2} x . cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x] \Big\} = 2 - 2 cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta +$$

$$+ (p-2) 4 k^2 \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x . cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x - (p-2) sin^2 \tfrac{1}{2} x . cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x] \Big\} -$$

$$- (p-3) \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x . cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x - (p-4)\, sin^2 \tfrac{1}{2} x . cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x] \Big\};$$

en, wanneer men hier onder het integraalteeken telkens de herleiding

$$cos^a \tfrac{1}{2} x - A\, sin^2 \tfrac{1}{2} x . cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x = cos^a \tfrac{1}{2} x - A cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x . (1 - cos^2 \tfrac{1}{2} x) = (A+1) cos^a \tfrac{1}{2} x - A cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x$$

toepast, en daarna de exponent p door $p - 1$ vervangt, vervolgens

$$\int cos^p \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{p(p-2)4k^2} \Big\{ (p-2)^2 8 k^2 \int cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . F d x -$$

$$- [(p-4)^2 + (p-3)^2 4 k^2] \int cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F d x + (p-4)(p-5) \int cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F d x -$$

$$- [2(1-k^2) - 2 k^2 cos\, x - (p-2) \Delta^2] cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . sin\, x . F + 4 cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta - 4 \Big\} \ldots \text{(XXXIII)}$$

De eindintegralen, die bij deze herleidingsformule gebruikt moeten worden, vindt men als volgt. Bij evene waarden van p stelle men $p = 4$, en komt alsdan tot de integralen (19), (41), (104) en (116); bij onevene waarden van p moet men daarentegen $p = 7$ nemen, waardoor men tot de integralen (17), (114) en (118) wordt gevoerd.

Eindelijk behoort hiertoe nog de herleidingsformule (E_6), waaruit wordt afgeleid

$$(p-5)\left\{tang^p\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F-\int F dx\,\frac{1}{2}\left[p\,tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^p\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x\right]\right\}=$$

$$=2\,tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta-[3(p-5)-(p-6)4k^2]\left\{tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F-\right.$$

$$\left.-\int F dx\,\frac{1}{2}[(p-2)\,tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x]\right\}-$$

$$-[3(p-5)-(p-4)4k^2]\left\{tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F-\int F dx\,\frac{1}{2}[(p-4)tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x-\right.$$

$$\left.-4\,tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x]\right\}-(p-5)\left\{tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F-\right.$$

$$\left.-\int F dx\,\frac{1}{2}[(p-6)\,tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x]\right\}.$$

Hier behoeft men de volgende goniometrische herleiding

$$A\,tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{a-1}\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x=A\,tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.(1+tang^2\tfrac{1}{2}x)-$$
$$-4\,tang^{a-1}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.tang\tfrac{1}{2}x=(A-4)\,tang^a\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x+A\,tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x,$$

om die bij den vorm onder ieder integraalteeken te gebruiken; wanneer men daarna $p-1$ voor p in de plaats stelt, komt er

$$\int tang^p\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F dx=\frac{-1}{(p-5)(p-6)}\left\{[(p-6)(2p-11)-(p-7)^2 2k^2]2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F dx+\right.$$

$$+[3(p-6)^2-(p^2-12p+33)4k^2]\,2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F dx+$$

$$+[(p-6)(2p-13)-(p-5)^2 2k^2]\,2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F dx+$$

$$+(p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.F dx+[\cos x-(p-6+\cos x)\Delta^2]\frac{4}{\sin x}tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F+$$

$$\left.+4\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXIV)}$$

Voor de bij deze herleidingsformule behoorende eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden von den exponent p. Heeft deze eene evene waarde, zoo stelle men $p=8$ en vindt dan de integralen (119), (116), (120), (115); is die waarde evenwel oneven, zoo voert

*

de onderstelling $p = 7$ tot de integralen (67), (15), (14) en (59) als eindintegralen.

15. Er blijven nog de twee laatste der herleidingsformulen (E) ter behandeling over. Past men op de eerste daarvan (E_7) het bekende theorema (α_1) toe, dan verkrijgt men

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{\sin x}{\cos^p x}F - \int F\,dx\left[\frac{1}{\cos^{p-1} x} + p\,\frac{\sin^2 x}{\cos^{p+1} x}\right]\right\} = \frac{\Delta}{\cos^{p-1} x} - 1 -$$

$$-(p-2)k^2\left\{\frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}F - \int F\,dx\left[\frac{1}{\cos^{p-3} x} + (p-2)\frac{\sin^2 x}{\cos^{p-1} x}\right]\right\};$$

of, omdat

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^a x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^a x} = \frac{1}{\cos^a x} - \frac{1}{\cos^{a-2} x}$$

is, wanneer men later p vervangt door $p-1$,

$$\int\frac{dx}{\cos^p x}F = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{\left[(p-2)^2 - (2p^2-10p+13)k^2\right]\int\frac{dx}{\cos^{p-2} x}F + \right.$$

$$\left. +(p-3)(p-4)\int\frac{dx}{\cos^{p-4} x}F + \left[(1-k^2)+(p-3)\Delta^2\right]\frac{\sin x}{\cos^{p-1} x}F - \frac{\Delta}{\cos^{p-2} x} + 1\right\}; \quad .. \text{(XXXV)}$$

waarbij als eindintegralen te voorschijn treden, bij evene waarden van p, voor $p = 4$, de integralen (41) en (8) en bij onevene waarden van p, voor $p = 3$, de integralen (6) en (28).

Ten slotte gebruike men bij de herleidingsformule (E_8) hetzelfde theorema (α_1), dan wordt

$$(p-1)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x} + p\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}\right]\right\} = \frac{2\Delta}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x} - 2 +$$

$$+(p-2)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x} + (p-2)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\right]\right\} -$$

$$-(p-3)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x} - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x} + (p-4)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}\right]\right\}.$$

Hier passe men de goniometrische herleiding

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^a \frac{1}{2} x} = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} x}{\cos^a \frac{1}{2} x} = \frac{1}{\cos^a \frac{1}{2} x} - \frac{1}{\cos^{a-2} \frac{1}{2} x}$$

toe, en vermindere vervolgens den exponent p met de eenheid; dan geeft eene eenvoudige oplossing

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2} x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \left\{ \left[(p-2)^2 + (p-3)^2 \, 4 k^2 \right] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F - \right.$$

$$- (p-4)^2 \, 8 k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F + (p-4)(p-6) \, 4 k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F + \left[2 (1 - k^2) - \right.$$

$$\left. - 2 k^2 \cos x + (p-4) \Delta^2 \right] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} F - \frac{4 \Delta}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} + 4 \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXVI)}$$

Al weder moet men bij de bepaling der eindintegralen onderscheid maken tusschen de gevallen, dat de exponent p even of oneven zij; bij evene waarden van p, stelle men $p = 4$ en vindt dan de integralen (104), (41) en (19); maar bij onevene waarden van p, verkrijgt men voor $p = 3$ de integralen (114), (17) en (51) voor dat doel.

Hierbij zullen wij het onderzoek omtrent de integralen van dit hoofdstuk staken; en met name het theorema (*b*) niet op deze herleidingsformulen (E) van het Eerste hoofdstuk toepassen.

TAFELS 35—69.

AANMERKINGEN.

De integralen zijn genomen tusschen de grenzen 0 en x.

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \qquad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad E = \int_0^x d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Verder is bij $\Delta(l,y)$, $F(l,y)$, $E(l,y)$ en $\Delta(l,z)$, $F(l,z)$, $E(l,z)$,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{2k}, \qquad l^2 = \frac{1}{2}(1 + k),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z = \sin \tfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{2k}, \qquad r = \frac{1}{8k}(1 + 2k)^2.$$

Er komen als nieuwe transcendenten

$$\alpha = \int \frac{dx}{\cos x} F, \qquad \eta = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F,$$

$$\beta = \int \frac{dx}{\sin x} F, \qquad \theta = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta},$$

$$\gamma = \int \frac{\sin x}{\cos x} F dx, \qquad \iota = \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\delta = \int \frac{\cos x}{\sin x} F dx, \qquad \varkappa = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\varepsilon = \int F dx, \qquad \lambda = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta},$$

$$\zeta = \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} F, \qquad \mu = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2}.$$

TAFEL 35.

$$\int \sin^p x\,.\,F\,dx = \frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{[(p-2)^2+(p-1)^2k^2]\int \sin^{p-2}x\,.\,F\,dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4}x\,.\,F\,dx - [1-(p-1)\Delta^2]\sin^{p-3}x\,.\cos x\,.\,F - \sin^{p-2}x\,.\,\Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}F = -\cot x\,.\,F + L\frac{2\sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{dx}{\sin x}F = \beta. \qquad \int F\,dx = \varepsilon.$$

$$\int \sin x\,.\,F\,dx = -\cos x\,.\,F + \frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int \sin^2 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon - \sin x\,.\cos x\,.\,F + \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\Big\}.$$

$$\int \sin^3 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6k^3}\Big\{-(2+\sin^2 x)\,2k^3\cos x\,.\,F + (1+4k^2)\,Bg\sin(k\sin x) - k\sin x\,.\,\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin^4 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{8}\Big\{3\varepsilon - (3+2\sin^2 x)\sin x\,.\cos x\,.\,F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4-2\Delta-2\Delta^2+9k^2)\Big\}.$$

TAFEL 36

$$\int \sin^p x\,.\cos x\,.\,F\,dx = \frac{1}{p(p+1)k^2}\Big\{(p-1)^2(1+k^2)\int \sin^{p-2}x\,.\cos x\,.\,F\,dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4}x.\cos x.F\,dx - [\cos^2 x + (1-p\cos^2 x)\Delta^2]\sin^{p-3}x.F - \sin^{p-2}x.\cos x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}F\,dx = -\frac{1}{\sin x}F + L\frac{\Delta-\cos x}{\sin x}. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x}F\,dx = \delta. \qquad \int \cos x.F\,dx = \sin x.F + \frac{1}{k}L\frac{k\cos x+\Delta}{1+k}.$$

$$\int \sin x\,.\cos x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2k^2}\{E - \Delta^2.\,F\}.$$

$$\int \sin^2 x\,.\cos x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6k^2}\Big\{2k^2\sin^3 x\,.\,F + \frac{1}{k}(1+k^2)\,L\frac{k\cos x+\Delta}{1+k} - \cos x\,.\,\Delta + 1\Big\}.$$

$$\int \sin^3 x\,.\cos x\,.\,F\,dx = \frac{1}{12k^4}\{(1+k^2)\,2E - (2+k^2-3k^4\sin^4 x)\,F - k^2\sin x\,.\cos x\,.\,\Delta\}.$$

TAFEL 37.

$$\int \sin^p x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2}\Big\{\left[(p-3)^2 + (2p^2-9p+11)k^2\right]\int \sin^{p-2} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} -$$

$$-\left[(2p^2-15p+29)+(p-3)^2 k^2\right]\int \sin^{p-4} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} +$$

$$+ \left[\cos^2 x + \{1-(p-2)\cos^2 x\}\ \Delta^2\right]\sin^{p-5} x \,.\, F + \sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos x}F = \gamma + \delta. \quad \int \frac{dx}{\cos x}F = \alpha. \quad \int \frac{\sin x}{\cos x}F dx = \gamma. \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}F dx = \alpha - \sin x . F - \frac{1}{k}L\frac{k\cos x + \Delta}{1+k}.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}F\,dx = \gamma - \frac{1}{2k^2}\{E - \Delta^2 . F\}.$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}F\,dx = \alpha - \frac{1}{6k^2}\Big\{(3+\sin^2 x)\,2k^2 \sin x \,.\, F + \frac{1}{k}(1+7k^2)L\frac{k\cos x + \Delta}{1+k} - \cos x \,.\, \Delta + 1\Big\}.$$

TAFEL 38.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\Big\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx -$$

$$- \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, F + \int \sin^{p-1} x . \Delta^3\,dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{3}\Big\{-\frac{1}{\sin^3 x}\Delta^3 \,.\, F - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}(1-2k^2)\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\Delta \,.\, F\,dx = -k^2\theta - \frac{1}{\sin x}\Delta \,.\, F + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)x + k^2 \sin x \,.\, \cos x - 2\Delta^3 \,.\, F\}.$$

TAFEL 39.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{pk^2}\Big\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta} - \sin^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, F + \int \sin^{p-1} x\,dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}F\frac{dx}{\Delta} = -\frac{\Delta}{\sin x}F + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x. \quad \int \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta} = \theta. \quad \int \sin x \,.\, \cos x . F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\{x - \Delta . F\}.$$

TAFEL 40.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} - \sin^{p-1} x \,.\, F + \int \sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \varkappa. \quad \int \sin x . \cos x . F\frac{dx}{\Delta^2} = \iota. \quad \int \sin^2 x . \cos x . F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2}\left\{\varkappa - \sin x . F - \frac{1}{k} L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k}\right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^4}\left\{\Delta^2 . F - E + 2k^2\iota\right\}.$$

TAFEL 41.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} - \sin^{p-1} x \frac{F}{\Delta} + \int \sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta} F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} Bg\cos\frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} Bg\, tang\left(tang\, x . \sqrt{1-k^2}\right)\right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{-\theta + \frac{\sin x}{\Delta} F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} Bg\sin\frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta}\right\}.$$

TAFEL 42.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} - \sin^{p-1} x \frac{F}{\Delta^3} + \int \sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^3}\right\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2} F - E + \frac{k^2}{\Delta}\sin x . \cos x\right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2}\left\{-\varkappa + \frac{\sin x}{\Delta^2} F + \frac{\cos x - \Delta}{(1-k^2)\Delta}\right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^4}\left\{\frac{1}{\Delta^2} F - \frac{1}{1-k^2} E + \frac{k^2 \sin x . \cos x}{(1-k^2)\Delta} - 2k^2\iota\right\}.$$

TAFEL 43.

$$\int \cos^p x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p-1)k^2} \Big\{ [(p-1)^2 k^2 + (p-2)^2 (1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, F dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \cos^{p-4} x \,.\, F dx - [(1-k^2) - (p-1)\Delta^2] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, F - 1 + \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} F = \tang x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2} + \Delta}. \qquad \int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha.$$

$$\int F dx = \varepsilon. \qquad \int \cos x \,.\, F dx = \sin x \,.\, F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k}.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x \,.\, \cos x \,.\, F - \frac{1}{k^2} (1-\Delta) \Big\}.$$

$$\int \cos^3 x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^3} \Big\{ (2 + \cos^2 x)\, 2k^3 \sin x \,.\, F - (1-5k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} - k + k \cos x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^4 x \,.\, F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon + (3 + 2\cos^2 x) \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{3k^4} (1-\Delta)(4 - 2\Delta - 2\Delta^2 - 15k^2) \Big\}.$$

TAFEL 44.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p+1)k^2} \Big\{ -(p-1)^2 (1-2k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, F dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-4} x . F dx + [\cos^2 x - (2 - p \sin^2 x)\Delta^2] \cos^{p-3} x . F + \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} F dx = \frac{1}{\cos x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} \sin x + \Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} F dx = \gamma.$$

$$\int \sin x \,.\, F dx = -\cos x \,.\, F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x). \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F dx = \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 \,.\, F \}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^2} \Big\{ -2k^2 \cos^3 x \,.\, F - \frac{1}{k} (1-2k^2)\, Bg \sin (k \sin x) + \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, F dx = \frac{1}{12k^4} \{ [(2-5k^2) + (1 + \cos^2 x) 3k^4 \sin^2 x] F - (1-2k^2) 2E + k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

TAFEL 45.

$$\int \cos^p x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2} \Big\{ -[(p-3)^2 + (3p^2 - 15p + 20)k^2] \int \cos^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ [(2p^2 - 15p + 29) - (3p^2 - 21p + 38)k^2] \int \cos^{p-4} x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2) \int \cos^{p-6} x . F \frac{dx}{\sin x} - [\cos^2 x - \{2-(p-2)\sin^2 x\} \Delta^2] \cos^{p-5} x . F - \sin x . \cos^{p-4} x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx = \delta.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} F\,dx = \beta + \cos x \,.\, F - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x). \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} F\,dx = \delta - \frac{1}{2k^2} \{E - \Delta^2 . F\}.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\,dx = \beta + \frac{1}{6k^2} \Big\{ (3 + \cos^2 x)\, 2k^2 \cos x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 - 8k^2)\, Bg \sin(k \sin x) - \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 46.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p+2)k^2} \Big\{ -(p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx -$$

$$- \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, F + \int \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^2\,dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{3(1-k^2)} \Big\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} F - \frac{1}{2}(1-k^2) \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}(1+k^2)\, L\, tang\, (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta \,.\, F\,dx = k^2 \lambda + \frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tang\, (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{6k^2} \{(2-k^2)\,x + k^2 \sin x \,.\, \cos x - 2\Delta^3 . F\}.$$

TAFEL 47.

$$\int \sin x.\cos^p x.F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{pk^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta}-\cos^{p-1}x.\Delta.F+\int \cos^{p-1}x dx\right\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}F-L tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)\right\}. \quad \int \sin x.F\frac{dx}{\Delta}=\lambda. \quad \int \sin x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\{x-\Delta.F\}.$$

TAFEL 48.

$$\int \sin x.\cos^p x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta^2}-\cos^{p-1}x.F+\int \cos^{p-1}x\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \sin x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\mu. \qquad \int \sin x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\iota.$$

$$\int \sin x.\cos^2 x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-(1-k^2)\mu-\cos x.F+\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x)\right\}.$$

$$\int \sin x.\cos^3 x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{2k^4}\{-\Delta^2.F+E-2(1-k^2)k^2\iota\}$$

TAFEL 49.

$$\int \sin x.\cos^p x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta^3}-\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta}F+\int \cos^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \sin x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta}F+\frac{1}{2k}L\frac{1-k\sin x}{1+k\sin x}\right\}.$$

$$\int \sin x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\Delta}F-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}Bg\,tang\,(tang\,x.\sqrt{1-k^2})\right\}.$$

$$\int \sin x.\cos^2 x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\lambda+\frac{\cos x}{\Delta}F-\frac{1}{2k}L\frac{1-k\sin x}{1+k\sin x}\right\}.$$

TAFEL 50.

$$\int \sin x . \cos^p x . F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int \sin x . \cos^{p-2} x . F\frac{dx}{\Delta^4} - \frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^2}F + \int \cos^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}.$$

$$\int \sin x . \cos x . F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2}F - E + \frac{k^2}{\Delta}\sin x . \cos x\right\}.$$

$$\int \sin x . \cos^2 x . F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2}\left\{\mu + \frac{\cos x}{\Delta^2}F - \frac{\sin x}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^4}\left\{-\frac{1-k^2}{\Delta^2}F + E - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} + 2k^2\iota\right\}.$$

TAFEL 51.

$$\int \tan^p x . F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{-[(2p^2-15p+20)-(2p^2-15p+12)k^2]\int \tan^{p-2} x . F dx -\right.$$

$$- [(3p^2-21p+38) - (p-3)^2 k^2]\int \tan^{p-4} x . F dx - (p-4)(p-5)\int \tan^{p-6} x . F dx -$$

$$\left. - [\cos^2 x - (p-2-\cos^2 x)\Delta^2]\frac{\tan^{p-5} x}{\cos^4 x}F - \frac{\tan^{p-4} x}{\cos^2 x}\Delta\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\tan x}F = \delta. \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int \tan x . F dx = \gamma.$$

$$\int \tan^2 x . F dx = -\varepsilon + \tan x . F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}.$$

$$\int \tan^3 x . F dx = -\gamma + \frac{1}{2(1-k^2)}\{E + (1-k^2)\tan x . F - \tan^2 x . \Delta\}.$$

$$\int \tan^4 x . F dx = \varepsilon - \frac{1}{6(1-k^2)}\left\{(3-\tan^2 x)(1-k^2)2\tan x . F + \frac{8-7k^2}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta - 1\right\}.$$

TAFEL 52.

$$\int tang^p x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{p\,(p+1)\,(1-k^2)} \Big\{ -(p-1)^2\,(2-k^2) \int tang^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} -$$

$$-(p-2)(p-3) \int tang^{p-4} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} - [cos^2 x - (p - cos^2 x)\,\Delta^2]\, \frac{tang^{p-3} x}{cos^4 x} F - \frac{tang^p x}{sin^2 x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x} F \frac{dx}{cos^2 x} = -\cot x \,.\, F + L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{1}{tang\, x} F \frac{dx}{cos^2 x} = \gamma + \delta.$$

$$\int F \frac{dx}{cos^2 x} = tang\, x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}.$$

$$\int tang\, x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{2\,(1-k^2)} \{ E + (1-k^2)\, tang\, x \,.\, F - tang^2 x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ 2(1-k^2) tang^3 x . F - \frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} + 1 - \frac{1}{cos^2 x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{12\,(1-k^2)^2} \{ [1 + (1-k^2)\, 3\, tang^4 x\,]\,(1-k^2)\, F -$$

$$-(2-k^2)\, 2E + [(3-k^2) - (1-k^2)\, tang^2 x]\, tang\, x \,.\, \Delta \}.$$

TAFEL 53.

$$\int tang^p x . cos^2 x . F dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11) - (3p^2-13p+19)k^2] \int tang^{p-2} x . cos^2 x . F dx -$$

$$-[(3p-13)(p-4) - (p-3)^2 k^2] \int tang^{p-4} x . cos^2 x . F dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x . cos^2 x . F dx -$$

$$-[\, cos^2 x - \{(p-4) + cos^2 x\}\, \Delta^2]\, \frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x} F - tang^{p-4} x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tg^2 x} cos^2 x . F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon - (2 + sin^2 x) \frac{1}{2} \cot x . F + L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} + \frac{1}{2k^2}(1-\Delta). \qquad \int \frac{1}{tg x} cos^2 x . F dx = \delta - \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 . F \}.$$

$$\int cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x \,.\, \cos x \,.\, F - \frac{1}{k^2}(1-\Delta) \Big\}. \qquad \int tang\, x \,.\, cos^2 x . E dx = \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 . F \}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon - \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{k^2} (1-\Delta) \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, cos^2 x \,.\, F dx = \gamma - \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 \,.\, F \}.$$

$$\int tang^4 x . cos^2 x . F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon + (2 + cos^2 x) \frac{1}{2} tang x . F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x} - \frac{1}{2k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 54.

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-2)^2 - (2p^2 - 10p + 13)k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} F +$$

$$+ (p-3)(p-4) \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} F + [(1-k^2) + (p-3)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\Delta}{\cos^{p-2} x} + 1 \Big\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F dx = \sin x \,.\, F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k}. \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} F = \operatorname{tang} x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2} + \Delta}.$$

TAFEL 55.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ (p-3)^2 (1 - 2k^2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} F dx +$$

$$+ (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} F dx - [\cos^2 x - \{2 + (p-4)\sin^2 x\} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, F dx = -\cos x \,.\, F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x). \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} F dx = \gamma.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} F dx = \frac{1}{\cos x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} \sin x + \Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} F dx = \frac{1}{2(1-k^2)} \{ E + (1-k^2) \operatorname{tang} x \,.\, F - \operatorname{tang}^2 x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} F dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2} \Big\{ (1 - 2k^2) 2E + [1 + 6(1-k^2) \operatorname{tang}^2 x +$$

$$+ 3(1-k^2) \operatorname{tang}^4 x] (1-k^2) F - [(1-k^2) + (1-2k^2) 2 \cos^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 56.

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos^p x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ -[(2p^2-9p+11)-(3p^2-15p+20)k^2] \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-2} x} F -$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-21p+38)k^2] \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-4} x} F - (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-6} x} F -$$

$$-[\cos^2 x + \{2+(p-4)\sin^2 x\} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} F dx = \delta - \frac{1}{2k^2} \{E - \Delta^2 . F\}. \quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} F dx = \beta + \cos x . F - \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x).$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} F dx = \delta. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} F = \gamma + \delta. \quad \int \frac{dx}{\sin x . \cos^2 x} F = \beta + \frac{1}{\cos x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} \sin x + \Delta}{\cos x}.$$

TAFEL 57.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{p(p-2)4k^2} \Big\{ (p-2)^2 8k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x . F dx - [(p-4)^2 + (p-3)^2 4k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ (p-4)(p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F dx + [2(1-k^2) + 2k^2 \cos x - (p-2)\Delta^2] \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \sin x . F + 4 \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} F = -2 \cot \tfrac{1}{2}x . F + 2L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} F = \eta. \qquad \int F dx = \varepsilon.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x . F dx = -2 \cos \tfrac{1}{2}x . F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, z).$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \sin x . F - \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} \right).$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{1}{3}(5 - \cos x) \cos \tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+4k) F(l,z) - 2E(l,z) + \frac{2 \sin \frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon - (4 - \cos x) \sin x . F - \frac{1}{k^2} \Big[4kL \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} + 1 - \Delta \Big] \Big\}.$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{2}{15}(8 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}x + 3 \sin^4 \tfrac{1}{2}x) \cos \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{30k^2\sqrt{2k}} \Big\{ (1 - 12k - 32k^2) F(l,z) +$$

$$+ 24 E(l,z) - \frac{1 + 13k - k\cos x}{1 + k - k\cos x} 2 \sin \tfrac{1}{2}x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 58.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)\,8k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx +$$

$$+(p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx + \Big[\,2\cos x - \big\{(p-5) +$$

$$+(p-1)\cos x\big\}\,\Delta^2\Big]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x} F\,dx = -\frac{2}{\sin\frac{1}{2}x}F - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,y) - \frac{2k-1}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta + \delta.$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = 2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}}F(l,y).$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = -\frac{1}{2}\cos x \,.\, F + \frac{1}{2k}\,Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{2}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,y) - (1-2k)F(l,y) - \frac{2\cos\frac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Big\}.$$

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{8k^2}\big\{(1-2k^2+4k^2\sin^4\tfrac{1}{2}x)\,F - E + 2k\,Bg\sin(k\sin x)\big\}.$$

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{30k^2}\Big\{12k^2\sin^5\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{2k}}\big[16kE(l,y) -$$

$$-(1+8k-12k^2)F(l,y)\big] - 16k\frac{\cos\frac{1}{2}x}{1+k+k\cos x}\Delta + 2\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta - 2\Big\}.$$

TAFEL 59.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2} \Big\{ (p-3)\,12\,k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$-\,[\,(p-5)^2 + (3p^2 - 24p + 49)\,k^2\,] \int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} +$$

$$+\,[(2p^2-23p+67)+(p-5)^2 4k^2] \int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7)\int \sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x.F\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$-\,[\,2\cos x - \{(p-7)+(p-3)\cos x\}\,\Delta^2\,]\,\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,F - 2\sin x\,.\,\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos\frac{1}{2}x} F = 2\beta. \qquad \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta. \qquad \int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - 2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,y).$$

$$\int \frac{\sin^3\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta + \frac{1}{2}\cos x\,.\,F - \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - \frac{1}{3}(7-\cos x)\sin\tfrac{1}{2}x.F - \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2\,E(l,y) - (1-8k)F(l,y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin^5\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta - \frac{1}{8k^2}\{\,[1-(1+6\cos x - \cos^2 x)\,k^2]\,F - E + 6\,k\,Bg\sin(k\sin x)\,\}.$$

$$\int \frac{\sin^6\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - \frac{1}{30k^2}\Big\{(73 - 16\cos x + 3\cos^2 x)\,k^2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,F +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2k}}[36\,k\,E(l,y) - (1+18k-92k^2)F(l,y)] - 36\,k\frac{\cos\frac{1}{2}x}{1+k+k\cos x} + 2\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta - 2\Big\}.$$

TAFEL 60.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{p(p-2)4k^2} \Big\{ (p-2)^2 8 k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . F dx - [(p-4)^2 +$$

$$+ (p-3)^2 k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F dx + (p-4)(p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F dx -$$

$$- [2(1-k^2) - 2k^2 \cos x - (p-2)\Delta^2] \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \sin x . F + 4 \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta - 4 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \tfrac{1}{2} x} F = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x . F + 2 L \frac{2 \sin^2 x}{(1+\Delta)(\Delta - \cos x)}. \qquad \int \frac{dx}{\cos \tfrac{1}{2} x} F = \zeta.$$

$$\int F dx = \varepsilon. \qquad \int \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x . F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, y).$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x . F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+\Delta} \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+4k) F(l,y) - 2E(l,y) + \frac{2 \cos \tfrac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon + (4 + \cos x) \sin x . F + \frac{1}{k^2} \Big[4 k L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} + \Delta - 1 \Big] \Big\}.$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{2}{15} (8 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 \sin^4 \tfrac{1}{2} x \;\; \sin \tfrac{1}{2} x . F -$$

$$- \frac{1}{30 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (1 - 12k - 32k^2) F(l,y) + 24 E(l,y) - \frac{1 + 13k + k\cos x}{1+k+k\cos x} 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} - 2\sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 61.

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)\,8k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx + (p-4)(p-5)\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx +$$

$$+\left[2\cos x + \{(p-5)-(p-1)\cos x\}\,\Delta^2\right]\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}F\,dx = \frac{2}{\cos\frac{1}{2}x}F - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\} - \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = -2\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}}F(l,z).$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = -\frac{1}{2}\cos x \,.\, F + \frac{1}{2k}Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z) - (1-2k)F(l,z) - \frac{2\sin\frac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^3\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{8k^2}\{E - (1-2k^2+4k^2\cos^4\tfrac{1}{2}x)F + 2k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^4\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \frac{1}{30k^2}\Big\{-12k^2\cos^4\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{2k}}\{16kE(l,z) -$$

$$-(1+8k-12k^2)F(l,z)\} - 16k\frac{\sin\frac{1}{2}x}{1+k-k\cos x}\Delta + 2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\}.$$

TAFEL 62.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2} \Big\{ (p-3)^2\, 12\, k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} -$$

$$- [(p-5)^2 - (3p^2 - 24p + 49) 4k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} +$$

$$+ [(2p^2 - 23p + 67) + (p-5)^2 4k^2] \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \cos^{p-8} \tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} +$$

$$+ [2\cos x - \{(p-7) - (p-3)\cos x\}\ \Delta^2]\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, F - 2\sin x \,.\, \cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x \,.\, \cos\frac{1}{2}x} F = 2\beta. \qquad \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} F = \eta. \qquad \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta + \delta.$$

$$\int \frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \eta + 2\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,z).$$

$$\int \frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta + \delta + \frac{1}{2}\cos x \,.\, F - \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int \frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \eta + \frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2E(l,z) - (1-8k)F(l,z) + \frac{2\sin\frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta + \delta + \frac{1}{8k^2} \{ [1 - (1 - 6\cos x - \cos^2 x)\, k^2]\, F - E - 6\,k\, Bg\sin(k\sin x) \}.$$

$$\int \frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F\,dx = \eta + \frac{1}{30k^2} \Big\{ (73 + 16\cos x + 3\cos^2 x)\, k^2 \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2k}} [36\,k\,E(l,z) - (1 + 18\,k - 92\,k^2)\, F(l,z) - 36\,k \frac{\sin\frac{1}{2}x}{1+k-k\cos x}\Delta - 2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 63.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x . F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ -[(2p^2-11p+16)-(p-3)^2 2 k^2] 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . F dx -$$

$$- [(3p^2 - 24p + 50) - (p^2 - 8p + 17) 4 k^2] 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F dx -$$

$$-[(2p^2-21p+56)-(p-5)^2 2 k^2] 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F dx - (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2} x . F dx -$$

$$- [\cos x - (p - 4 - \cos x) \Delta^2] \frac{2 \, tang^{p-7} \tfrac{1}{2} x}{\cos^6 \tfrac{1}{2} x} - \frac{4 \, tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x}{\sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{tg \tfrac{1}{2} x} F = \beta + \delta. \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int tang \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\varepsilon + 2 \, tang \tfrac{1}{2} x . F - 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x}.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F dx = \delta - \beta + \frac{1}{2} \cos x . F + \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x).$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = \varepsilon + \frac{2}{3} \Big\{ -(1 + 2\cos x) \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^3 \tfrac{1}{2} x} F + (2-k^2) 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 \tfrac{1}{2} x} \Delta + 1 \Big\}.$$

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta + \frac{1}{6} \Big\{ (5 - 8k^2 - 3 \cos x + 3 \, tang^4 \tfrac{1}{2} x) F - (1 - 2k^2) 8 E -$$

$$- \frac{3}{k} Bg \sin (k \sin x) + [(1 - 4k^2) + (1 - 2k^2) 2 \cos x] \frac{2 \, tang \tfrac{1}{2} x}{\cos^2 \tfrac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\varepsilon + \frac{1}{15} \Big\{ (13 + 24 \cos x + 23 \cos^2 x) \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{2 \cos^5 \tfrac{1}{2} x} F -$$

$$-(23 - 28k^2 + 18k^4) 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} + [(8 - 9k^2) + (11 - 9k^2) \cos x] \frac{\Delta}{\cos^4 \tfrac{1}{2} x} - (19 - 18k^2) \Big\}.$$

TAFEL 64.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{p(p+1)} \Big\{ -[(3p-4)-(p-1)4k^2](p-1) \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} -$$

$$-[3p-8)-(p-3)4k^2](p-3) \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} -$$

$$- [\cos x - (p-2-\cos x)\Delta^2] \frac{2\, tang^{p-5} \frac{1}{2}x}{\cos^6 \frac{1}{2}x} - \frac{4\, tang^{p-4} \frac{1}{2}x}{\cos^4 \frac{1}{2}x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 \frac{1}{2}x} \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = -2 \cot \tfrac{1}{2}x \, . \, F + 2 L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{1}{tg \frac{1}{2}x} F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = 2\beta.$$

$$\int F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = 2\, tang \tfrac{1}{2}x \, . \, F - 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x}.$$

$$\int tang \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = - \frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2}x} F + 2E - 2\, tang \tfrac{1}{2}x \, . \, \Delta.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2}{3} \Big\{ tang^3 \tfrac{1}{2}x \, . \, F - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} \Delta + 1 + (1-2k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} \Big\}.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{6} \Big\{ (5-8k^2+3\, tang^4 \tfrac{1}{2}x) F - (1-2k^2) 8E + [(1-4k^2)+(1-2k^2)2\cos x] \frac{2\, tang \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x \, . \, F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{5} \Big\{ 2\, tang^5 \tfrac{1}{2}x \, . \, F - 2(1-6k^2+6k^4) L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} +$$

$$+ [(1-3k^2)+(2-3k^2)\cos x] \frac{\Delta}{\cos^4 \frac{1}{2}x} - 3(1-2k^2) \Big\}.$$

B 16

TAFEL 65.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{-1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ [(p-6)(2p-11)-(p-7)^2 2k^2] 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ [3(p-6)^2-(p^2-12p+33)4k^2] 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx + [(p-6)(2p-13) -$$

$$-(p-5)^2 2k^2] 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx + (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ [cos\, x - (p-6+cos\, x)\Delta^2] \frac{4}{sin\, x} tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F + 4\, tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4 \frac{1}{2}x}{tang^2 \frac{1}{2}x} F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon - \frac{1}{8}\Big\{5(4+cos\, x)+4\frac{(1+cos\, x)^2}{1-cos\, x}\Big\} sin\, x . F + 2L\frac{2(\Delta - cos\, x)}{1+\Delta} - \frac{1}{k}L\frac{k\, cos\, x+\Delta}{1+k} - \frac{9}{8k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \frac{cos^4 \frac{1}{2}x}{tang \frac{1}{2}x} F dx = \beta + \delta + \frac{1}{8k^2} \{ [1-(1-6\, cos\, x - cos^2 x)k^2] F - E - 6k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon + (4 + cos\, x) sin\, x . F + \frac{1}{k^2}\Big[4kL\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} + \Delta - 1\Big]\Big\}.$$

$$\int tang \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8k^2} \{ E - (1 - 2k^2 + 4k^2 cos^4 \tfrac{1}{2}x) F + 2k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon + \frac{1}{8}\Big\{5(4-cos\, x) + 4\frac{(1-cos\, x)^2}{1+cos\, x}\Big\} sin\, x . F -$$

$$-2L\frac{(\Delta - cos\, x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} + \frac{1}{k}L\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} - \frac{9}{8k^2}(1-\Delta).$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8k^2} \{(1 - 2k^2 + 4k^2 sin^2 \tfrac{1}{2}x) F - E + 2k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon - (4 - cos\, x) sin\, x . F - \frac{1}{k^2}\Big[4kL\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} - \Delta + 1\Big]\Big\}.$$

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \beta - \delta - \frac{1}{8k^2}\{[1-(1+6\, cos\, x - cos^2 x)k^2]F - E + 6k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x)\}.$$

TAFEL 66.

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2}x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-3)^2 4k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2}x} F - (p-4)^2 8k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2}x} F +$$

$$+ (p-4)(p-6) 4k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2}x} F + [2(1-k^2) - 2k^2 \cos x + (p-4)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2}x} -$$

$$- \frac{4\Delta}{\cos^{p-2} \frac{1}{2}x} + 4 \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2}x \, . \, F dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2}x \, . \, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 4k) F(l, y) -$$

$$- 2E(l, y) + \frac{2 \cos \frac{1}{2}x}{1 + k + k \cos x} \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x \, . \, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x \, . \, F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} \Big\}.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x \, . \, F dx = 2 \sin \tfrac{1}{2}x \, . \, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, y). \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} F = \eta.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 \frac{1}{2}x} F = 2 \tan \tfrac{1}{2}x \, . \, F - 2L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x}.$$

TAFEL 67.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ (p-3)^2 (1+4k^2) \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F\,dx -$$

$$- (p-4)(p-5)\, 8k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F\,dx + (p-5)(p-7)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F\,dx -$$

$$- \left[2 \cos x - \{(p-1) - (p-5) \cos x\} \Delta^2 \right] \frac{1}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} F - \frac{2 \sin x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2E(l,z) - (1-2k) F(l,z) - \frac{2 \sin \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\frac{1}{2} \cos x \,.\, F + \frac{1}{2k} Bg\sin (k \sin x).$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,z). \qquad \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{2}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ F(l,z) + \frac{1-2k}{4k} \Pi(-r,l,z) \Big\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r) 2l (1-\cos x) + \Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F\,dx = -\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F + 2E - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{6} \Big\{ (1+4k^2)\, 4E - \left[(1+8k^2) - 6 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x - 3 \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} x \right] F -$$

$$- \left[2(1+2k^2) + (1+4k^2) \cos x \right] \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 68.

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^p\frac{1}{2}x}F = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)^2 4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F -$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-24p+49)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F +$$

$$+(p-5)^2 12k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-(p-5)(p-7)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}F+$$

$$+[2\cos x+\{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+\frac{1}{30k^2}\Big\{(73+16\cos x+3\cos^2 x)k^2\cos\tfrac{1}{2}x\,.F-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2k}}[36kE(l,z)-(1+18k-92k^2)F(l,z)]+36k\frac{\sin\frac{1}{2}x}{1+k-k\cos x}\Delta-2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta+\frac{1}{2k}\{[1-(1+6\cos x-\cos^2 x)k^2]F-E-6k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

$$\int\frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+\frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z)-(1-8k)F(l,z)\Big\}+\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}.$$

$$\int\frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta+\frac{1}{2}\cos x.F-\frac{1}{2k}Bg\sin(k\sin x).\qquad\int\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+2\cos\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z).$$

$$\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta.\qquad\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}F=\eta.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos\frac{1}{2}x}F=2\beta.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^2\frac{1}{2}x}F=\eta+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}x}F+\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,y)-\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2r(1-\cos x)+\Delta^2}.$$

HOOFDSTUK III.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN, NOG DE ELLIPTISCHE INTEGRAAL DER TWEEDE SOORT, E, BEVATTEN.

1. In het eerste Hoofdstuk zijn evenzeer de noodige bouwstoffen bijeenvergaderd voor de behandeling der herleidingsformule (D), aldaar afgeleid. Langs denzelfden weg als in den aanvang van het tweede Hoofdstuk werd betreden, onder dezelfde opmerkingen, en met dezelfde voorzorgsmaatregelen, leidt men hier een overeenkomstig theorema af. Men vindt toch

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x).\int_0^x dy\sqrt{1-k^2 sin^2 y}\right]=\frac{d.\varphi(x)}{dx}\int_0^x dy\sqrt{1-k^2 sin^2 y}+\varphi(x).\sqrt{1-k^2 sin^2 x},$$

dat is

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x).E\right]=E\frac{d}{dx}\varphi(x)+\varphi(x).\Delta;$$

waaruit volgt, wanneer men deze naar x integreert, tusschen de grenzen 0 en x,

$$\varphi(x).E=\int\varphi(x).\Delta\, dx+\int E\frac{d}{dx}\varphi(x).dx,$$

die wederom oplevert

$$\int E\,dx\frac{d}{dx}\varphi(x)=\varphi(x).E-\int\varphi(x).\Delta\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

In de voorlaatste vergelijking had het eerste lid eigenlijk den vorm $\varphi(x).E\Big/_0^x$; en er is derhalve stilzwijgend aangenomen, dat genoemd produkt voor de waarde $x=0$ verdwijnt. Dit nu is wel het geval met den factor E, maar alsdan mag natuurlijk de factor $\varphi(0)$ niet oneindig groot worden, opdat het produkt $0.\varphi(0)$ niet onbepaald of niet oneindig groot worde; en deze voorwaarde heeft wederom invloed moeten uitoefenen op de keuze der integralen (δ_1) tot (δ_{35}).

Laat ons nu beginnen met de toepassing van dit theorema (**c**) op die verzamelde integralen (δ_1) tot (δ_{35}), als eindintegralen van de algemeene herleidingsformulen (D). Men zal dan achtereenvolgens de volgende vinden, waarbij evenwel niet alle integralen tot verschillende uitkomsten voerden.

$$\int \sin x . \cos x . E\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\left\{ (4-2\,k^2-3\,\Delta^2)\,E - (1-k^2)\,F + k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \quad (121)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,E\,dx = \frac{1}{2}\left\{ (1+\sec^2 x)\,E - F - \operatorname{tang} x . \Delta \right\}, \quad (122)$$

$$\int \sin^3 x . \cos x . E\,dx = \frac{1}{60\,k^4}\left\{ (2+3\,k^2-8\,k^4+15\,k^4 \sin^4 x)\,E - (1-k^2)(1+2\,k^2)\,2\,F + \right.$$

$$\left. + \left[2(1+2\,k^2) - 3\,\Delta^2 \right] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \quad (123)$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . E\,dx = \frac{1}{60\,k^4}\left\{ (1-k^2)(1-3\,k^2)\,2\,F - (2-7\,k^2-3\,k^4+15\,k^4 \cos^4 x)\,E - \right.$$

$$\left. - \left[2(1-3\,k^2) - 3\,\Delta^2 \right] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \quad (124)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,E\,dx = \frac{1}{12\,(1-k^2)}\left\{ (1-k^2)\,4\,F - \left[(7-8\,k^2) - 3\,(1-k^2)\operatorname{tang}^4 x \right] E + \right.$$

$$\left. + \left[4\,(1-k^2) + 4\cos^2 x - 5\,\Delta^2 \right] \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\Delta \right\}, \quad (125)$$

$$\int \cos x . E\,dx = \sin x . E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,k}(1-k^2)\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x . \Delta, \quad (126)$$

$$\int \sin x . E\,dx = -\cos x . E + \frac{1}{2\,k}\,Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x . \Delta, \quad (127)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,E = \operatorname{tang} x . E - 1 - \sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta, \quad (128)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,E\,dx = -\frac{1}{\sin x}\,E + L\,\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}, \quad (129)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,E\,dx = \frac{1}{\cos x}\,E - k\,Bg\sin(k\sin x) - \sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sin x . \sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}, \quad (130)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} E\,dx = -\cot x \,.\, E - 1 + L\,\frac{2\sin x}{1+\Delta} + \Delta, \dots\dots \quad (131)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24\,k^2}\,\{(1-k^2)\,F - [\,4 - 2\,k^2\,(1 - 3\cos x) - 3\,\Delta^2\,]\,E +$$
$$+ 3\,k\,Bg\sin(k\sin x) + (3 - \cos x)\,k^2 \sin x \,.\, \Delta\,\}, \dots\dots \quad (132)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24\,k^2}\,\{[\,4 - 2\,k^2\,(1 + 3\cos x) - 3\,\Delta^2\,]\,E -$$
$$-(1-k^2)\,F + 3\,k\,Bg\sin(k\sin x) + (3 + \cos x)\,k^2\sin x \,.\, \Delta\,\}, \dots\dots \quad (133)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2}x}{\cos^5 \frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{1}{6}\left\{(1-k^2)\,8\,F - (11 + 8\,k^2 - 3\,tang^4 \tfrac{1}{2}x)\,E + \right.$$
$$\left. + 12\,k\,Bg\sin(k\sin x) + [\,(1 + 2\,k^2) + (1 + k^2)\,2\cos x\,]\,\frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2}x}\,\Delta\right\}, \dots\dots \quad (134)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin^3 \frac{1}{2}x} E\,dx = 2\,(1-k^2)\,F - (2 + cosec^2 \tfrac{1}{2}x)\,E - 2\,k\,Bg\sin(k\sin x) - 2\cot \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta, \,. \quad (135)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos^3 \frac{1}{2}x} E\,dx = (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2}x)\,E - (1-k^2)\,2\,F - 2\,k\,Bg\sin(k\sin x) - 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta, \,. \quad (136)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} E = 2\left\{tang\,\tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 - k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - L\,\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \Delta\right\}, \,. \quad (137)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} E = 2\left\{-\cot \tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 + k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L\,\frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} + \Delta\right\}, \,. \quad (138)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos^4 \frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{2}{3}\left\{tang^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E + 3\,k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \right.$$
$$\left. + (1 + 2\,k^2)\,L\,\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} - (1 + \cos^2 \tfrac{1}{2}x)\,\frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2}x} + 2\right\}, \dots\dots \quad (139)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} E\,dx = \frac{1}{12\,(1-k^2)}\left\{(2 - k^2 + \sec^4 x)\,E - (1-k^2)\,2\,F - \right.$$
$$\left. - [\,(3 - 2\,k^2) - (2 - k^2)\sin^2 x\,]\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\Delta\right\}, \dots\dots \quad (140)$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^5\frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{1}{6}\Big\{(4 - 8k^2 + 3\sec^4\tfrac{1}{2}x)E - (1-k^2)4F -$$

$$- [2(1-k^2) + (1-2k^2)\cos x]\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}, \quad (141)$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^7\frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{1}{45}\Big\{(16 + 24k^2 - 64k^4 + 15\sec^6\tfrac{1}{2}x)E - (1+2k^2)(1-k^2)16F -$$

$$-[4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2)2\cos x + 2\cos^2 x + (3-8k^2)\Delta^2]\frac{\sin x}{\cos^6\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}, \quad (142)$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx = 2\sin\tfrac{1}{2}x.E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)F(l,y) + 2kE(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}, \quad (143)$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{2}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}x.E \quad \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1-2k)(1-k)3F(l,y) - (1+2k^2)6E(l,y) -$$

$$-\Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}, \quad (144)$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x} E\,dx = -2\,\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}x.E + \frac{8k\cos\frac{1}{2}x.\Delta}{1+k+k\cos x} + \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{2kF(l,y) -$$

$$-(1+2k)2E(l,y) - \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}, \quad (145)$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.E\,dx = -2\cos\tfrac{1}{2}x.E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) +$$

$$+ \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}, \quad (146)$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x.E\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}x.E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+2k^2)6E(l,z) -$$

$$-(1-2k)(1-k)3F(l,z) + \Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x -$$

$$-\frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}, \quad (147)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E\, dx = 2 \sec \tfrac{1}{2} x . E + \frac{8 k \sin \frac{1}{2} x . \Delta}{1 + k - k \cos x} - \frac{2 \sqrt{2 k}}{1 + 2 k} \Big\{ (1 + 2 k) 2 E (l, z) -$$

$$- 2 k F (l, z) + \frac{1 - 2 k}{4 k} \Pi (- r, l, z) \Big\} - L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2 r) 2 k (1 - \cos x) + \Delta^2} \ldots (148)$$

2. Nu men het theorema (**c**) op de eindintegralen (δ) heeft toegepast, kan men tot de algemeene herleidingsformulen (D_1) tot (D_8) zelve overgaan, maar daartoe zal men beter doen genoemd theorema eerst om te keeren.

$$\int \varphi (x) . \Delta\, d x = \varphi (x) . E - \int E \frac{d \varphi (x)}{d x} d x \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathbf{c}_1)$$

Thans kan men dit theorema rechtstreeks toepassen op elke der integralen van dezelfde soort, die telkens in de herleidingsformulen (D) voorkomen, en daaruit verder eene herleidingsformule opmaken tusschen integralen van denzelfden vorm, die nu den factor E bezitten.

Op die wijze levert de herleidingsformule (D_1)

$$(p+1) k^2 \Big\{ \sin^p x . E - p \int \sin^{p-1} x . \cos x . E\, dx \Big\} = \cos x . \sin^{p-3} x . \Delta^3 + [(p-2) + p k^2] \Big\{ \sin^{p-2} x . E -$$

$$- (p-2) \int \sin^{p-3} x . \cos x . E\, d x \Big\} - (p-3) \Big\{ \sin^{p-4} x . E - (p-4) \int \sin^{p-5} x . \cos x . E\, d x \Big\}.$$

In deze uitkomst moet men nu eerst $p + 1$ voor p stellen, en vervolgens de noodige herleidingen uitvoeren, om ten slotte te verkrijgen

$$\int \sin^p x . \cos x . E\, d x = \frac{1}{(p+1)(p+2) k^2} \Big\{ [(p-1) + (p+1) k^2] (p-1) \int \sin^{p-2} x . \cos x . E\, d x -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . \cos x . E\, d x - [3 \cos^2 x +$$

$$+ \{ 1 - (p + 2) \cos^2 x \} \Delta^2] \sin^{p-3} x . E - \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta^3 \Big\} \ldots (XXXVII)$$

Wanneer men bij deze herleidingsformule de eindintegralen zoekt, vindt men bij evene waarden van p, voor $p = 2$, de integralen (126) en (129), en bij onevene waarden, voor $p = 5$, de integralen (121) en (123).

Vervolgens vindt men door de herleidingsformule (D_2)

*

$$(p+1)k^2 \left\{ \cos^p x . E + p \int \cos^{p-1} x . \sin x . E dx \right\} = \sin x . \cos^{p-3} x . \Delta^3 -$$

$$- [(p-2)-(p-1)2k^2] \left\{ \cos^{p-2} x . E + (p-2) \int \cos^{p-3} x . \sin x . E dx \right\} +$$

$$+ (p-3)(1-k^2) \left\{ \cos^{p-4} x . E + (p-4) \int \cos^{p-5} x . \sin x . E dx \right\}.$$

Ook hier moet men p door $p+1$ vervangen; dan zal er na de noodige herleiding komen

$$\int \sin x . \cos^p x . E dx = \frac{1}{(p+1)(p+2)k^2} \left\{ -[(p-1)-2pk^2](p-1) \int \sin x . \cos^{p-2} x . E dx + \right.$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-4} x . E dx + [3 \cos^2 x -$$

$$\left. - \{ 4-(p+2)\sin^2 x \} \Delta^2] \cos^{p-3} x . E + \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta^3 \right\} \ldots\ldots \text{(XXXVIII)}$$

Voor evene p vindt men hier als eindintegralen voor $p = 2$, de integralen (127) en (130); voor onevene p evenzeer voor $p = 5$, de integralen (121) en (124).

De herleidingsformule (D_3) geeft ons door middel van ons theorema

$$(p-1)(1-k^2) \left\{ \operatorname{tang}^p x . E - p \int \operatorname{tang}^{p-1} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\} = \frac{\operatorname{tang}^{p-2} x}{\sin x . \cos x} \Delta^3 -$$

$$- [(p-2)2 - pk^2] \left\{ \operatorname{tang}^{p-2} x . E - (p-2) \int \operatorname{tang}^{p-3} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\} -$$

$$- (p-3) \left\{ \operatorname{tang}^{p-4} x . E - (p-4) \int \operatorname{tang}^{p-5} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\};$$

welke vergelijking, nadat men eerst $p+1$ in plaats van p heeft gesteld, en vervolgens genoegzaam herleid heeft, eindelijk oplevert

$$\int \operatorname{tang}^p x . E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{p(p+1)(1-k^2)} \left\{ -[(p-1)2-(p+1)k^2](p-1) \int \operatorname{tang}^{p-2} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} - \right.$$

$$- (p-2)(p-3) \int \operatorname{tang}^{p-4} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} - [3 \cos^2 x -$$

$$\left. - (p + \cos^2 x) \Delta^2] \frac{\operatorname{tang}^{p-3} x}{\cos^4 x} E - \frac{\operatorname{tang}^p x}{\sin^2 x} \Delta^3 \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXIX)}$$

Ook hier worden de eindintegralen verschillend, naarmate p even of oneven is: in het eerste geval vindt men voor $p = 2$, de integralen (128) en (131); in het tweede geval voor $p = 5$, de integralen (125) en (122).

Bij de eindintegralen (XXXVII), (XXXVIII) en (XXXIX) merke men op, dat bij evene p voor $p = 2$, de tweede genoemde integraal eigenlijk niet voorkomt, daar zij dan wegens den factor $(p-2)$ verdwijnt.

3. Gaan wij over tot die herleidingsformulen, welke de halve x bevatten, en wel vooreerst tot (D_4), dan vinden wij

$$(p+2)4k^2\left\{\sin^p\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{2}p\int\sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}=-\sin x.\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3+$$

$$+8pk^2\left\{\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{2}(p-2)\int\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}-[(p-4)+(p-2)4k^2]\left\{\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p-4)\int\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}+(p-5)\left\{\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{2}(p-6)\int\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}.$$

Vervang hier ook p door $p+1$, en pas de noodige herleidingen toe, dan zal er komen

$$\int\sin^p\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx=\frac{1}{(p+1)(p+3)4k^2}\left\{(p^2-1)8k^2\int\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx-\right.$$

$$-[(p-3)+(p-1)4k^2](p-3)\int\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx+$$

$$+(p-4)(p-5)\int\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx+[6\cos x-\{(p-5)+(p+3)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.E+$$

$$\left.+2\sin x.\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3\right\}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XL)}$$

Om de eindintegralen te vinden, stelle men eerst, bij evene p, $p = 4$; dan komen er de integralen (144), (143) en (145); en bij onevene p, $p = 5$, waarbij de integralen (132) en (127) komen; wegens den factor $(p-5)$ verdwijnt echter de hier vreemde, onbekende integraal $\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx$.

Langs denzelfden weg levert de herleidingsformule (D_5)

$$(p+2)\,4k^2 \left\{ \cos^p \tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{1}{2}p \int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx \right\} = \sin x\,.\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3 +$$

$$+8pk^2\left\{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.E+\frac{1}{2}(p-2)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}-[(p-4)+(p-2)4k^2]\left\{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(p-4)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\}+(p-5)\left\{\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E+\frac{1}{2}(p-6)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x.E\,dx\right\};$$

en deze vergelijking levert verder na behoorlijke herleiding, wanneer men eerst $p+1$ voor p in de plaats heeft gesteld,

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+3)\,4k^2}\left\{(p^2-1)\,8k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx\,-\right.$$

$$-[(p-3)+(p-1)\,4k^2](p-3)\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx\,+$$

$$+(p-4)(p-5)\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx + [\,6\cos x + \{(p-5)\,-$$

$$\left.-(p+3)\cos x\,\}\,\Delta^2\,]\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E + 2\sin x\,.\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XLI)}$$

Bij de eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen p even en oneven: voor de eerste stelle men $p=4$, dan wordt men gevoerd tot de integralen (147), (146) en (148), welke laatste evenwel wegens den factor $p-4$ verdwijnt. Voor de laatste stelle men $p=5$, waarbij de integralen (133) en (127) te voorschijn komen, en wegens den factor $p-5$, weder de laatste vreemde, hier onbekende, integraal wegvalt.

Eindelijk verkrijgt men door de herleidingsformule (D_6) de volgende

$$(p-1)\left\{\tan g^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}p\int \tan g^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\right\} = \frac{2\tan g^{p-5}\tfrac{1}{2}x}{\cos^4\tfrac{1}{2}x}\,\Delta^3\,-$$

$$-[(3p-7)-(p-4)\,4k^2]\left\{\tan g^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}(p-2)\int \tan g^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\right\}-$$

$$-[(3p-11)-(p-2)\,4k^2]\left\{\tan g^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}(p-4)\int \tan g^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\right\}-$$

$$-(p-5)\left\{\tan g^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}(p-6)\int \tan g^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\right\}.$$

Wanneer men hierin p door $p+1$ vervangt, en verder de noodzakelijke herleidingen uitvoert, zal men ten slotte verkrijgen

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{p(p+1)} \Big\{ -[(3p-4)-(p-3)4k^2](p-1)\int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-[(3p-8)-(p-1)4k^2](p-3)\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x} - (p-4)(p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x} -$$

$$-[3 cos\, x - (p - 2 + cos\, x)\Delta^2]\frac{2 sin^{p-5}\frac{1}{2}x}{cos^{p+1}\frac{1}{2}x} - \frac{4\, tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{cos^4\frac{1}{2}x}\Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XLII)}$$

Als p even is, stelle men $p=4$ voor de eindintegralen: men vindt dan de integralen (139), (137) en (138). Als p oneven is daarentegen, stelle men $p=5$, en vindt dan de integralen (134) en (136), terwijl dan de laatste eene vreemde, onbekende blijft; maar die heeft tot factor $(p-4)(p-5)$, zoodat zij in beide gevallen, voor $p=4$ en $p=5$, geheel verdwijnt.

4. Er blijven nog de beide laatste herleidingsvergelijkingen (D) over, die een cosinus in den noemer bezitten. Daarvan geeft de eerste (D_7)

$$(p-1)(1-k^2)\Big\{\frac{1}{cos^p x}E - p\int\frac{sin\, x}{cos^{p+1} x}E\,dx\Big\} = \frac{sin\, x}{cos^{p-1} x}\Delta^3 +$$

$$+[(p-2)-(p-3)2k^2]\Big\{\frac{1}{cos^{p-2} x}E-(p-2)\int\frac{sin\, x}{cos^{p-1} x}E\,dx\Big\} +$$

$$+(p-5)k^2\Big\{\frac{1}{cos^{p-4} x}E-(p-4)\int\frac{sin\, x}{cos^{p-3} x}E\,dx\Big\}.$$

In deze vergelijking moet men nu $p-1$ stellen in de plaats van p, en verkrijgt dan na behoorlijke herleiding

$$\int\frac{sin\, x}{cos^p x}E\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\Big\{[(p-3)-(p-4)2k^2](p-3)\int\frac{sin\, x}{cos^{p-2} x}E\,dx +$$

$$+(p-5)(p-6)\int\frac{sin\, x}{cos^{p-4} x}E\,dx - [3 cos^2 x - \{4 +$$

$$+(p-6)sin^2 x\}\Delta^2]\frac{1}{cos^{p-1} x}E - \frac{sin\, x}{cos^{p-2} x}\Delta^3\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XLIII)}$$

Ten opzichte van de eindintegralen, komen er bij evene waarden van p, voor $p=4$, de integralen (130) en (127): en evenzeer bij onevene waarden, voor $p=7$ de integralen (140) en (122).

Ten slotte geeft de laatste der algemeene herleidingsvergelijkingen (D), namelijk (D_8), door middel van ons theorema

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p \frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}p\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)4k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(p-2)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}-(p-6)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-4)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}+$$
$$+(p-8)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-6)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\};$$

en deze wordt, als men p door $p-1$ vervangt, en verder even als telkens vroeger herleidt,

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E\,dx=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{[(p-3)+(p-5)4k^2]\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E\,dx-\right.$$
$$-(p-5)(p-7)8k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E\,dx+(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E\,dx-$$
$$\left.-[6\cos x-\{(p-1)-(p-9)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\right\}\;.\;.\;\text{(XLIV)}$$

Als eindintegralen komen hier bij evene p, voor $p=4$, de integralen (148), (146), (147), en bij onevene p, voor $p=7$, de integralen (141) en (136), terwijl wegens den factor $p-7$ de laatste integraal wegvalt, die hier ook onbekend is.

5. Op deze acht herleidingsformulen (XXXVII) tot (XLIV) kan men ook dezelfde herleidingen toepassen, als op het eerste achttal (I) tot (VIII) in Hoofdstuk II, § 10 tot 13 is gedaan. Daarbij is het echter evenzeer noodig een zevental nieuwe transcendenten intevoeren, die van de vorige slechts daarin verschillen, dat zij de functie E, in plaats van de vorige F, bevatten. De vorm der integralen wordt nu evenwel zoo merkelijk eenvoudiger, dat zij in dit zamenstel met volle recht eene plaats verdienen.

Men neme den niet herleiden vorm der vergelijking (XXXVII), zooals zij rechtstreeks ontstaat uit de herleidingsformule (D_1), en voere bij haar de goniometrische herleiding in

$$\sin^l x\,.\cos x=\frac{\sin^l x}{\cos x}\cos^2 x=\frac{\sin^l x}{\cos x}(1-\sin^2 x)=\frac{1}{\cos x}(\sin^l x-\sin^{l+2}x);$$

dan verkrijgt men vooreerst

$$(p+1)k^2 \left\{ \sin^p x \,.\, E - p\left(\int \sin^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} - \int \sin^{p+1} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} \right) \right\} =$$

$$= \cos x \,.\, \sin^{p-3} x \,.\, \Delta^3 + [\,(p-2) + p k^2\,] \left\{ \sin^{p-2} x \,.\, E - \right.$$

$$- (p-2)\left(\int \sin^{p-3} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} - \int \sin^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} \right) \Big\} - (p-3) \left\{ \sin^{p-4} x \,.\, E - \right.$$

$$\left. - (p-4)\left(\int \sin^{p-5} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} - \int \sin^{p-3} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} \right) \right\}.$$

In deze uitkomst stelle men eerst $p-1$ voor p, brenge dan de gelijknamige integralen bijeen, en voere verder de noodige herleidingen uit; dan komt er eindelijk

$$\int \sin^p x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{p\,(p-1)\,k^2} \left\{ [\,(p-3)^2 + (p-1)(2p-3)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} - \right.$$

$$- [\,(2p^2 - 15p + 29) + (p-3)(p-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-4} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} +$$

$$+ (p-4)(p-5) \int \sin^{p-6} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} + [\,3 \cos^2 x + (1 - p \cos^2 x)\,\Delta^2\,] \sin^{p-5} x \,.\, E +$$

$$\left. + \sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta^3 \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(XLV)}$$

Verder gebruike men bij den niet herleiden vorm der herleidingsformule (XXXVIII) de goniometrische herleiding

$$\sin x \,.\, \cos^l x = \frac{\cos^l x}{\sin x} \sin^2 x = \frac{\cos^l x}{\sin x}(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{\sin x}(\cos^l x - \cos^{l+2} x);$$

men vindt alzoo dadelijk

$$(p+1)k^2 \left\{ \cos^p x \,.\, E + p\left(\int \cos^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} - \int \cos^{p+1} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} \right) \right\} =$$

$$= \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3 - [\,(p-2) - (p-1)\,2k^2\,] \left\{ \cos^{p-2} x \,.\, E + \right.$$

$$+ (p-2)\left(\int \cos^{p-3} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} - \int \cos^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} \right) \Big\} + (p-3)(1-k^2) \left\{ \cos^{p-4} x \,.\, E + \right.$$

$$\left. + (p-4)\left(\int \cos^{p-5} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} - \int \cos^{p-3} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} \right) \right\};$$

of, wanneer men eerst p door $p-1$ vervangt, daarop de gelijknamige integralen bij elkander brengt, en weder als boven herleidt,

$$\int cos^p x \,.\, E\frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{-[(p-3)^2-(3p^2-11p+12)k^2]\int cos^{p-2} x \,.\, E\frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ [(2p^2-15p+29)-(3p^2-19p+32)k^2]\int cos^{p-4} x \,.\, E\frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2)\int cos^{p-6} x \,.\, E\frac{dx}{\sin x} - [3\cos^2 x - (4-p\sin^2 x)\Delta^2]\cos^{p-5} x \,.\, E -$$

$$-\sin x \,.\, \cos^{p-4} x \,.\, \Delta^3\Big\} \ldots\ldots \text{(XLVI)}$$

Ten slotte moet men nog in den niet herleiden vorm der herleidingsformule (XXXIX) de goniometrische herleiding

$$\frac{tang^l x}{cos^2 x} = tang^l x\,(1+tang^2 x) = tang^l x + tang^{l+2} x$$

invoeren, om te komen tot de vergelijking

$$(p-1)(1-k^2)\Big\{tang^p x \,.\, E - p\Big(\int tang^{p-1} x \,.\, E\,dx + \int tang^{p+1} x \,.\, E\,dx\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{tang^{p-2} x}{\sin x \,.\, \cos x}\Delta^3 - [(p-2)2 - pk^2]\Big\{tang^{p-2} x \,.\, E -$$

$$-(p-2)\Big(\int tang^{p-3} x \,.\, E\,dx + \int tang^{p-1} x \,.\, E\,dx\Big)\Big\} - (p-3)\Big\{tang^{p-4} x \,.\, E -$$

$$-(p-4)\Big(\int tang^{p-5} x \,.\, E\,dx + \int tang^{p-3} x \,.\, E\,dx\Big)\Big\}.$$

Stelt men in deze uitkomst $p-1$ voor p, en herleidt dan op dezelfde wijze, als reeds vroeger, dan komt er

$$\int tang^p x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\Big\{-[(3p^2-15p+20)-(p-1)(2p-5)k^2]\int tang^{p-2} x . E dx -$$

$$-[(3p^2-21p+38)-(p-1)(p-3)k^2]\int tang^{p-4} x . E dx - (p-4)(p-5)\int tang^{p-6} x . E dx -$$

$$-[3\cos^2 x - (p-1-\sin^2 x)\Delta^2]\frac{\sin^{p-5} x}{\cos^{p-1} x}E - \frac{tang^{p-3} x}{\sin x \,.\, \cos x}\Delta^3\Big\} \ldots\ldots \text{(XLVII)}$$

Zoodra men echter bij deze drie herleidingsformulen de eindintegralen wil opmaken, stoot men dadelijk op onbekende, vreemde integralen, die hier algemeen als nieuwe transcendenten optreden. Deze zijn vooreerst

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1, \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx = \delta_1,$$

dus $\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1;$ $\qquad \int E\,dx = \varepsilon_1; \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$

en deze zijn hier genoegzaam, om alle eindintegralen te kunnen uitdrukken.

Vooreerst voor de herleidingsformule (XLV), en wel bij evene p, voor $p = 6$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1 , \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} E - \int \cos x . E\,dx = \alpha_1 - \sin x . E + \frac{1}{2} -$$
$$- \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L\, \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - \frac{1}{2}\cos x . \Delta, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

met behulp van de integraal (126). Vervolgens

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} E - \int \cos x . E\,dx - \int \sin^2 x . \cos x . E\,dx.$$

Deze laatste verkrijgt men bij de onderstelling $p = 2$ uit de algemeene herleidingsformule (XXXVII)

$$\int \sin^2 x . \cos x . E\,dx = \frac{1}{12k^2}\left\{(1+3k^2)\int \cos x . E\,dx - [3\cos^2 x + (1-4\cos^2 x)\Delta^2]\frac{1}{\sin x} E - \cos x . \Delta^3 + 1\right\},$$

dus volgens de integraal (126)

$$= \frac{1}{24k^2}\left\{ 8k^2 \sin^3 x . E + (1-3k^2) + \frac{1}{k}(1-k^2)(1+3k^2)\, L\, \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \right.$$
$$\left. + (1 + 3k^2 - 2\Delta^2)\cos x . \Delta \right\}; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

en nu verkrijgt men ook

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} E\,dx = \alpha_1 + \frac{1}{24\,k^2} \Big\{ (3 + \sin^2 x)\, 8k^2 \sin x \,.\, E + (1 - 15\,k^2) +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 - k^2)(1 + 15\,k^2)\, L\, \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + (1 + 15\,k^2 - 2\,\Delta^2) \cos x \,.\, \Delta \Big\} . \quad . \quad . \quad (152)$$

Terwijl men voor onevene p stellen moet $p = 5$, en alsdan voor de eindintegralen vindt

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1 \,, \quad \ldots \quad (153)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1, \quad \ldots \quad (154)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \gamma_1 - \frac{1}{6\,k^2} \Big\{ (4 - 2\,k^2 - 3\,\Delta^2)\, E -$$

$$- (1 - k^2)\, F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \Big\}, \quad \ldots \quad (155)$$

waarbij men van de integraal (121) gebruik maakte.

Wat de herleidingsformule (XLVI) aangaat, vindt men als eindintegralen, bij evene waarden van p, voor $p = 6$, de volgende integralen

$$\int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1, \quad \ldots \quad (156)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} E - \int \sin x \,.\, E\,dx = \beta_1 + \cos x \,.\, E - \frac{1}{2\,k}\, Bg \sin(k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta, \quad . \quad (157)$$

waar men tot de integraal (127) zijn toevlucht moet nemen. Daarop volgt

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} E - \int \sin x \,.\, E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx,$$

waarvan de laatste uit de algemeene herleidingsformule (XXXVIII) te verkrijgen is, als men daarin $p = 2$ stelt.

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{12\,k^2} \Big\{ -(1 - 4\,k^2) \int \sin x . E\,dx + [3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x . \Delta^2] \frac{1}{\cos x} E + \sin x . \Delta^3 \Big\},$$

dat is, als men de integraal (127) invoert,

$$= \frac{1}{24\,k^2}\left\{-8\,k^2 \cos^3 x \,.\, E - \frac{1}{k}(1-4\,k^2)\; Bg\,sin(k \sin x) - (1-4\,k^2-2\Delta^2)\sin x \,.\, \Delta\right\}; \;. \quad (158)$$

waardoor nu de vorige formule levert

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\,dx = \beta_1 + \frac{1}{24\,k^2}\left\{(3+\cos^2 x)\, 8\,k^2 \cos x \,.\, E + \frac{1}{k}(1-16\,k^2)\; Bg\,sin\,(k \sin x)\; + \right.$$

$$\left. + (1-16\,k^2-2\,\Delta^2)\sin x \,.\, \Delta\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

Voorts stelle men voor onevene waarden van p ook hier $p = 5$, waardoor men gebracht wordt tot de volgende integralen.

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1, \ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx = \delta_1, \ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \delta_1 - \frac{1}{6\,k^2}\left\{(4-2\,k^2-3\,\Delta^2)E\; - \right.$$

$$\left. -\,(1-k^2)\,F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

waarbij de integraal (121) werd gebruikt.

Eindelijk zoeke men de eindintegralen voor de herleidingsformule (XLVII), en wel eerst voor evene p, als men $p = 6$ stelt. In dit geval komen er de integralen.

$$\int E\,dx = \varepsilon_1\,, \ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

$$\int tang^2 x \,.\, E\,dx = -\int E\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} E = -\,\varepsilon_1 + tang\, x \,.\, E - 1\; -$$

$$-\,\sqrt{1-k^2}\; L\, \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta\,, \ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

volgens de integraal (128). Daarop volgt

$$\int tang^4 x . E\,dx = \int E\,dx - \int \frac{dx}{cos^2 x} E + \int \frac{tang^2 x}{cos^2 x} E\,dx.$$

Deze laatste kan men uit de herleidingsformule (XXXIX) afleiden, waarbij men dan $p = 2$ moet stellen; dit levert

$$\int \frac{tang^2 x}{cos^2 x} E\,dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^4 x} E\,dx = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ -(2-3k^2) \int \frac{dx}{cos^2 x} E - [\,3 cos^2 x -$$

$$-(2 + cos^2 x)\Delta^2\,] \frac{1}{sin\,x\,.\,cos^3 x} E - \frac{1}{cos^2 x}\Delta^3 + 1 \Big\},$$

of, met behulp van de integraal (128),

$$= \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\, 2\, tang^3 x\,.\,E + 3(1-k^2) + (2-3k^2)\sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{cos\,x\,(1+\sqrt{1-k^2})} -$$

$$-(1 + 2 cos^2 x)(1-k^2)\frac{\Delta}{cos^2 x} \Big\}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (164)$$

derhalve is nu

$$\int tang^4 x\,.\,E\,dx = \varepsilon_1 + \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (1 - 4 cos^2 x)(1-k^2) \frac{2\, tang\, x}{cos^2 x} E + 9(1-k^2) +$$

$$+ (8 - 9k^2)\sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{cos\,x\,(1+\sqrt{1-k^2})} - (1 + 8 cos^2 x)(1-k^2)\frac{\Delta}{cos^2 x} \Big\} \quad . \; . \quad (165)$$

Bij onevene waarden van p stelle men $p = 5$, en verkrijgt alzoo

$$\int cot\,x\,.\,E\,dx = \delta_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

$$\int tang\,x\,.\,E\,dx = \gamma_1\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (154)$$

en met behulp van de integraal (122) nog

$$\int tang^3 x . E dx = -\gamma_1 + \frac{1}{2}\{(1 + sec^2 x) E - F - tang\, x . \Delta\} \ldots\ldots\ldots\ldots (166)$$

Wanneer men de hier gevonden integralen (151), (158) en (164) in verband brengt met de vorige integralen (126), (127) en (128), volgt daaruit, na herleiding,

$$\int cos^3 x . E dx = \int cos\, x . E dx - \int sin^2 x . cos\, x . E dx = \frac{1}{24 k^2}\Big\{(2 + cos^2 x)\, 8 k^2 sin\, x . E +$$

$$-(1 + 9k^2) - \frac{1}{k}(1-k^2)(1-9k^2) L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - (1 - 9k^2 - 2\Delta^2) cos\, x . \Delta\Big\}, \ldots (167)$$

$$\int sin^3 x . E dx = \int sin\, x . E dx - \int sin\, x . cos^2 x\, E dx = \frac{1}{24 k^2}\Big\{-(2 + sin^2 x) 8 k^2 cos\, x . E +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 + 8k^2)\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) + (1 + 8k^2 - 2\Delta^2)\, sin\, x . \Delta\Big\}, \ldots\ldots\ldots (168)$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x} E = \int \frac{dx}{cos^2 x} E + \int \frac{tg^2 x}{cos^2 x} E dx = \frac{1}{6(1-k^2)}\Big\{(2 + sec^2 x)(1-k^2)\, 2E - 3(1-k^2) -$$

$$-(4 - 3k^2)\sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{cos\, x(1 + \sqrt{1-k^2})} - (1 - 4 cos^2 x)(1-k^2)\frac{\Delta}{cos^2 x}\Big\}. \ldots (169)$$

6. Dergelijke herleidingen kan men even goed toepassen op die herleidingsformulen, welke in plaats van de geheele x de halve x bevatten, namelijk (XL), (XLI) en (XLII); maar ook hier zal men weder stuiten op enkele vreemde, onbekende eindintegralen, die dan den rol van nieuwe transcendenten vervullen.

Beginnen wij met de herleidingsformule (XL), zooals zij eerst rechtstreeks was afgeleid, dus voor dat zij verder veranderd was, en voeren wij daarbij de goniometrische vergelijking in

$$sin^l \tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x = \frac{sin^l \frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x} cos^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{sin^l \frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x}(1 - sin^2 \tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{cos\frac{1}{2}x}(sin^l \tfrac{1}{2}x - sin^{l+2}\tfrac{1}{2}x);$$

dan verkrijgen wij

$$(p+2)4k^2\left\{ \sin^p \tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}p\left(\int \sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - \int \sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\right)\right\} =$$

$$= -\sin x\,.\,\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3 + 8pk^2\left\{\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}(p-2)\left(\int \sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\right)\right\} - [(p-4)+(p-2)4k^2]\left\{\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-4)\left(\int \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - \int \sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\right)\right\} +$$

$$+ (p-5)\left\{\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{2}(p-6)\left(\int \sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - \int \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\right)\right\}.$$

Ten einde deze in een geschikten vorm te brengen, vervange men eerst p door $p-1$, en brenge vervolgens de gelijknamige integralen bij elkander; dan verkrijgt men na behoorlijke herleiding

$$\int \sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)4k^2}\left\{(p-1)(3p-5)4k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -\right.$$

$$- [(p-5)^2+(p-3)(3p-7)4k^2]\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} + [(2p^3-23p+67)+$$

$$+ (p-3)(p-5)4k^2]\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7)\int \sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$\left. - [6\cos x - \{(p-7)+(p+1)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - 2\sin x\,.\,\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\Delta^3\right\}.\;.\quad \text{(XLVIII)}$$

Evenzoo kan men in de niet herleide algemeene herleidingsformule (XLI) gebruik maken van de goniometrische herleiding

$$\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos^l\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos^l\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\sin^2\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos^l\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}(1-\cos^2\tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}(\cos^l\tfrac{1}{2}x - \cos^{l+2}\tfrac{1}{2}x),$$

en langs dien weg de volgende vergelijking afleiden.

$$(p+2)\,4\,k^2 \left\{ cos^p \tfrac{1}{2}x . E + \frac{1}{2}p \left(\int cos^{p-1} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - \int cos^{p+1} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} \right) \right\} =$$

$$= sin\, x . cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 + 8\,p\,k^2 \left\{ cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E + \frac{1}{2}(p-2) \left(\int cos^{p-3} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int cos^{p-1} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} \right) \right\} - [(p-4) + (p-2)\,4\,k^2] \left\{ cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-4) \left(\int cos^{p-5} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - \int cos^{p-3} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} \right) \right\} + (p-5) \left\{ cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-6) \left(\int cos^{p-7} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - \int cos^{p-5} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} \right) \right\}.$$

Ook hier moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen, daarna de gelijknamige integralen bij elkander brengen; daarop zal eene behoorlijke herleiding de volgende formule opleveren.

$$\int cos^p \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)\,4\,k^2} \left\{ (p-1)(3\,p-5)\,4\,k^2 \int cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - \right.$$

$$- [(p-5)^2 + (p-3)(3\,p-7)\,4\,k^2] \int cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} + [(2\,p^2 - 23\,p + 67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)\,4\,k^2] \int cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int cos^{p-8} \tfrac{1}{2}x \;E \frac{dx}{sin \frac{1}{2}x} -$$

$$\left. - [6\, cos\, x + \{(p-7)-(p+1) cos\, x\} \Delta^2] cos^{p-7} \tfrac{1}{2}x . E - 2\, sin\, x . cos^{p-7} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \right\} . . \text{(XLIX)}$$

Eindelijk gebruike men de goniometrische herleidingsformule

$$\frac{tang^l \frac{1}{2}x}{cos^2 \frac{1}{2}x} = tang^l \tfrac{1}{2}x . sec^2 \tfrac{1}{2}x = tang^l \tfrac{1}{2}x (1 + tang^2 \tfrac{1}{2}x) = tang^l \tfrac{1}{2}x + tang^{l+2} \tfrac{1}{2}x$$

bij den niet herleiden vorm van de algemeene herleidingsformule (XLII), zooals deze rechtstreeks wordt gevonden; dan komt er

B 19

$$(p-1)\left\{ tang^p \tfrac{1}{2} x . E - \frac{1}{2} p \left(\int tang^{p-1} \tfrac{1}{2} x . E dx + \int tang^{p+1} \tfrac{1}{2} x . E dx \right) \right\} =$$

$$= \frac{2\, tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x}{cos^4 \tfrac{1}{2} x} \Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)\, 4 k^2] \left\{ tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x - \frac{1}{2}(p-2) \left(\int tang^{p-3} \tfrac{1}{2} x . E dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int tang^{p-1} \tfrac{1}{2} x . E dx \right) \right\} - [(3p-11)-(p-2)\, 4k^2] \left\{ tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . E - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-4) \left(\int tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x . E dx + \int tang^{p-3} \tfrac{1}{2} x . E dx \right) \right\} - (p-5) \left\{ tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . E - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-6) \left(\int tang^{p-7} \tfrac{1}{2} x . E dx + \int tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x . E dx \right) \right\}.$$

In deze vergelijking stelle men eerst $p-1$ voor p, vereenige dan de gelijkvormige integralen, en voere de noodzakelijke herleidingen uit, zoodat men ten slotte verkrijgt

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \left\{ -[(2p^2 - 11p + 16) - \right.$$

$$- (p-3)(p-5)\, 2k^2]\, 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . E dx - [(3p^2 - 24p + 50) -$$

$$- (p-3)(p-5)\, 4k^2]\, 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . E dx - [(2p^2 - 21p + 56) -$$

$$- (p-3)(p-5) 2k^2]\, 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . E dx - (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2} x . E dx -$$

$$\left. - [3 \cos x - (p - 4 + \cos x)\Delta^2] \frac{2 \sin^{p-7} \tfrac{1}{2} x}{\cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x} E - \frac{4\, tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x}{cos^4 \tfrac{1}{2} x} \Delta^3 \right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(L)}$$

Zoodra men hier bij deze drie algemeene herleidingsformulen de eindintegralen bepalen wil, treden er weder eenige vreemde, onbekende integralen als nieuwe transcendenten op, namelijk

$$\int \frac{dx}{\cos \tfrac{1}{2} x} E = \zeta_1, \qquad \int \frac{dx}{\sin \tfrac{1}{2} x} E = \eta_1, \qquad \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1,$$

$$\int \frac{\cos \tfrac{1}{2} x}{\sin \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 + \delta_1, \qquad \int \frac{dx}{\sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x} E = 2 \beta_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Zoo vindt men voor de eindintegralen van de herleidingsformule (XLVIII), als men vooreerst p even onderstelt, voor $p = 8$, de integralen

$$\int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E = \zeta_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (170)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \zeta_1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2kE(l,y) + (1-k)F(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \ldots (171)$$

met behulp van de integraal (143);

$$\int \frac{\sin^4 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \zeta_1 - \frac{1}{3}(7 - \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \left\{ (1-k)(1-12k) 3F(l,y) - (1+12k^2) 6E(l,y) - \right.$$

$$\left. - \left[(1+44k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+40k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, . (172)$$

wanneer men daarbij gebruik maakt van de integraal (144).

Verder is nog

$$\int \frac{\sin^6 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^4 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx.$$

Ten einde deze laatste integraal te bepalen, stelle men $p = 4$ in de herleidingsformule (XL)

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{140 k^2} \left\{ 120 k^2 \int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx - \right.$$

$$\left. - (1 + 12k^2) \int \cos \tfrac{1}{2} x . E dx + [6 \cos x + (1 - 7\cos x) \Delta^2] \frac{E}{\sin \frac{1}{2} x} + 2 \frac{\sin x}{\sin \frac{1}{2} x} \Delta^3 \right\},$$

of, met invoering van de integralen (144) en (143),

$$= \frac{1}{35 k^2} \left\{ 14 k^2 \sin^5 \tfrac{1}{2} x . E - \frac{1}{3\sqrt{2k}} \left[(1 + 12k - 12k^2)(1-k) F(l,y) - \right. \right.$$

$$- (11 + 12k^2) 2k E(l,y) - [(-1 + 4k + 44k^2 + 16k^3) - 16(1+k)k^2 \cos x -$$

$$\left. \left. - 3\Delta^3 - 2k \frac{(15 + 20k + 28k^2) - (1+4k) 2\Delta^2}{1+k+k\cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right] \right\}; \ldots (173)$$

*

en hiermede wordt nu de vorige integraal

$$\int \frac{\sin^6 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \zeta_1 + \frac{1}{315 k^3} \Big\{ - (73 - 16 \cos x + 3 \cos^2 x) \frac{21}{2} k^3 \sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2k}} \Big[(1 + 26 k - 180 k^2)(1 - k) 3 F(l, y) - (5 + 36 k^2) 30 k E(l, y) +$$

$$+ [- (3 - 26 k - 728 k^2 - 104 k^3) + 104 (1 + k) k^2 \cos x + 9 \Delta^3 -$$

$$- 2k \frac{(63 + 95 k + 364 k^2) - (1 + 4 k) 13 \Delta^2}{1 + k + k \cos x}] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big] \Big\} \ldots\ldots\ldots (174)$$

Wanneer men daarentegen p oneven onderstelt, dan komen er als eindintegralen, voor $p = 7$, de integralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} E = 2 \beta_1, \ldots\ldots\ldots (175)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1, \ldots\ldots\ldots (176)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos x . E - \frac{1}{4 k} Bg \sin (k \sin x) - \frac{1}{4} \sin x . \Delta , \ldots\ldots\ldots (177)$$

volgens de integraal (127);

$$\int \frac{\sin^5 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{24 k^2} \Big\{ [4 - (1 - 9 \cos x) 2 k^2 - 3 \Delta^2] E - (1 - k^2) F - 9 k Bg \sin (k \sin x) -$$

$$- (9 - \cos x) k^2 \sin x . \Delta \Big\} , \ldots\ldots\ldots (178)$$

wanneer men daarbij de integraal (132) invoert.

Ten aanzien van de eindintegralen voor de algemeene herleidingsformule (XLIX) kan men op soortgelijke wijze te werk gaan; men neme vooreerst p even aan, en onderstelle daartoe $p = 8$, zoo komen er de integralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} E = \eta_1 \, , \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (179)$$

$$\int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} E - \int \sin \frac{1}{2} x . E dx = \eta_1 + 2 \cos \frac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{4}{3 \sqrt{2k}} \left\{ 2 k E(l, z) + (1 - k) F(l, z) + \frac{1 - k - k \cos x}{1 + k - k \cos x} \sin \frac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \ldots (180)$$

na invoering van de integraal (146); terwijl die van dezelfde en van de integraal (147) noodig is bij de volgende

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx - \int \cos^2 \frac{1}{2} x . \sin \frac{1}{2} x . E dx = \eta_1 + \frac{1}{3} (7 + \cos x) \cos \frac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \left\{ (1 + 12 k^2) 6 E(l, z) - (1 - k)(1 - 12 k) 3 F(l, z) + \right.$$

$$\left. + \left[(1 + 44k + 4k^2) - (1 + k) 4k \cos x - \frac{2(4 + 5k + 40k^2) - (1 + 4k) \Delta^2}{1 + k - k \cos x} \right] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\} . . (181)$$

Vervolgens is

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx - \int \cos^4 \frac{1}{2} x . \sin \frac{1}{2} x . E dx.$$

Deze laatste integraal echter kan men afleiden uit de algemeene herleidingsformule (XLI) voor $p = 4$.

$$\int \sin \frac{1}{2} x . \cos^4 \frac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{140 k^2} \left\{ 120 k^2 \int \sin \frac{1}{2} x . \cos^2 \frac{1}{2} x . E dx - \right.$$

$$\left. - (1 + 12 k^2) \int \sin \frac{1}{2} x . E dx + [6 \cos x - (1 + 7 \cos x) \Delta^2] \frac{E}{\cos \frac{1}{2} x} + 2 \frac{\sin x}{\cos \frac{1}{2} x} \Delta^3 \right\} =$$

$$= \frac{1}{35 k^2} \left\{ - 14 k^2 \cos^5 \frac{1}{2} x . E + \frac{1}{3 \sqrt{2k}} \left[(11 + 12 k^2) 2 k E(l, z) - \right. \right.$$

$$- (1 + 12 k - 12 k^2)(1 - k) F(l, z) + [(- 1 + 4 k + 44 k^2 + 16 k^3) -$$

$$\left. \left. - 16(1 + k) k^2 \cos x + 3 \Delta^3 - 2 k \frac{(15 + 20 k + 28 k^2) - (1 + 4 k) 2 \Delta^2}{1 + k - k \cos x}] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right] \right\}, . (182)$$

bij welke herleiding men zich van de integralen (146) en (147) heeft bediend; en nu volgt ook dadelijk

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \eta_1 + \frac{1}{315 k^3} \Big\{ 21 (73 + 16 \cos x + 3 \cos^2 x) \frac{1}{2} k^2 \cos \tfrac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2k}} \Big[(5 + 36 k^2) 30 k E(l, z) - (1 + 26 k - 180 k^2) 3 (1 - k) F(l, z) +$$

$$+ [-(3 - 26 k - 728 k^2 - 104 k^3) - 104 (1 + k) k^2 \cos x + 9 \Delta^2 -$$

$$- 2 k \frac{(63 + 95 k + 364 k^2) - (1 + 4 k) 13 \Delta^2}{1 + k - k \cos x}] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big] \Big\} \ldots \ldots (183)$$

Verder neme voor de onevene waarden van p, hier $p = 7$, dan verschijnen er de integralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} E = 2 \beta_1 , \ldots \ldots (175)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \beta_1 + \delta_1 , \ldots \ldots (184)$$

$$\int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \beta_1 + \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos x . E - \frac{1}{4 k} Bg \sin (k \sin x) - \frac{1}{4} \sin x . \Delta , \ldots \ldots (185)$$

wanneer men daarbij de integraal (127) gebruikt; en eindelijk evenzeer met behulp der integraal (133)

$$\int \frac{\cos^5 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = \beta_1 + \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{24 k^2} \{ [-4 + 2 k^2 (1 - 9 \cos x) + 3 \Delta^2] E + (1 - k^2) F - 9 k Bg \sin (k \sin x) -$$

$$- (9 + \cos x) k^2 \sin x . \Delta \} . \ldots \ldots (186)$$

Ten slotte heeft men nog de eindintegralen te zoeken voor de herleidingsformule (L), altijd op dezelfde wijze; dat is, men beginne met evene waarden van p en stelle daartoe $p = 8$, dan wordt men teruggevoerd tot de integralen

$$\int E dx = \varepsilon_1 , \ldots \ldots (162)$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = -\int E\,dx + \int \frac{dx}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} E = -\,\varepsilon_1 + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x \,.\, E\, -$$

$$-\,2\,k\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 2\,L\,\frac{(\Delta - \cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} + 2\,\Delta - 2\,, \ldots\ldots\ldots \quad (187)$$

met behulp der integraal (137); terwijl deze en de integraal (139) evenzeer noodig bevonden worden voor de integraal

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = -\int tang^2 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx + \int \frac{sin^2 \tfrac{1}{2}x}{cos^4 \tfrac{1}{2}x} E\,dx = \varepsilon_1 + \frac{2}{3}\Big\{ -(1+2\cos x)\,\frac{tang\,\tfrac{1}{2}x}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} E +$$

$$+\,2\,(2+k^2)\,L\frac{(\Delta - \cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x} + 6\,k\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - (3+2\cos x)\,\frac{\Delta}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} + 5 \Big\} \ldots (188)$$

Daarop volgt

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = -\int tang^4 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx + \int \frac{tang^4 \tfrac{1}{2}x}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} E\,dx,$$

en deze laatste moet men eerst uit de algemeene herleidingsformule (XLII) afleiden voor $p = 4$; deze bewerking levert dan

$$\int \frac{tang^4 \tfrac{1}{2}x}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} E\,dx = \int \frac{sin^4 \tfrac{1}{2}x}{cos^6 \tfrac{1}{2}x} E\,dx = \frac{1}{20}\Big\{ -(8-4\,k^2)\,3\int tang^2 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,\frac{dx}{cos^2 \tfrac{1}{2}x}\, -$$

$$-\,(4-12\,k^2)\int E\,\frac{dx}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} - [\,3\cos x - (2+\cos x)\,\Delta^2\,]\,\frac{2}{sin\,\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^5 \tfrac{1}{2}x}\, -$$

$$-\,4\,\frac{\Delta^3}{cos^4 \tfrac{1}{2}x} + 4 \Big\} = \frac{1}{10}\Big\{ -[\,(3-4\,k^2) - (1+2\,k^2)\cos x\,]\,2\,\frac{tang\,\tfrac{1}{2}x}{cos^2 \tfrac{1}{2}x} E\, -$$

$$-\,20\,k\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - (1+6\,k^2 - 2\,k^4)\,4\,L\frac{(\Delta - \cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x}\, -$$

$$-\,2\,(5+2\,k^2) - [\,3\cos x - (2+\cos x)\,\Delta^2\,]\,\frac{1}{sin\,\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^5 \tfrac{1}{2}x} + [\,(3+2\,k^2) +$$

$$+\,(3+k^2)\,2\cos x + cos^2 x\,]\,\frac{\Delta}{cos^4 \tfrac{1}{2}x}\Big\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

waarbij de invoering van de integralen (139) en (137) noodig blijkt te zijn; en nu volgt door middel van deze uitkomst ook

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \varepsilon_1 + \frac{1}{30} \Big\{ [(1 + 12 k^2) + (23 + 6 k^2) \cos x] \, 2 \frac{tang \tfrac{1}{2} x}{\cos^2 \tfrac{1}{2} x} E -$$

$$- 180 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - (23 + 28 k^2 - 6 k^4) \, 4 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} -$$

$$- 2 (65 + 6 k^2) - [3 \cos x - (2 + \cos x) \Delta^2] \frac{3}{\sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos^5 \tfrac{1}{2} x} - [3 (13 + 2 k^2) +$$

$$+ (34 + 3 k^2) \, 2 \cos x + 23 \cos^2 x] \frac{\Delta}{\cos^4 \tfrac{1}{2} x} \Big\} \dots\dots\dots\dots\dots (190).$$

Wanneer men vervolgens de eindintegralen voor onevene waarden van p wil zoeken, onderstelle men $p = 7$, dan vindt men de volgende integralen

$$\int \frac{\cos \tfrac{1}{2} x}{\sin \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 + \delta_1, \dots\dots\dots\dots\dots (184)$$

$$\int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1, \dots\dots\dots\dots\dots (176)$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \int tang \tfrac{1}{2} x . E dx + \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^3 \tfrac{1}{2} x} E dx =$$

$$= \delta_1 - \beta_1 + (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2} x) E - (1 - k^2) \, 2 F - 2 k \, Bg \sin (k \sin x) - 2 \, tang \tfrac{1}{2} x . \Delta, \dots (191)$$

volgens de integraal (136); eindelijk de integraal (134) gebruikende,

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \int tang^3 \tfrac{1}{2} x . E dx + \int \frac{\sin^3 \tfrac{1}{2} x}{\cos^5 \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{6} \Big\{ (1 - k^2) \, 20 F - \left[(23 + 8 k^2) - \frac{3}{4 \cos^4 \tfrac{1}{2} x} (3 + 6 \cos x - \cos^2 x) \right] E +$$

$$+ 24 k \, Bg \sin (k \sin x) + [(7 + 2 k^2) + (4 + k^2) \, 2 \cos x] \frac{\sin x}{\cos^6 \tfrac{1}{2} x} \Delta \Big\} \dots\dots (192)$$

7. Eindelijk kan men nog eene dergelijke herleiding toepassen bij de algemeene herleidingsformule (XLIII) en (XLIV), die beide eene macht van cosinus in den noemer hebben.

De goniometrische formule

$$\frac{\sin x}{\cos^l x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x . \cos^l x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x . \cos^l x} = \frac{1}{\sin x . \cos^l x} - \frac{1}{\sin x . \cos^{l-2} x}$$

moet men aanwenden bij de verandering der herleidingsformule (XLIII), en wel op de oorspronkelijke gedaante, zooals zij rechtstreeks was afgeleid. Dit geeft dan

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{1}{\cos^p x}E - p\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p+1}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-1}x}E\right)\right\} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta^3 + [(p-2)-(p-3)\,2k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}x}E -\right.$$

$$-(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-1}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-3}x}E\right)\Big\} + (p-5)k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}x}E -\right.$$

$$\left.-(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-3}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-5}x}E\right)\right\}.$$

Vervangt men in deze vergelijking p door $p-1$, brengt men de integralen bijeen, waarin dezelfde machten van $\cos x$ voorkomen, en herleidt men, zoo is

$$\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^p x}E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)-$$

$$-(3p^2-17p+26)\,4k^2]\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-2}x}E - [(p-3)^2-$$

$$-(3p^2-25p+54)k^2]\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-4}x}E + (p-5)(p-6)k^2\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-6}x}E-$$

$$-[3\cos^2 x - \{4+(p-6)\sin^2 x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}x} - \frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta^3\Big\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{LI})$$

Voor evene p kan men als eindintegralen gebruiken, wanneer men $p=2$ stelt, de vroeger gevonden integralen (159), (157) en (156); voor onevene p daarentegen, als men $p=3$ stelt, de integralen (161), (160), (153).

Er blijft nu slechts de herleidingsformule (XLIV) over: in hare rechtstreeks gevonden, niet herleide gedaante voere men nu de goniometrische vergelijking in

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^l\frac{1}{2}x} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{l-2}\frac{1}{2}x}\right),$$

dan verkrijgt men

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p \frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}p\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)4k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}-(p-6)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}+$$

$$+(p-8)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-6)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-7}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}.$$

In deze vergelijking moet men vooreerst $p-1$ voor p in de plaats stellen, daarop de gelijknamige integralen bijeenvoegen, en eindelijk de noodige herleidingen uitvoeren, om te komen tot de volgende herleidingsformule.

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^p\frac{1}{2}x}E=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)(p-5)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$

$$-[(p-3)^2+(p-5)(3p-17)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E+$$

$$+(p-7)(3p-19)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-$$

$$-(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}E-[6\cos x-\{(p-1)-$$

$$\left.-(p-7)\cos x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LII)}$$

Voor de eindintegralen vindt men hier voor evene p, als men $p=2$ stelt, de integralen (183), (181), (180) en (179) terug: en onevene p, als men $p=3$ stelt, evenzeer de vroegere integralen (186), (185), (184) en (175).

8. Voordat wij verder gaan, willen wij eerst de gebezigde nieuwe transcendenten iets nader beschouwen. Men kan op alle de methode van het gedeeltelijk integreeren toepassen, en daarna nog soms die van het ontwikkelen van een factor onder het integraalteeken in eene reeks.

$$\alpha_1=\int\frac{dx}{\cos x}E=\int E\,dx\frac{d}{dx}.Ltang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)=E.Ltang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)-\int Ltang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right).\Delta dx=$$

$$=E.Ltang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)-2\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\int\sin(2n+1)x.\Delta dx,\ldots\ldots\ldots \text{(149)}$$

$$\beta_1 = \int \frac{dx}{\sin x} E = \int E dx \frac{d}{dx}. L\,tang\,\tfrac{1}{2}x = E.L\,tang\tfrac{1}{2}x - \int L\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta\,dx =$$

$$= E.Ltang\tfrac{1}{2}x - 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\int \cos(2n+1)x.\Delta\,dx\,, \ldots \ldots \ldots \ldots (156)$$

$$\gamma_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} E dx = -\int E dx \frac{d}{dx}.L\cos x = -E.L\cos x + \int L\cos x.\Delta\,dx = -E.L\cos x +$$

$$+\int \Delta\,dx\Big[-L2 - \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\cos 2nx}{n}\Big] = -E.L(2\cos x) - \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}\int \cos 2nx.\Delta\,dx,\ . \ (154)$$

$$\delta_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \int E dx \frac{d}{dx}.L\sin x = E.L\sin x - \int L\sin x.\Delta dx = E.L\sin x - \int \Delta dx\Big[-$$

$$-L2 - \sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{n}\Big] = E.L(2\sin x) + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\int \cos 2nx.\Delta\,dx\,, \ldots \ldots \ldots (160)$$

$$\varepsilon_1 = \int E dx = x.E - \int x.\Delta\,dx, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (162)$$

$$\zeta_1 = \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} E = 2\int E dx \frac{d}{dx}.Ltang\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}x\Big) = 2E.L\,tang\,\tfrac{1}{4}(\pi + x) -$$

$$-2\int Ltang\tfrac{1}{4}(\pi+x).\Delta dx = 2E.Ltang\tfrac{1}{4}(\pi+x) - 4\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\int \sin(2n+1)\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\,,\ . \ (170)$$

$$\eta_1 = \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} E = 2\int E dx \frac{d}{dx}.Ltang\,\tfrac{1}{4}x = 2E.Ltang\,\tfrac{1}{4}x - \int Ltang\,\tfrac{1}{4}x.\Delta\,dx =$$

$$= 2E.Ltang\,\tfrac{1}{4}x - 4\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\int \cos(2n+1)\tfrac{1}{2}x.\Delta\,dx; \ldots \ldots \ldots (179)$$

uit welke uitkomsten duidelijk blijkt, dat de integralen α_1 tot η_1 werkelijk nieuwe transcendenten zijn.

9. Ook bij deze soort van integralen kunnen wij overgaan tot het onderzoek van zulke, die behalve de elliptische integraal E, ook nog eene zekere macht van Δ onder het integraalteeken als factor bezitten. Is die macht eene onevene, zoo wordt de integraal in dit opzicht irrationeel; is zij eene evene, dan blijft de integraal daarentegen rationeel. Met dit doel voor oogen, vindt men door de methode van gedeeltelijk integreeren

*

$$\int \varphi(x)\frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}E - \int E\,dx\left[\frac{1}{\Delta^{n-2}}\frac{d}{dx}.\varphi(x) - \varphi(x)\frac{n-2}{2}\frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^n}\right] =$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}E - \int\frac{dx}{\Delta^n}E.\left[\Delta^2\frac{d}{dx}.\varphi(x) + (n-2)k^2 sin\,x . cos\,x . \varphi(x)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

bij welke herleiding ondersteld is, dat de term buiten het integraalteeken, $\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}E$, voor $n = 0$ verdwijnt, hetgeen met den factor E het geval is. De bruikbaarheid van deze herleidingsformule hangt echter geheel af van den vorm, dien de grootheid tusschen haakjes in de laatste integraal verkrijgt, en deze is wederom afhankelijk van iederen vorm van de functie φ.

Beginnen wij nu met de onderstelling $\varphi(x) = sin^{p+1}x$, dan verkrijgt de herleidingsformule (d) de gedaante

$$\int sin^{p+1}x . \frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}E - \int E\frac{dx}{\Delta^n}\{\Delta^2(p+1)sin^p x . cos\,x + (n-2)k^2 sin^{p+2}x . cos\,x\}, . \quad (K)$$

$$= \frac{sin^{p+1}}{\Delta^{n-2}}E - \int E\frac{dx}{\Delta^n}sin^p x . cos\,x . \{(p+1) + (n-p-3)k^2 sin^2 x\}, \ldots . (K_1)$$

$$= \frac{sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}E - \int E\frac{dx}{\Delta^n}sin^p x . cos\,x . \{(n-2) - (n-p-3)\Delta^2\}. \ldots\ldots (K_2)$$

De beide laatste herleidingen zijn daarin onderscheiden, dat in de eerste (K_1) de exponent n en in de tweede (K_2) de p standvastig blijft; en dus omgekeerd in de eerste de p, in de tweede daarentegen de n verandert, en wel beide exponenten telkens met 2.

Een oppervlakkige blik op beide doet ons zien, dat zij zeer worden vereenvoudigd door de onderstelling $p = n - 3$, omdat alsdan een der termen onder het integraalteeken in het tweede lid verdwijnt, en alzoo de eenig overgeblevene dadelijk kan opgelost worden, waarbij beide hetzelfde leveren.

$$(n-2)\int sin^{n-3}x . cos\,x . E\frac{dx}{\Delta^n} = \frac{sin^{n-2}x}{\Delta^{n-2}}E - \int sin^{n-2}x\frac{dx}{\Delta^{n-3}}. \ldots . (K_3)$$

Maar ook de vergelijkingen (K_1) en (K_2) kunnen zelve opgelost worden, en alsdan komt er, nadat bij de eerste de p door $p - 2$ vervangen geworden is,

$$\int sin^p x . cos\,x . E\frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{n-2}\left\{\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}E - \int sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^{n-3}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3)\int sin^p x . cos\,x . E\frac{dx}{\Delta^{n-2}}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (K_4)$$

$$=\frac{1}{(n-p-1)k^2}\left\{\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{n-2}}E-\int\sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^{n-2}}-(p-1)\int\sin^{p-2}x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta^n}\right\}..\text{(LIII)}$$

Beide algemeene herleidingsformulen kan men, naar de behoefte, tot zeer verschillende oogmerken nuttig gebruiken, en alzoo ons doel bereiken, om voor bepaalde waarden van n niet alleen de herleidingsvergelijking, maar evenzeer ook de daarbij behoorende eindintegralen afteleiden.

Vooreerst stelle men daartoe $n=3$, $=1$ en $=-1$ in de bijzondere vergelijking (K_3), zoo verkrijgt men

$$\int\cos x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{\sin x}{\Delta}E-\int\sin x.dx=\frac{\sin x}{\Delta}E+\cos x-1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (193)$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}E\frac{dx}{\Delta}=-\frac{\Delta}{\sin x}E+\int\Delta^2\frac{dx}{\sin x}=-\frac{\Delta}{\sin x}E+\int\left(\frac{1}{\sin x}-k^2\sin x\right)dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{\sin x}E+k^2\cos x-k^2+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (194)$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}E.\Delta\,dx=\frac{1}{3}\left\{-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}E+\int\Delta^4\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{1}{3}\right\{-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}E+$$

$$+\int\left(\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{2k^2}{\sin x}+k^4\sin x\right)dx\left\}=\frac{1}{3}\right\{-\frac{\Delta^3}{\sin^3 x}E+$$

$$+\frac{1}{2}(1-4k^2)\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x+k^4-(1+2k^4\sin^2 x)\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (195)$$

Bij de herleidingsformule (K_4) zijn deze integralen alleen te gebruiken, wanneer p even is, maar niet voor onevene p, wegens den factor $n-2$; alsdan moet men de afzonderlijke integralen telkens rechtstreeks trachten te vinden, als volgt.

$$\int\sin x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\int E\,dx\frac{d}{dx}.\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\Delta}E-\int\frac{1}{\Delta}\Delta\,dx\right\}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\Delta}E-x\right),\ .\ (196)$$

$$\int\sin x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k^2}\int E\,dx\frac{d}{dx}.\Delta=-\frac{1}{k^2}\left\{\Delta.E-\int\Delta.\Delta\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\{-2\Delta.E+(2-k^2)x+k^2\sin x.\cos x\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (197)$$

Voor de volgende integraal, stelle men eerst $n = 3$ en $= 1$ in de herleidingsformule (K_4)

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin^{p+1} x}{\Delta} E - \int \sin^{p+1} x \, dx - p \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta}, \;\ldots\; (K_5)$$

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = -\sin^{p+1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int \sin^{p+1} x \,.\, \Delta^2 \, dx + (p+2) \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, \Delta \, dx, \,.\, (K_6)$$

welke laatste vergelijking voor $p = 1$, en wanneer men dan daarin de integraal (197) overbrengt, voor ons doel oplevert

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3} \left\{ \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} + \sin^2 x \,.\, \Delta \,.\, E - \int \sin^2 x \,.\, \Delta^2 \, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{24 k^2} \left\{ -8 \Delta^3 \,.\, E + (8 - 8k^2 + 3k^4) x + [\,3(2 - k^2) + 2\Delta^2\,]\, k^2 \sin x \,.\, \cos x \right\} \,..\, (198)$$

Nu is men zoo verre gereed gekomen, dat men met vrucht in de algemeene herleidingsformule (LIII) $n = 3$, $= 1$ en $= -1$ kan stellen, om het volgende stel te erlangen.

$$\int \sin^p x.\cos x.E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2} \left\{ -\frac{\sin^{p-1} x}{\Delta} E + \int \sin^{p-1} x \, dx + (p-1) \int \sin^{p-2} x.\cos x.E \frac{dx}{\Delta^3} \right\}, \ldots (LIV)$$

$$\int \sin^p x.\cos x.E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ -\sin^{p-1} x.\Delta.E + \int \sin^{p-1} x.\Delta^2 dx + (p-1) \int \sin^{p-2} x.\cos x.E \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (LV)$$

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{(p+2) k^2} \left\{ -\sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^4 \, dx + \right.$$

$$\left. + (p-1) \int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, \Delta \, dx \right\}. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (LVI)$$

Wat de eindintegralen aangaat voor dit drietal herleidingsformulen: wanneer de exponent p onevene waarden heeft, zoo komt men voor $p = 3$ tot de integralen (196), (197) en (198). Maar wanneer de p daarentegen evene waarden heeft, kunnen de voorafgaande integralen (193), (194) en (195) niet dienen als eindintegralen, omdat voor $p = 2$, $= 0$ en $= -2$, de overeenkomstige herleidingsformulen (LIV), (LV) en (LVI) oneindige, of liever onbepaalde, uitkomsten opleveren. Het is dus noodzakelijk die integralen zelve rechtstreeks te bepalen.

$$\int sin^2 x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int (1 - \Delta^2) cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \int cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} - \int cos x . E \frac{dx}{\Delta} \right\},$$

$$\int \frac{cos x}{sin^2 x} E . \Delta dx = \int \frac{1 - k^2 sin^2 x}{sin^2 x} \frac{cos x}{\Delta} E dx = \int \frac{cos x}{sin^2 x} E \frac{dx}{\Delta} - k^2 \int cos x . E \frac{dx}{\Delta}.$$

In beide herleidingen zijn de eerste integralen de zoo even vermelde; maar de laatste is telkens dezelfde, die bij de herleidingsformule (LV) voor $p = 0$ ontstaat. Men kan haar wel vervormen door gedeeltelijke integratie, en wel aldus

$$\int cos x . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{\Delta} E \frac{d}{dx} . (k \sin x) = \frac{1}{k} \int E dx \frac{d}{dx} . Bg \sin (k \sin x) =$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ E . Bg \sin (k sin x) - \int Bg \sin (k \sin x) . \Delta dx \right\} = \theta_1 ; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (199)$$

maar, zooals men duidelijk inziet, blijft zij toch eene afzonderlijke nieuwe transcendente. Voert men haar nu echter in, dan worden de beide vorige, gezochte integralen

$$\int sin^2 x . cos x . E \frac{d}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ - \theta_1 + \frac{\sin x}{\Delta} E + cos x - 1 \right\} , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (200)$$

$$\int \frac{cos x}{sin^2 x} E . \Delta dx = - k^2 \theta_1 - \frac{\Delta}{\sin x} E + k^2 cos x - k^2 - L \tang \tfrac{1}{2} x . \quad \ldots \ldots \ldots (201)$$

Zoodra men overgaat tot evene waarden van n, worden de integralen daarmede van een rationeelen vorm; de negatieve exponenten n komen alsdan niet in aanmerking, omdat men alsdan met geheele machten van Δ^2, dat is van $(1 - k^2 sin^2 x)$, te werken heeft; en deze integralen zijn in het begin van dit Hoofdstuk behandeld. Iets anders is het, wanneer wij de Δ in den noemer behouden, en dus positieve waarden aan n geven; bijv. $= 1$, $= 2$, $= 4$.

Begint men met de waarden $n = 2$, dan kan men uit de vergelijkingen (K_3) en (K_4) niets afleiden; men heeft echter rechtstreeks, wanneer men dergelijke transcendenten als in (85) en (86) invoert,

$$\int \sin x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^2} = - \frac{1}{2k^2} \int E \frac{dx}{\Delta^2} \frac{d}{dx} . \Delta^2 = \frac{1}{2k^2} \left\{ - E . L \Delta^2 + \int L \Delta^2 . \Delta dx \right\} = \iota_1 , \ldots (202)$$

$$\int cos x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k} \int E \frac{2 dx}{1 - k^2 sin^2 x} \frac{d}{dx} . (k sin x) = \frac{1}{2k} \left\{ E . L \frac{1 + k sin x}{1 - k sin x} - \int L \frac{1 + k sin x}{1 - k sin x} . \Delta dx \right\} = \varkappa_1 ; . (203)$$

welke integralen echter beide nieuwe transcendenten blijken te zijn. En nu kan men uit de algemeene herleidingsformule (LIII) voor $n = 2$ de meer bijzondere afleiden

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-sin^{p-1}x . E + \int sin^{p-1}x . \Delta dx + (p-1)\int sin^{p-2}x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\}, \ldots (LVII)$$

waarbij nu de vorige (202) en (203) als eindintegralen behooren, naarmate $p = 3$ of $= 2$ wordt.

Stelt men vervolgens in dezelfde algemeene vergelijking (LIII) $n = 4$, zoodat er komt

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{-\frac{sin^{p-1}x}{\Delta^2}E + \int sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta} + (p-1)\int sin^{p-2}x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4}\right\}, \ldots (LVIII)$$

dan moet men nog voor deze de eindintegralen zoeken.

Voor evene waarden van p, stelle men eerst $n = 4$ in (K_4), dat is

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^2}E - \int sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta} - (p-1)\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} \ldots (K_7)$$

Ten einde deze te kunnen gebruiken, moet men eerst de laatste integraal tusschen de haakjes voor $p = 2$ trachten te vinden; daartoe zij $p = 2$ in de herleidingsformule (LVII).

$$\int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2}\left\{- sin x . E + \int sin x . \Delta dx + \int cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\varkappa_1 - sin x . E + \frac{1}{2k}(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta + k cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos x . \Delta\right\}, \ldots \ldots (204)$$

naar (δ_8); en thans kan men uit de vergelijking (K_7) voor $p = 2$ afleiden

$$\int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{sin^3 x}{\Delta^2}E - \int sin^3 x\frac{dx}{\Delta} - \int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left\{\varkappa_1 + \frac{sin x}{\Delta^2}E - \frac{1}{k}L\frac{1+k}{\Delta + k cos x}\right\}, \ldots \ldots (205)$$

waarbij de volgende integraal gebruikt werd, die uit de herleidingsformule (C_1) volgt,

$$\int sin^3 x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{cos x . \Delta + \frac{1}{k}(1+k^2)L\frac{1+k}{k cos x + \Delta} - 1\right\}. \ldots \ldots (\theta_1)$$

Nu alzoo de eindintegraal voor evene p gevonden is, moeten wij eene dergelijke nog voor onevene waarden van p zoeken, bijv. voor $p = 1$. Daartoe neme men $n = 4$ in de vergelijking (K_3); dan volgt

$$\int \sin x \, . \cos x \, . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin^2 x}{\Delta^2} E - \int \sin^2 x \frac{dx}{\Delta} \right\} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{1}{\Delta^2} E - F \right\} \ldots \quad (206)$$

Ten slotte stelle men achtereenvolgens in de herleidingsformulen (LVII) en (K_7) den exponent $p = 3$, waardoor men verkrijgt

$$\int \sin^3 x \, . \cos x \, . E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ - \sin^2 x \, . E + \int \sin^2 x \, . \Delta \, dx + 2 \int \sin x \, . \cos x \, . E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6k^4} \{ 6k^2 \iota_1 + (1 - k^2) F - [2(2 - k^2) - 3\Delta^2] E - k^2 \sin x \, . \cos x \, . \Delta \}, \ldots (207)$$

en hiermede weder

$$\int \sin^3 x \, . \cos x \, . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin^4 x}{\Delta^2} E - \int \sin^4 x \frac{dx}{\Delta} - 2 \int \sin^3 x \, . \cos x \, . E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ - 2k^2 \iota + \frac{1}{\Delta^2} E - F \right\}, \ldots \quad (208)$$

zoodat nu de gezochte eindintegralen alle gevonden zijn.

10. Stappen wij over tot de onderstelling $\varphi(x) = \cos^{p+1} x$, dan leiden wij uit het algemeene theorema (**d**), na herleiding, achtereenvolgens af

$$\int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int E \frac{dx}{\Delta^n} \{ - (p + 1) \cos^p x \, . \sin x \, . \Delta^2 +$$

$$+ (n - 2) k^2 \sin x \, . \cos^{p+2} x \}, \ldots \quad (L)$$

$$= \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E + \int E \frac{dx}{\Delta^n} \sin x \, . \cos^p x \, . \{(p+1)(1-k^2) - (n-p-3) k^2 \cos^2 x\}, \ldots (L_1)$$

$$= \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E + \int E \frac{dx}{\Delta^n} \sin x \, . \cos^p x . \{ (n - 2)(1 - k^2) - (n - p - 3) \Delta^2 \} \; ; \; . \; (L_2)$$

de eerste van welke vormen (L_1) naar de machten van $\cos x$ is gerangschikt, zoodat de exponent Δ niet, maar de exponent p wel verandert: terwijl de tweede

(L_2) gerangschikt is naar de machten van Δ, zoodat nu omgekeerd de exponent n wel, doch de andere p niet verandert.

Vooreerst kan men uit beide door de bijzondere onderstelling $p = n - 3$, waardoor telkens de laatste term tusschen de haakjes verdwijnt, de volgende veel eenvoudiger vergelijking afleiden.

$$(n-2)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{n-3} x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^n} = -\frac{\cos^{n-2} x}{\Delta^{n-2}} E + \int \cos^{n-2} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} \,.\,.\,. \quad (L_3)$$

Maar men kan ook even goed uit de algemeene herleidingsformulen (L_1) en (L_2) zelve telkens de laatste integraal oplossen; wanneer men daarbij in (L_1) de p door $p - 2$ vervangt, zal men verkrijgen

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{(n-2)(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E + \int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3)\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^{n-2}} \right\}, \ldots \quad (L_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2}\left\{\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{n-2}}E - \int \cos^{p-1}x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} + (p-1)(1-k^2)\int \sin x . \cos^{p-2} x . E\frac{dx}{\Delta^n}\right\} . . \quad (LIX)$$

Thans stelle men $n = 3$, $= 1$ en $= -1$ in de herleidingsvergelijking (L_3) om tot de volgende uitkomsten te geraken.

$$\int \sin x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{ -\frac{\cos x}{\Delta} E + \int \cos x \,.\, dx \right\} = \frac{1}{1-k^2}\left\{ -\frac{\cos x}{\Delta} E + \sin x \right\}, . \quad (209)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\left\{ \frac{\Delta}{\cos x} E - \int \frac{\Delta^2}{\cos x} dx \right\} = \frac{1}{1-k^2}\left\{ \frac{\Delta}{\cos x} E - \right.$$

$$\left. - k^2 \sin x - (1-k^2) L \tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x\right)\right\}, \ldots \quad (210)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} E \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E - \int \frac{\Delta^4}{\cos^3 x} dx \right\} = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E - \right.$$

$$\left. - [(1-k^2)(1-3k^2) - 2k^2\Delta^2] \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}(1-k^2)(1+3k^2) L \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right)\right\} .. \quad (211)$$

Bij de herleidingsformulen (L_4) kunnen deze drie integralen alleen dienst bewijzen, wanneer de exponent p even is. Bij onevene waarden van p daar-

entegen weigert de herleidingsformule (L_3) haar dienst, dewijl alsdan de factor $n - 2$ nul wordt: wanneer men in die gevallen de integralen rechtstreeks zoekt te bepalen, wordt men tot de vorige integralen (196), (197) en (198) teruggevoerd. Men zoude deze echter ook hier hebben kunnen afleiden, door eerst in de herleidingsformule (L_4) $n = 3$ en $n = 1$ aantenemen, zoodat men daardoor komt tot het volgende.

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ -\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta} E + \int \cos^{p+1} x \, dx - p \int \sin x \, . \cos^p x \, . E \frac{dx}{\Delta} \right\}, \,.\, (L_5)$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ \cos^{p+1} x \, . \Delta \, . E - \int \cos^{p+1} x \, . \Delta^2 \, dx + \right.$$
$$\left. + (p + 2) \int \sin x \, . \cos^p x \, . E \, . \Delta \, dx \right\} . \ldots \ldots \ldots (L_6)$$

En stelt men nu in de algemeene herleidingsformule (LIX), $n = 3$, $= 1$ en $= - 1$, zoo verschijnt er het volgende drietal vergelijkingen.

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2) k^2} \left\{ - \frac{\cos^{p-1} x}{\Delta} E + \int \cos^{p-1} x \, dx - \right.$$
$$\left. - (p - 1)(1 - k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \, . E \frac{dx}{\Delta^3} \right\}, \ldots \ldots \ldots (LX)$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ - \cos^{p-1} x \, . \Delta \, . E + \int \cos^{p-1} x \, . \Delta^2 \, dx - \right.$$
$$\left. - (p - 1)(1 - k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \, . E \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots \ldots \ldots (LXI)$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . E \, . \Delta \, dx = \frac{1}{(p + 2) k^2} \left\{ - \cos^{p-1} x \, . \Delta^3 \, . E + \int \cos^{p-1} x \, . \Delta^4 \, dx - \right.$$
$$\left. - (p - 1)(1 - k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \, . E \, . \Delta \, dx \right\}; \ldots \ldots \ldots (LXII)$$

waarbij nu voor het geval dat p oneven is, voor $p = 3$, de bovengemelde integralen (196), (197) en (198) als eindintegralen behooren. Indien daarentegen die exponent p even is, kunnen de integralen (209), (210) en (211) hier geen dienst doen, omdat in die gevallen de noemers $p - 2$, p en $p + 2$ zelve verdwijnen, en derhalve de vergelijkingen een onbepaalden, zoo niet oneindigen,

vorm bekomen. Dientengevolge blijkt de noodzakelijkheid, om die eindintegralen rechtstreeks te bepalen, hetgeen voorloopig aldus geschiedt.

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int (\Delta^2 - 1 + k^2) \sin x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\int \sin x \,.\, E\frac{dx}{\Delta} - (1-k^2)\int \sin x . E\frac{dx}{\Delta^3}\right\},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \,.\, \Delta\, dx = \int \frac{1-k^2+k^2\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\frac{\sin x}{\Delta} E dx = (1-k^2)\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E dx + k^2\int \sin x \,.\, E\frac{dx}{\Delta}.$$

En nu ziet men dadelijk, dat beide zijn teruggebracht tot eene nieuwe integraal, die ook in de herleidingsformule (LXI) voorkomt, als men aldaar $p = 0$ stelt; doch zij blijkt weder eene nieuwe transcendente te vormen, al kan men haar dan ook herleiden door de methode van gedeeltelijk integreeren.

$$\int \sin x . E\frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{k}\int E\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{k^2\cos^2 x}{1-k^2}}}\frac{d}{dx}\,.\,\frac{k\cos x}{\sqrt{1-k^2}} = -\frac{1}{k}\int E dx\frac{d}{dx}\,.\,L\frac{k\cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} =$$

$$= -\frac{1}{k}E \,.\, L\frac{k\cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{4}\int L\frac{k\cos x + \Delta}{\sqrt{1-k^2}}\,.\,\Delta\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}E \,.\, L(k\cos x + \Delta) + \frac{1}{4}\int L(k\cos x + \Delta)\,.\,\Delta\, dx = \lambda_1\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

en hiermede worden nu de vorige integralen

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\lambda_1 + \frac{\cos x}{\Delta}E - \sin x\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (213)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \,.\, \Delta\, dx = k^2\lambda_1 + \frac{\Delta}{\cos x}E - k^2 \sin x - (1-k^2)\, L\, tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right) \ldots \quad (214)$$

Gaan wij nu van de onevene waarden van n tot de evene over, dan heeft men met rationeele integralen te doen; en hier wordt de toestand zeer verschillend, naarmate de Δ^2 in den teller of in den noemer voorkomt. In het eerste geval toch wordt altijd $\Delta^{2l} = \{(1-k^2) + k^2\cos^2 x\}^l$, dus na ontwikkeling, eene som van positieve evene machten van de cosinus; dat wil zeggen, men is teruggekeerd tot de algemeene integraal van de herleidingsformule in den aanvang van dit Hoofdstuk. Geheel anders is het, wanneer de factor Δ^{2l} in den noemer blijft, en dus de exponent n positief is. Laat ons beginnen

met de bijzondere waarde $n = 2$; de herleidingsvergelijkingen (L_3) en (L_4) zijn alsdan onbruikbaar; men moet dus de eindintegralen rechtstreeks afleiden, dat is de vorige integraal (202), en vervolgens

$$\int \sin x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^2} = -\frac{1}{k} \int E \frac{dx}{1 - k^2 + k^2 \cos^2 x} \frac{d}{dx} \, . \, (k \cos x) =$$

$$= \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}} \left\{ Bg\,tang \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} \, . \, E - \int Bg\,tang \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} . \Delta \, dx \right\} = \mu_1, \; . \; . \; . \; (215)$$

wederom eene nieuwe transcendente, zoo als duidelijk uit de herleiding blijkt.

Vervolgens kan men in de herleidingsformule (LIX) $n = 2$ en $n = 4$ stellen, waardoor de volgende uitkomsten ontstaan.

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)\,k^2} \left\{ -\cos^{p-1} x \, . \, E + \int \cos^{p-1} x \, . \, \Delta \, dx - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{LXIII})$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)\,k^2} \left\{ -\frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^2} \, . \, E + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^4} \right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{LXIV})$$

Voor de herleidingsvergelijking (LXIII) zijn de eindintegralen reeds gevonden: naar gelang immers de exponent p even of oneven is, zijn zij de integralen (215) of (202). Wat daarentegen de andere herleidingsformule (LXIV) betreft, heeft men vooreerst als eindintegraal de integraal (206); en verder vindt men, door in de vergelijking (LXIII) $p = 2$ te nemen,

$$\int \sin x \, . \cos^2 x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x \, . \, E + \int \cos x \, . \, \Delta \, dx - (1-k^2) \int \sin x \, . \, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x \, . \, E - (1-k^2)\,\mu_1 + \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x \, . \, \Delta \right\} \; . \; . \; . \; . \; (216)$$

Thans kan men verder slagen, door in de herleidingsvergelijking (L_4) $n = 4$, $p = 2$ te onderstellen; want dan wordt

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^3 x}{\Delta^2} E + \int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\mu_1 + \frac{\cos x}{\Delta^2} E - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) \right\} , \ldots (217)$$

waarbij men de volgende integraal noodig had, afgeleid uit het algemeene herleidingstheorema (C_2),

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \sin x \,.\, \Delta - \frac{1}{k} (1 - 2k^2) \, Bg \sin (k \sin x) \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\theta_2)$$

Op dezelfde wijze stelle men nog $p = 3$ in de formule (LXIII), — hetgeen wegens den factor $p - 3$ niet mogelijk zoude geweest zijn in de volgende vergelijking (LXIV); dan komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x \,.\, E + \int \cos^2 x \,.\, \Delta \, dx - 2(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6k^4} \{ -6(1-k^2) k^2 \iota + [2(2-k^2) - 3\Delta^2] E - (1-k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \} ; . (218)$$

en nu kan men in de vorige vergelijking (L_4) $n = 4$ en $p = 3$ onderstellen, en vervolgens deze laatste uitkomst invoeren, om langs dien omweg te geraken tot

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^4 x}{\Delta^2} E + \int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta} - 2 \int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left\{ 2k^2 \iota - \frac{1 - k^2 \cos 2x}{\Delta^2} E + (1 - k^2) F \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (219)$$

Geleid door de ondervinding, opgedaan in N°. 11 van Hoofdst. II, behoeven wij hier geene andere substitutiën voor $\varphi(x)$ in het algemeene theorema (**d**) te beproeven, dewijl wij toch hier, evenmin als daar, tot bruikbare uitkomsten zouden gevoerd worden.

11. Gaan wij dus over tot de algemeene herleidingsformulen (F_1) tot (F_8), in Hoofdstuk I gevonden. Ten einde hier tot vruchtbare toepassing van het theorema (**c**) te kunnen komen, is het allereerst noodzakelijk, om de hier te huis behoorende eindintegralen te zoeken. Enkele dezer integralen zijn reeds vroeger gevonden, namelijk

$\int \sin x . E dx$, . . . (127) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} E$, . . . (131) $\int \cos x . E dx$, . . . (126)

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} E$, . . (128) $\int \operatorname{tang} x . \cos^2 x . E dx$, . . (121) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} E$, . . (138)

$\int \sin \frac{1}{2} x . E dx$, . . (146) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E$, . . (137) $\int \cos \frac{1}{2} x . E dx$, . . (143)

$\int \operatorname{tang} \frac{1}{2} x . \cos^4 \frac{1}{2} x . E dx$, ... (133) $\int \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} x . \cos^4 \frac{1}{2} x . E dx$; . . . . . (132)

terwijl daartoe nog behooren

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x . E + \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2k} (1 - k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta \Big\}, \ldots \ldots \quad (220)$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x . E - \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2k} (1 - k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + \frac{1}{2} \cos x . \Delta \Big\} \ldots \ldots \quad (221)$$

Verder zal men de nog ontbrekende eindintegralen moeten afleiden uit de in Hoofdstuk I gevonden integralen (ξ_1) tot (ξ_{15}), en wel door middel van het theorema (**c**). Daar hier de $\varphi(x)$ overal uit een produkt van twee factoren of een quotient ontstaat, zal $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ steeds twee termen bevatten; waarvan na herleiding de eerste eene der bovengemelde bekende integralen zal blijken te zijn, terwijl daarnaast de tweede de nieuwe, gezochte eindintegralen opleveren zal. Langs dezen weg verkrijgt men achtereenvolgens het volgende zestiental, — de eerste formule (ξ_1) toch levert met behulp der integraal (161) twee uitkomsten —

$$\int \sin^2 x . E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x . \cos x . E + \frac{1}{3 k^2} (1 - \Delta^3) \Big\}, \ldots \ldots \quad (222)$$

$$\int \cos^2 x . E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x . \cos x . E - \frac{1}{3 k^2} (1 - \Delta^3) \Big\}, \ldots \ldots \quad (223)$$

$$\int \sin^4 x . E dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3 \varepsilon_1 - (3 + 2 \sin^2 x) \sin x . \cos x . E +$$

$$+ \frac{1}{15 k^4} [(2 + 3 k^2) 5 (1 - \Delta^3) - 6 (1 - \Delta^5)] \Big\}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (224)$$

$$\int \cos^4 x . E dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3 \varepsilon_1 + (3 + 2 \cos^2 x) \sin x . \cos x . E +$$

$$+ \frac{1}{15 k^4} [(2 - 5 k^2) 5 (1 - \Delta^3) - 6 (1 - \Delta^5)] \Big\}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (225)$$

$$\int \sin^3 x . E dx = \frac{1}{24 k^3} \{ - (2 + \sin^2 x) 8 k^3 \cos x . E +$$

$$+ (1 + 8 k^2) Bg \sin (k \sin x) + (1 + 8 k^2 - 2 \Delta^2) k \sin x . \Delta \}, \dots \dots \dots \dots \quad (226)$$

$$\int \cos^3 x . E dx = \frac{1}{24 k^3} \Big\{ (2 + \cos^2 x) 8 k^3 \sin x . E - (1 - 9 k^2)(1 - k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} -$$

$$- k (1 + 9 k^2) - [(1 - 9 k^2) - 2 \Delta^2] k \cos x . \Delta \Big\} , \dots \dots \dots \dots \dots \quad (227)$$

$$\int \tan^4 x . \cos^2 x . E dx = - \frac{3}{2} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (2 + \cos^2 x) \tan x . E -$$

$$- \sqrt{1 - k^2} \, L \frac{\sqrt{1 - k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1 - k^2}) \cos x} - \frac{1}{6 k^2} \{ (1 - \Delta^3) + 6 k^2 (1 - \Delta) \}, \dots \quad (228)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\tan^2 x} E dx = - \frac{3}{2} \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (2 + \sin^2 x) \cot x . E + L \frac{2 \sin x}{1 + \Delta} +$$

$$+ \frac{1}{6 k^2} \{ (1 - \Delta^3) - 6 k^2 (1 - \Delta) \}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (229)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \frac{1}{3} (5 - \cos x) \cos \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2 k}} \Big\{ (1 + 8 k)(1 - k) 3 F(l, z) -$$

$$- (1 - 8 k^2) 6 E (l, z) - \Big[(1 - 16 k + 4 k^2) - 4 (1 + k) k \cos x -$$

$$- \frac{2 (4 + 5 k + 20 k^2) - (1 + 4 k) \Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2 k} \Big\} , \dots \dots \dots \dots \quad (230)$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 8k)(1 - k) 3 F(l,y) -$$

$$- (1 - 8k^2) 6 E(l,y) - \Big[(1 - 16k + 4k^2) - 4(1 + k) k \cos x -$$

$$- \frac{2(4 + 5k + 20k^2) - (1 + 4k)\Delta^2}{1 + k + k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots (231)$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ 9 k^2 \varepsilon_1 - (4 - \cos x) 3 k^2 \sin x . E -$$

$$- 6k(1 - k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1 + k} - 1 + 6k^2 - 6k^2 \cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots (232)$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ 9 k^2 \varepsilon_1 + (4 + \cos x) 3 k^2 \sin x . E +$$

$$+ 6k(1 - k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1 + k} - 1 - 6k^2 + 6k^2 \cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots (233)$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = -\frac{1}{6}(43 - 14\cos x + 3\cos^2 x) \cos \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{63 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2) 3(1 - k) F(l,z) - (17 - 96k^2) 6k E(l,z) -$$

$$- \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) + 64(1 + k) k^2 \cos x -$$

$$- 2k \frac{67 + 80k + 224k^2 + (1 + 4k) 5 \Delta^2}{1 + k - k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots (234)$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{6}(43 + 14\cos x + 3\cos^2 x) \sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{63 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2) 3(1 - k) F(l,y) -$$

$$- (17 - 96k^2) 6k E(l,y) - 9 - \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) + 64(1 + k) k^2 \cos x -$$

$$- 2k \frac{67 + 80k + 224k^2 + (1 + 4k) 5 \Delta^2}{1 + k + k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots (235)$$

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\tang^2 \frac{1}{2} x} E dx = -\frac{15}{8} e_1 - \frac{1}{8}[(4+\cos x) 5 k^2 \sin x + 16 \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \cot \tfrac{1}{2} x] E + 2 L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} +$$

$$- \frac{1}{2k}(1 - 5k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} + \frac{1}{24 k^2}\{(1 - 36 k^2) + (4 - \cos x) 12 k^2 \Delta - \Delta^3\}, \ldots (236)$$

$$\int \tang^6 \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = -\frac{15}{8} e_1 + \frac{1}{8}[(4 - \cos x) 5 k^2 \sin x + 16 \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \tang \tfrac{1}{2} x] E -$$

$$- 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2k}(1 - 5k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} +$$

$$+ \frac{1}{24 k^2}\{(1 - 60 k^2) + (4 + \cos x) 12 k^2 \Delta - \Delta^3\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (237)$$

Terwijl later nog blijken zal, dat men verder de volgende integralen bij de herleidingen behoeft

$\int E dx , \ldots (162)$ $\int \frac{\cos^2 x}{\tang x} E , \ldots (161)$ $\int \tang^3 x . \cos^3 x . E dx , \ldots (155)$

$\int \cot \frac{1}{2} x . \cos^4 \frac{1}{2} x . E dx , \ldots \ldots (186)$ $\int \tang^5 \frac{1}{2} x . \cos^4 \frac{1}{2} x . E dx , \ldots \ldots (178)$

$\int \frac{dx}{\cos x} E , \ldots (149)$ $\int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E \ldots (170)$.

12 En hiermede zijn nu alle noodige uitkomsten gereed, zoodat wij kunnen overgaan tot de toepassing van het theorema (c), of liever van (c_1), op het stelsel algemeene herleidingsvergelijkingen (F_1) tot (F_8), om daaruit een ander stel afteleiden, dat den factor E bevat.

Vooreerst geeft deze toepassing bij de formule (F_1)

$$(p+2) k^2 \left\{ \sin^p x . \cos x . E - \int E dx [p \sin^{p-1} x . \cos^2 x - \sin^{p+1} x] \right\} = - \sin^{p-1} x . \Delta^3 +$$

$$+ (p-1) \left\{ \sin^{p-2} x . \cos x . E - \int E dx [(p-2) \sin^{p-3} x . \cos^2 x - \sin^{p-1} x] \right\}.$$

Door telkens de herleiding

$$A \sin^{a-1} x . \cos^2 x - \sin^{a+1} x = A \sin^{a-1} x - (A+1) \sin^{a+1} x$$

toetepassen, en daarna $p-1$ voor p te stellen, verkrijgt men

$$\int \sin^p x\,.\,E\,dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x\,.\,E\,dx -$$

$$- (p-2)\,(p-3) \int \sin^{p-4} x\,.\,E\,dx + [\,-3 +$$

$$+ (p+1)\,\Delta^2\,]\,\sin^{p-3} x\,.\cos x\,.\,E - \sin^{p-2} x\,.\,\Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXV)}$$

Hierbij moeten als eindintegralen dienst doen, bij evene waarden van den exponent p, voor $p = 2$, de integralen (131), (162), (222) en (224); en bij onevene waarden van p, voor $p = 3$, de integralen (127) en (226).

Wanneer wij de herleidingsformule (F_2) op dezelfde wijze behandelen, zoo komt er

$$(p+2)\,k^2 \Big\{ \sin x\,.\cos^p x\,.\,E - \int E\,dx\,[\,\cos^{p+1} x - p\sin^2 x\,.\cos^{p-1} x\,] \Big\} = 1 -$$

$$-\cos^{p-1} x\,.\,\Delta^3 - (p-1)(1-k^2) \Big\{ \sin x\,.\cos^{p-2} x\,.\,E - \int E\,dx\,[\cos^{p-1} x - (p-2)\sin^2 x\,.\cos^{p-3} x] \Big\}.$$

Hier behoeven wij de herleiding

$$\cos^{a+1} x - A\sin^2 x\,.\cos^{a-1} x = (A+1)\cos^{a+1} x - A\cos^a x;$$

vervangen wij dan later p door $p-1$, dan wordt

$$\int \cos^p x\,.\,E\,dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2(1-k^2) + (p^2-1)\,k^2\,] \int \cos^{p-2} x\,.\,E\,dx -$$

$$- (p-2)\,(p-3)\,(1-k^2) \int \cos^{p-4} x\,.\,E\,dx + [\,-3\,(1-k^2) +$$

$$+ (p+1)\,\Delta^2\,]\,\sin x\,.\cos^{p-3} x\,.\,E - 1 + \cos^{p-2} x\,.\,\Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(LXVI)}$$

Wat de eindintegralen betreft, moeten wij wederom onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden van p; voor het geval dat p even is, stelle men $p = 2$, dan vindt men de integralen (128), (162), (223) en (225); evenzoo voor het geval dat p oneven is, de integralen (126) en (227).

Ook op de formule (F_3) kan men hetzelfde algemeene theorema toepassen, zoodat er komt

$$(p-3)(1-k^2)\left\{ tang^p x . cos^2 x . E - \int E dx\,[\,p\, tang^{p-1} x - 2\, tang^p x . sin\, x . cos\, x\,]\right\} =$$

$$= tang^{p-3} x . \Delta^3 - [\,2(p-3) - p k^2\,]\left\{ tang^{p-2} x . cos^2 x . E -\right.$$

$$\left. - \int E dx[(p-2)\, tang^{p-3} x - 2\, tang^{p-2} x . sin\, x . cos\, x]\right\} - (p-3)\left\{ tang^{p-4} x . cos^2 x . E -\right.$$

$$\left. - \int E dx\,[\,(p-4)\, tang^{p-5} x - 2\, tang^{p-4} x . sin\, x . cos\, x\,]\right\}.$$

De goniometrische herleidingsformule, die wij hier telkens hebben toetepassen, luidt

$$A\, tang^{a-1} x - 2\, tang^a x . sin\, x . cos\, x = (A-2)\, tang^{a+1} x . cos^2 x + A\, tang^{a-1} x . cos^2 x.$$

En stellen wij daarna $p-1$ voor p in de plaats, zoo erlangen wij

$$\int tang^p x . cos^2 x . E dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)}\left\{ -[\,(p-4)(3p-11) -\right.$$

$$- (p-1)(2p-9)k^2\,]\int tang^{p-2} x . cos^2 x . E dx - [\,(p-4)(3p-13) -$$

$$-(p-1)(p-3)k^2]\int tang^{p-4} x . cos^2 x . E dx - (p-4)(p-5)\int tang^{p-6} x . cos^2 x . E dx +$$

$$\left. + [\,-3 cos^2 x + \{(p-4) + 3 cos^2 x\}\,\Delta^2\,]\frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x} E - tang^{p-4} x . \Delta^3\right\}; . \quad \text{(LXVII)}$$

waarbij nu de volgende eindintegralen behooren. Vooreerst bij evene waarden van p, voor $p=8$, de integralen (229), (223), (222) en (228); en bij onevene waarden van p, voor $p=5$ de integralen (161), (121) en (155).

10. Het volgende drietal herleidingsvergelijkingen, waarin $\frac{1}{2}x$ het argument is, laten ook eene dergelijke toepassing van ons theorema toe; dit levert toch vooreeerst bij de formule (F_4) de volgende uitkomst.

$$(p+3)4k^2\left\{ sin^p \tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x . E - \int E dx \frac{1}{2}[\,p\, sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x . cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x]\right\} = 2 sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x . \Delta^3 +$$

$$+ 4pk^2\left\{ sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos\tfrac{1}{2}x . E - \int E dx \frac{1}{2}[(p-2)\, sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x . cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x]\right\} -$$

$$- (p-3)\left\{ sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos\tfrac{1}{2}x . E - \int E dx \frac{1}{2}[\,(p-4)\, sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x . cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x]\right\}.$$

Wanneer men den tweeledigen vorm, die hier overal onder het integraalteeken voorkomt, goniometrisch aldus herleidt,

$$A\, sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^a\tfrac{1}{2}x = A\, sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x - (A+1)\, sin^a\tfrac{1}{2}x,$$

en vervolgens den exponent p met de eenheid vermindert, verkrijgt men na oplossing de gezochte integraal

$$\int sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E dx = \frac{1}{(p+2)\,4pk^2}\Big\{(p-1)\,8pk^2\int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,Edx - [(p-4)^2 +$$

$$+ (p-1)(p-3)\,4k^2]\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,Edx + (p-4)(p-5)\int sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,Edx +$$

$$+ [6(1-k^2) + 6k^2 cos\,x - (p+2)\Delta^2]\, sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\,x\,.\,E + 4\,sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\} \,.\,. \text{(LXVIII)}$$

Als eindintegralen treden hier op, voor het geval dat de exponent p evene waarden heeft, voor $p = 4$, de integralen (138), (162), (220) en (232); voor het andere geval daarentegen dat p onevene waarden heeft, voor $p = 7$, de integralen (146), (230) en (234).

Wat de algemeene herleidingsformule (F_5) betreft, zij geeft na toepassing van ons theorema

$$(p+3)\,4k^2\Big\{sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \int Edx\frac{1}{2}[cos^{p+1}\tfrac{1}{2}x - p\,sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x]\Big\} =$$

$$= 2 - 2\,cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3 + 4pk^2\Big\{sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E -$$

$$- \int Edx\frac{1}{2}[cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x - (p-2)\,sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x]\Big\} - (p-3)\Big\{sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E -$$

$$- \int Edx\frac{1}{2}[cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x - (p-4)\,sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x]\Big\}.$$

De goniometrische herleidingsformule

$$cos^a\tfrac{1}{2}x - A\,sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{a-2}\tfrac{1}{2}x = (A+1)\,cos^a\tfrac{1}{2}x - A\,cos^{a-2}\tfrac{1}{2}x$$

moeten wij hier telkens gebruiken bij iederen vorm onder het integraalteeken, en daarna den exponent p door $p - 1$ vervangen. Op deze wijze geraakt men tot de herleidingsvergelijking

$$\int cos^p \tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,p\,k^2}\Big\{(p-1)\,8\,p\,k^2\int cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx\,-$$

$$-\,[(p-4)^2+(p-1)(p-3)4\,k^2]\int cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx+(p-4)(p-5)\int cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx-$$

$$-[6(1-k^2)-6\,k^2\cos x-(p+2)\Delta^2]\,cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\sin x\,.\,E-4+4\,cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\}\,.\,.\,\text{(LXIX)}$$

Ook voor haar zijn de eindintegralen reeds allen bekend en moet men ook hier onderscheid maken, naarmate de exponent p eene evene of onevene waarde heeft. Bij evene p stelle men $p = 4$ en vindt alsdan de integralen (137), (162), (221) en (233); bij onevene p, stelle men $p = 7$ en vindt dan de integralen (143), (231) en (235).

Eindelijk hebben wij ons theorema nog op de herleidingsformule (F_6) toetepassen, waardoor men verkrijgt

$$(p-5)\Big\{tang^p\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E-\int E\,dx\frac{1}{2}[p\,tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^p\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\tfrac{1}{2}x.cos^3\tfrac{1}{2}x]\Big\}=$$

$$=2\,tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3-[\,3\,(p-5)-(p-8)\,4\,k^2\,]\Big\{\,tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,-$$

$$-\int E\,dx\frac{1}{2}[\,(p-2)\,tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x\,]\Big\}\,-$$

$$-[3(p-5)-(p-2)\,4k^2]\Big\{\,tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E-\int E\,dx\frac{1}{2}[(p-4)tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x-$$

$$-\,4\,tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x]\Big\}-(p-5)\Big\{\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,-$$

$$-\int E\,dx\frac{1}{2}[\,(p-6)\,tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x\,]\Big\}.$$

Hier hebben wij de goniometrische herleiding

$$A\,tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x-4\,tang^{a-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,sin\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x=(A-4)\,tang^a\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x\,+$$

$$+\,A\,tang^{a-2}x\,.\,cos^4\tfrac{1}{2}x$$

noodig: tevens moeten wij $p-1$ voor p in de plaats stellen. Langs dezen weg komt er

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \frac{1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ - [(p-6)(2p-11) -$$

$$- (p-7)(p-9)\, 2k^2]\, 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx - [3(p-6)^2 -$$

$$- (p-3)(p-9)\, 4k^2]\, 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx - [(p-6)(2p-13) -$$

$$- (p-3)(p-5)\, 2k^2]\, 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx -$$

$$- (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx + [-3 \cos x +$$

$$+ (p - 6 + 3 \cos x) \Delta^2] \frac{4\, tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x}{\sin x} E - 4\, tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 \Big\} \dots\dots\dots \text{(LXX)}$$

Ten aanzien der eindintegralen, waarbij men weder de gevallen moet scheiden, dat de exponent p even en oneven is, verkrijgt men in het eerste geval, voor $p = 8$, de integralen (236), (233), (222), (232) en (237), en in het tweede geval, voor $p = 7$ de integralen (186), (133), (132), (178).

14. Ten slotte blijven er nog de twee laatste der algemeene herleidingsformulen (F) uit Hoofdstuk I over. Beginnen wij met de toepassing van ons theorema op de vergelijking (F_7), dan komt er

$$(p-1)(1-k^2) \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^p x} E - \int E\,dx \Big[\frac{1}{\cos^{p-1} x} + p \frac{\sin^2 x}{\cos^{p+1} x} \Big] \Big\} = \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} -$$

$$- 1 - (p-4) k^2 \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} E - \int E\,dx \Big[\frac{1}{\cos^{p-3} x} + (p-2) \frac{\sin^2 x}{\cos^{p-1} x} \Big] \Big\} .$$

Wanneer wij de goniometrische herleiding

$$\frac{1}{\cos^{a-2} x} + A \frac{\sin^2 x}{\cos^a x} = A \frac{1}{\cos^a x} - (A-1) \frac{1}{\cos^{a-2} x}$$

hier toepassen, en daarna p vervangen door $p - 1$, erlangen wij

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-2)^2 - (2p^2 - 12p + 19) k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} E +$$

$$+ (p-4)(p-5) k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} E + [3(1-k^2) + (p-5)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\Delta^3}{\cos^{p-2} x} + 1 \Big\} \dots \text{(LXXI)}$$

Hierbij zijn nu de trouwens reeds vroeger gevonden eindintegralen bijeen te zoeken; is de exponent p even, dan vindt men daarvoor de integralen (128) en (162): is hij echter oneven, alsdan de integralen (126) en (149).

Ten laatste heeft men nog de herleidingsformule (F_8), die door middel van het steeds gebruikte theorema (c) dadelijk levert

$$(p-1)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}+p\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}\right]\right\}=\frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-2+$$

$$+(p-4)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}+(p-2)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\right]\right\}-$$

$$-(p-7)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}+(p-4)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}\right]\right\}.$$

Geheel overeenkomstig met het vorige gebruike men hier telkens de goniometrische herleidingsformule

$$\frac{1}{\cos^{a-2}\frac{1}{2}x}+A\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^a\frac{1}{2}x}=A\frac{1}{\cos^a\frac{1}{2}x}-(A-1)\frac{1}{\cos^{a-2}\frac{1}{2}x},$$

en stelle vervolgens $p-1$ voor p in de plaats, zoo komt er eindelijk

$$\int\frac{dx}{\cos^p\frac{1}{2}x}E=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{\left[(p-2)^2+(p-3)(p-5)\,4k^2\right]\int\frac{dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$

$$-(p-5)(p-6)\,8k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E+(p-6)(p-8)\,4k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E+$$

$$\left.+\left[6(1-k^2)-6k^2\cos x+(p-8)\Delta^2\right]\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E+4-\frac{4\Delta^3}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}\right\}\quad..\quad\text{(LXXII)}$$

Voor de eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen de gevallen, dat de exponent evene dan wel onevene waarden bezit. In het eerste dezer gevallen komt men voor $p=4$ tot de integralen (137) en (162); in het tweede tot de integralen (143) en (170).

TAFELS 69—102.

VERKLARING.

$$\int = \int_0^x, \qquad \Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}\,, \qquad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}\,, \qquad E = \int_0^x d\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\,.$$

Verder is bij $\Delta(l,y)$, $F(l,y)$, $E(l,y)$, en $\Delta(l,z)$, $F(l,z)$, $E(l,z)$,

$$tang\,\tfrac{1}{2}\,y = cos\,\tfrac{1}{2}\,x\,.\sqrt{2k}, \qquad l^2 = \frac{1}{2}(1+k),$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}\,z = sin\,\tfrac{1}{2}\,x\,.\sqrt{2k}, \qquad r^2 = \frac{1}{8k}(1+2k)^2.$$

Er komen als nieuwe transcendenten

$$\alpha_1 = \int \frac{dx}{cos\,x} E, \qquad \eta_1 = \int \frac{dx}{sin\,\frac{1}{2}\,x} E,$$

$$\beta_1 = \int \frac{dx}{sin\,x} E, \qquad \theta_1 = \int cos\,x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta},$$

$$\gamma_1 = \int \frac{sin\,x}{cos\,x} E\,dx, \qquad \iota_1 = \int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\delta_1 = \int \frac{cos\,x}{sin\,x} E\,dx, \qquad \varkappa_1 = \int cos\,x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\varepsilon_1 = \int E\,dx, \qquad \lambda_1 = \int sin\,x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta},$$

$$\xi_1 = \int \frac{dx}{cos\,\frac{1}{2}\,x} E, \qquad \mu_1 = \int sin\,x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta^2}.$$

B 23

TAFEL 69.

$$\int \sin^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)pk^2} \Big\{ [(p-2)^2 + (p^2-1)k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, E dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x \,.\, E dx + [-3+(p+1)\Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E - \sin^{p-3} x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} E = -\cot x \,.\, E - 1 + L\frac{2\sin x}{1+\Delta} + \Delta. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1.$$

$$\int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int \sin x \,.\, E dx = -\cos x \,.\, E + \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, E dx = \frac{1}{2}\Big\{ \varepsilon_1 - \sin x \,.\, \cos x \,.\, E + \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3) \Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, E dx = \frac{1}{24k^3}\Big\{-(2+\sin^2 x)8k^3\cos x \,.\, E + (1+8k^2)Bg\sin(k\sin x) + (1+8k^2-2\Delta^2)k\sin x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \sin^4 x \,.\, E dx = \frac{1}{8}\Big\{3\varepsilon_1 - (3+2\sin^2 x)\sin x \,.\, \cos x \,.\, E + \frac{1}{15k^4}[(2+3k^2)5(1-\Delta^3) - 6(1-\Delta^5)]\Big\}.$$

TAFEL 70.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)(p+2)k^2}\Big\{[(p-1)+(p+1)k^2](p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, E dx - [3\cos^2 x + \{1-(p+2)\cos^2 x\}\Delta^2]\sin^{p-3} x \,.\, E - \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E dx = -\frac{1}{\sin x} E + L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \delta_1.$$

$$\int \cos x \,.\, E dx = \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2)L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{8k^2\sin^3 x \,.\, E + (1-3k^2) + \frac{1}{k}(1-k^2)(1+3k^2)L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + (1+3k^2-2\Delta^2)\cos x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{60k^4}\{(2+3k^2-8k^4+15k^4\sin^4 x)E - (1-k^2)(1+2k^2)2F +$$
$$+[2(1+2k^2) - 3\Delta^2]k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

---

*

TAFEL 71.

$$\int sin^p x \,.\, E\frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{(p-1)pk^2}\Big\{[(p-3)^2+(p-1)(2p-3)k^2]\int sin^{p-2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos x} -$$

$$-[(2p^2-15p+29)+(p-3)(p-1)k^2]\int sin^{p-4}x\,.\,E\frac{dx}{\cos x}+(p-4)(p-5)\int sin^{p-6}x\,.\,E\frac{dx}{\cos x}+$$

$$+[3\cos^2 x+(1-p\cos^2 x)\Delta^2]\,sin^{p-5}x\,.\,E+sin^{p-4}x\,.\cos x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos x}E=\gamma_1+\delta_1. \qquad \int\frac{dx}{\cos x}E=\alpha_1. \qquad \int\frac{\sin x}{\cos x}E\,dx=\gamma_1.$$

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}E\,dx=\alpha_1-\sin x\,.\,E+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}(1-k^2)\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}-\frac{1}{2}\cos x\,.\,\Delta.$$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}E\,dx=\gamma_1-\frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E-(1-k^2)F+k^2\sin x\,.\cos x\,.\,\Delta\}.$$

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}E\,dx=\alpha_1+\frac{1}{24k^2}\Big\{(3+\sin^2 x)\,8k^2\sin x\,.\,E+(1-15k^2)+$$

$$+\frac{1}{k}(1-k^2)(1+15k^2)\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+[(1+15k^2)-2\Delta^2]\cos x\,.\,\Delta\Big\}.$$

TAFEL 72.

$$\int sin^p x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,E\,dx=\frac{1}{(p+2)k^2}\Big\{-sin^{p-1}x\,.\,\Delta^3\,.\,E+\int sin^{p-1}x\,.\,\Delta^4\,dx+$$

$$+(p-1)\int sin^{p-2}x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,E\,dx\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}\Delta\,.\,E\,dx=\frac{1}{3}\Big\{-\frac{1}{\sin^3 x}\Delta^3\,.\,E+\frac{1}{2}(1-4k^2)\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x+k^4-(1+2k^4\sin^2 x)\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\Delta\,.\,E\,dx=-k^2\theta_1-\frac{\Delta}{\sin x}E+k^2\cos^2 x-k^2-L\,tang\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int\sin x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,E\,dx=\frac{1}{24k^2}\{[8(1-k^2)+3k^4]x+8\Delta^3.E+[3(2-k^2)+2\Delta^2]\,k^2\sin x.\cos x\}.$$

TAFEL 73.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2}\left\{ -\sin^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + \right.$$

$$\left. + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E\frac{dx}{\Delta} = -\frac{\Delta}{\sin x}E + k^2 \cos x - k^2 + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x. \qquad \int \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta} = \theta_1.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{(2-k^2)\,x - 2\,\Delta \,.\, E + k^2 \sin x \,.\, \cos x\right\}.$$

TAFEL 74.

$$\int \sin^p x . \cos x . E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{ -\sin^{p-1}x . E + \int \sin^{p-1}x . \Delta dx + (p-1)\int \sin^{p-2}x . \cos x . E\frac{dx}{\Delta^2} \right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^2} = \varkappa_1. \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^2} = \iota_1.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2}\left\{ \varkappa_1 - \sin x \,.\, E - \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta \right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{6k^4}\left\{ 6k^2\iota_1 + (1-k^2)F - [2(2-k^2) - 3\,\Delta^2]E - k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \right\}.$$

TAFEL 75.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2}\left\{ -\frac{\sin^{p-1} x}{\Delta}E + \int \sin^{p-1} x\, dx + (p+1)\int \sin^{p-2} x . \cos x . E\frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta}E + \cos x - 1. \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{ \frac{1}{\Delta}E - x \right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{ -\theta_1 + \frac{\sin x}{\Delta}E + \cos x - 1 \right\}.$$

TAFEL 76.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{-\frac{\sin^{p-1} x}{\Delta^2}E + \int \sin^{p-1} x\frac{dx}{\Delta} + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{dx}{\Delta^4}\right\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^2}\left\{\frac{1}{\Delta^2}\,E - F\right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, E\,\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^2}\left\{-\varkappa_1 + \frac{\sin x}{\Delta^2}\,E + \frac{1}{k}\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}\right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, E\,\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^4}\left\{-2\,k^2\,\varepsilon_1 + \frac{1}{\Delta^2}\,E - F\right\}.$$

TAFEL 77.

$$\int \cos^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\left\{[\,(p-2)^2\,(1-k^2) + (p^2-1)\,k^2\,]\int \cos^{p-2} x \,.\, E\,dx - \right.$$

$$- (p-2)\,(p-3)\,(1-k^2)\int \cos^{p-4} x \,.\, E\,dx + [\,-3\,(1-k^2) +$$

$$\left. + (p+1)\,\Delta^2\,]\,\sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E - 1 + \cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}E = \tan g\, x \,.\, E - 1 - \sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta. \qquad \int \frac{dx}{\cos x}E = \alpha_1.$$

$$\int E\,dx = \varepsilon_1. \qquad \int \cos x \,.\, E\,dx = \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,k}(1-k^2)\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_1 + \sin x \,.\, \cos x \,.\, E - \frac{1}{3\,k^2}\,(1-\Delta^3)\right\}.$$

$$\int \cos^3 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24\,k^3}\left\{(2+\cos^2 x)\,8\,k^3 \sin x \,.\, E - (1-9\,k^2)\,(1-k^2)\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - \right.$$

$$\left. - k\,(1+9\,k^2) - [(1-9\,k^2) - 2\,\Delta^2]\,k\cos x \,.\, \Delta\right\}.$$

$$\int \cos^4 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{8}\left\{3\,\varepsilon_1 + (3+2\cos^2 x)\sin x \,.\, \cos x \,.\, E + \frac{1}{15\,k^4}[(2-5\,k^2)\,5\,(1-\Delta^3) - 6\,(1-\Delta^5)]\right\}.$$

TAFEL 78.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+2)k^2}\Big\{-[(p-1)-2pk^2](p-1)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, E\,dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-4} x \,.\, E\,dx +$$

$$+ [3\cos^2 x - \{4-(p+2)\sin^2 x\}\Delta^2]\cos^{p-3} x \,.\, E + \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E\,dx = \frac{1}{\cos x} E - k\,Bg\sin(k\sin x) - \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sin x.\sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1. \qquad \int \sin x \,.\, E\,dx = -\cos x \,.\, E + \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{-8k^2\cos^3 x.E - \frac{1}{k}(1-4k^2)Bg\sin(k\sin x) - (1-4k^2-2\Delta^2)\sin x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{60k^4}\{(1-k^2)(1-3k^2)\,2F -$$

$$-(2-7k^2-3k^4+15k^4\cos^4 x)E - [2(1-3k^2)-3\Delta^2]k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

TAFEL 79.

$$\int \cos^p x \, . \, E \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ -\left[(p-3)^2 - (3p^2 - 11p + 12)k^2\right] \int \cos^{p-2} x \, . \, E \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \left[(2p^2 - 15p + 29) - (3p^2 - 19p + 32)\,k^2\right] \int \cos^{p-4} x \, . \, E \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2)\int \cos^{p-6} x . E \frac{dx}{\sin x} - [3\cos^2 x - (4 - p\sin^2 x)\Delta^2]\cos^{p-5} x . E - \sin x . \cos^{p-4} x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \delta_1.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E dx = \beta_1 + \cos x \, . \, E - \frac{1}{2k} Bg\sin(k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x \, . \, \Delta.$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E\, dx = \delta_1 - \frac{1}{6k^2} \{ (4 - 2k^2 - 3\Delta^2)\, E - (1 - k^2)\, F + k^2 \sin x \, . \, \cos x \, . \, \Delta \}.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\, dx = \beta_1 + \frac{1}{24 k^2} \Big\{ (3 + \cos^2 x)\; 8 k^2 \cos x \, . \, E +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 - 16k^2)\, Bg\sin(k \sin x) + (1 - 16k^2 - 2\Delta^2) \sin x \, . \, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 80.

$$\int \sin x \, . \, \cos^p x \, . \, \Delta \, . \, E dx = \frac{1}{(p+2)\,k^2} \Big\{ - \cos^{p-1} x \, . \, \Delta^3 \, . \, E + \int \cos^{p-1} x \, . \, \Delta^4 dx -$$

$$-(p-1)(1-k^2) \int \sin x \, . \, \cos^{p-2} x \, . \, \Delta \, . \, E dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \Delta . E dx = \frac{1}{3(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E + [(1-k^2)(1-3k^2) - 2k^2\Delta^2] \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}(1-k^2)(1+3k^2) L tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta \, . \, E dx = k^2 \lambda_1 + \frac{\Delta}{\cos x} E - k^2 \sin x - (1 - k^2)\, L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right).$$

$$\int \sin x \, . \, \cos x \, . \, \Delta \, . \, E dx = \frac{1}{24 k^2} \{ -8\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4)x + [3(2 - k^2) + 2\Delta^2] k^2 \sin x . \cos x \}.$$

TAFEL 81.

$$\int \sin x.\cos^p x.E\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{pk^2}\left\{-\cos^{p-1}x.\Delta.E+\int \cos^{p-1}x.\Delta^2 dx-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.E\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}E\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}E-k^2\sin x-(1-k^2)\;L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)\right\}.$$

$$\int \sin x.E\frac{dx}{\Delta}=\lambda_1. \qquad \int \sin x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k^2}\{-2\Delta.E+(2-k^2)x+k^2\sin x.\cos x\}.$$

TAFEL 82.

$$\int \sin x.\cos^p x.E\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-\cos^{p-1}x.E+\int \cos^{p-1}x.\Delta\,dx-\right.$$
$$\left.-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.E\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \sin x.E\frac{dx}{\Delta^2}=\mu_1. \qquad \int \sin x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta^2}=\iota_1.$$

$$\int \sin x.\cos^2 x.E\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-(1-k^2)\,\mu_1-\cos x.E+\frac{1}{2k}\,Bg\sin(k\sin x)+\frac{1}{2}\sin x.\Delta\right\}.$$

$$\int \sin x.\cos^3 x.E\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{6k^4}\{-6(1-k^2)k^2\iota+[2(2-k^2)-3\Delta^2]E-(1-k^2)F+k^2\sin x.\cos x.\Delta\}.$$

TAFEL 83.

$$\int \sin x.\cos^p x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta}E+\int \cos^{p-1}x\,dx-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.E\frac{dx}{\Delta^3}\right\}.$$

$$\int \sin x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta}E+\sin x\right\}.$$

$$\int \sin x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\Delta}E-x\right). \qquad \int \sin x.\cos^2 x.E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\lambda_1+\frac{\cos x}{\Delta}E-\sin x\right\}.$$

B 24

TAFEL 84.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)\,k^2} \Big\{ - \frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^2} E + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} \Big\}.$$

$$\int \sin x . \cos x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \Big\{ \frac{1}{\Delta^2} E - F \Big\}. \qquad \int \sin x . \cos^2 x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \Big\{ -\mu_1 + \frac{\cos x}{\Delta^2} E - \frac{1}{k} Bg\sin(k \sin x) \Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^2} \Big\{ 2\,k^2\,\iota - \frac{1 - k^2 \cos x}{\Delta^2} E + (1-k^2)\,F \Big\}.$$

TAFEL 85.

$$\int \tan g^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ - [\,(2p^2 - 15p + 20) -$$

$$- (p-1)(2p-5)\,k^2\,] \int \tan g^{p-2} x \,.\, E dx - [\,(3p^2 - 21p + 38) -$$

$$- (p-1)(p-3)\,k^2\,] \int \tan g^{p-4} x \,.\, E dx - (p-4)(p-5) \int \tan g^{p-6} x \,.\, E dx -$$

$$- [\,3\cos^2 x - (p - 1 - \sin^2 x)\,\Delta^2\,] \frac{\sin^{p-5} x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\tan g^{p-3} x}{\sin x \,.\, \cos x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\tan g\, x} E dx = \delta_1. \qquad \int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int \tan g\, x \,.\, E dx = \gamma_1.$$

$$\int \tan g^2 x \,.\, E dx = -\varepsilon_1 + \tan g\, x \,.\, E - 1 - \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} + \Delta.$$

$$\int \tan g^3 x \,.\, E dx = -\gamma_1 + \frac{1}{2} \{\, (1 + \sec^2 x)\, E - F - \tan g\, x \,.\, \Delta \,\}.$$

$$\int \tan g^4 x \,.\, E dx = \varepsilon_1 + \frac{1}{6\,(1-k^2)} \Big\{ (1 - 4\cos^2 x)(1-k^2) \frac{2 \tan g\, x}{\cos^2 x} E + 9\,(1-k^2) +$$

$$+ (8 - 9k^2) \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} - (1 + 8\cos^2 x)(1-k^2) \frac{\Delta}{\cos^2 x} \Big\}.$$

TAFEL 86.

$$\int tang^p x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{p(p+1)(1-k^2)} \Big\{ -\left[2(p-1) - \right.$$

$$\left. -(p+1)k^2 \right](p-1) \int tang^{p-2} x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} - (p-2)(p-3) \int tang^{p-4} x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} -$$

$$- \left[3 cos^2 x - (p + cos^2 x) \Delta^2 \right] \frac{tang^{p-3} x}{cos^4 x} E - \frac{tang^p x}{sin^2 x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x} E \frac{dx}{cos^2 x} = - cot x \, . \, E - 1 + L \frac{2 \sin x}{1 + \Delta} + \Delta. \qquad \int \frac{1}{tang\, x} E \frac{dx}{cos^2 x} = \gamma_1 + \delta_1.$$

$$\int E \frac{dx}{cos^2 x} = tang\, x \, . \, E - 1 - \sqrt{1-k^2} \, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} + \Delta.$$

$$\int tang\, x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + sec^2 x) E - F - tang\, x \, . \, \Delta \right\}.$$

$$\int tang^2 x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2) \, 2 \, tang^3 x \, . \, E + 3(1-k^2) +$$

$$+ (2 - 3k^2) \sqrt{1-k^2} \, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} - (1 + 2 cos^2 x)(1-k^2) \frac{\Delta}{cos^2 x} \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 x} = \frac{1}{12(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2) \, 4 F - \left[(7 - 8k^2) - \right.$$

$$\left. - 3(1-k^2) \, tang^4 x \right] E + \left[4(1-k^2) + 4 cos^2 x - 5 \Delta^2 \right] \frac{\sin x}{cos^3 x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 87.

$$\int tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11) -$$

$$-(p-1)(2p-9)k^2] \int tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx - [(p-4)(3p-13) -$$

$$-(p-1)(p-3)k^2] \int tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx -$$

$$-[3\,cos^2 x - \{(p-4) + 3\,cos^2 x\}\,\Delta^2]\,\frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x}\,E - tang^{p-4} x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x}\,cos^2 x \,.\, E\,dx = -\frac{3}{2}\,\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\,(2 + sin^2 x)\,cot\,x \,.\, E +$$

$$+ L\,\frac{2\,sin\,x}{1+\Delta} + \frac{1}{6\,k^2}\,\{(1-\Delta^3) - 6\,(1-\Delta)\}.$$

$$\int \frac{1}{tang\,x}\,cos^2 x \,.\, E\,dx = \delta_1 - \frac{1}{6\,k^2}\,\{(4-2\,k^2-3\,\Delta^2)\,E - (1-k^2)\,F + k^2\,sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{2}\,\Big\{\varepsilon_1 + sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, E - \frac{1}{3\,k^2}\,(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang\,x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\,\{(4-2\,k^2-3\,\Delta^2)\,E - (1-k^2)\,F + k^2\,sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{2}\,\Big\{\varepsilon_1 - sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, E + \frac{1}{3\,k^2}\,(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \gamma_1 - \frac{1}{6\,k^2}\,\{(4-2\,k^2-3\,\Delta^2)\,E - (1-k^2)\,F + k^2\,sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang^4 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = -\frac{3}{2}\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,(2 + cos^2 x)\,tang\,x \,.\, E -$$

$$-\sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\,cos\,x} - \frac{1}{6\,k^2}\,\{(1-\Delta^3) + 6\,k^2\,(1-\Delta)\}.$$

TAFEL 88.

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \left\{ [(p-2)^2 - (2p^2-12p+19)k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} E + \right.$$

$$\left. + (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} E + [3(1-k^2) + (p-5)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\Delta^3}{\cos^{p-2} x} + 1 \right\}.$$

$$\int \cos x . E dx = \sin x . E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2} \cos x . \Delta \qquad \int E dx = \varepsilon.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} E = \tang x . E - 1 - \sqrt{1-k^2} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta.$$

TAFEL 89.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \left\{ [(p-3) - (p-4)2k^2](p-3) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} E dx + \right.$$

$$+ (p-5)(p-6) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} E dx + [3 \cos^2 x -$$

$$\left. - \{ 4 + (p-6)\sin^2 x \} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} E + \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^3 \right\}.$$

$$\int \sin x . E dx = -\cos x . E + \frac{1}{2k} Bg\sin(k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x . \Delta. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} E dx = \gamma_1.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E dx = \frac{1}{\cos x} E - k\, Bg\sin(k\sin x) - \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} E dx = \frac{1}{2} \{ (1 + \sec^2 x) E - F - \tang x . \Delta \}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} E dx = \frac{1}{12(1-k^2)} \left\{ (2-k^2+\sec^4 x) E - (1-k^2)2F - [(3-2k^2) - (2-k^2)\sin^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \right\}.$$

TAFEL 90.

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(2p^2 - 9p + 11) -$$

$$- (3p^2 - 17p + 26)\, 4k^2] \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-2} x} E - [(p-3)^2 -$$

$$-(3p^2 - 25p + 54)k^2] \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-4} x} E + (p-5)(p-6)k^2 \int \frac{dx}{\sin x . \cos^{p-6} x} E -$$

$$- [\, 3\cos^2 x - \{ 4 + (p-6) \sin^2 x \} \Delta^2 \,] \frac{E}{\cos^{p-1} x} + \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E dx = \delta_1 - \frac{1}{6k^2} \{ (4 - 2k^2 - 3\Delta^2) E - (1-k^2) F + k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E dx = \beta_1 + \cos x . E - \frac{1}{2k} Bg\sin(k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x . \Delta.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \delta_1 . \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1 . \qquad \int \frac{dx}{\sin x . \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1 .$$

$$\int \frac{dx}{\sin x . \cos^2 x} E = \beta_1 + \frac{1}{\cos x} E - k\, Bg\sin(k \sin x) - \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x}.$$

TAFEL 91.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p+2)\,4pk^2} \Big\{ (p-1)\,8pk^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E dx - [\,(p-4)^2 + $$
$$+ (p-1)(p-3)\,4k^2\,] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E dx + (p-4)(p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . E dx +$$
$$+ [\,6(1-k^2) + 6k^2 \cos x - (p+2)\,\Delta^2\,] \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \sin x . E + 4 \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} E = 2 \Big\{ - \cot \tfrac{1}{2}x . E - 1 + k\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} + \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} E = \eta_1. \qquad\qquad \int E dx = \varepsilon_1.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x . E dx = -2\cos \tfrac{1}{2}x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2}x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x . E + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\frac{1}{3}(5 - \cos x) \cos \tfrac{1}{2}x . E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+8k)(1-k)\,3F(l,z) -$$
$$- (1-8k^2)\,6E(l,z) - \Big[(1 - 16k + 4k^2) - 4(1+k)\,k\cos x -$$
$$- \frac{2(4 + 5k + 20k^2) - (1+4k)\,\Delta^2}{1 + k - k\cos x} \Big] 2 \sin \tfrac{1}{2}x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2} \Big\{ 9k^2 \varepsilon_1 - (4 - \cos x)\,3k^2 \sin x . E -$$
$$- 6k(1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 1 + 6k^2 - 6k^2 \cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\frac{1}{6}(43 - 14\cos x + 3\cos^2 x) \cos \tfrac{1}{2}x . E + \frac{1}{63k^2\sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2)\,3(1-k)F(l,z) -$$
$$- (17 - 96k^2)\,6kE(l,z) - \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) +$$
$$+ 64(1+k)\,k^2 \cos x - 2k \frac{67 + 80k + 224k^2 + (1+4k)5\Delta^2}{1 + k - k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2}x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 92.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+3)4k^2}\Big\{(p^2-1)8k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx - [(p-3)+$$

$$+(p-1)4k^2](p-3)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx +$$

$$+[6\cos x - \{(p-5)+(p+3)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E + 2\sin x\,.\,\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}E\,dx = -2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{8k\cos\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}{1+k+k\cos x} + \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{2kF(l,y) -$$

$$-(1+2k)2E(l,y) - \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1 + \delta_1.$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = 2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)F(l,y) + 2kE(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\,.\,E + \frac{1}{4k}Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{4}\sin x\,.\,\Delta.$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{2}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}x.E - \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1-2k)(1-k)3F(l,y) - (1+2k^2)6E(l,y) -$$

$$-\Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{1}{24k^2}\{-[4-2k^2(1-3\cos x)-3\Delta^2]E + (1-k^2)F +$$

$$+3kBg\sin(k\sin x) + (3-\cos x)k^2\sin x\,.\,\Delta\}.$$

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{35k^2}\Big\{14k^2\sin^5\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{3\sqrt{2k}}\Big[(1+12k-12k^2)(1-k)F(l,y) -$$

$$-(11+12k^2)2kE(l,y) - \Big[(-1+4k+44k^2+16k^3) - 16(1+k)k^2\cos x -$$

$$-3\Delta^2 - 2k\frac{(15+20k+28k^2)-(1+4k)2\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big]\Big\}.$$

TAFEL 93.

$$\int sin^p \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \frac{1}{(p^2-1)4k^2} \Big\{ (p-1)(3p-5)4k^2 \int sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} - [(p-5)^2 +$$

$$+ (p-3)(3p-7)4k^2] \int sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} + [(2p^2 - 23p + 67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)4k^2] \int sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} - (p-6)(p-7) \int sin^{p-8} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} -$$

$$- [6 cos x - \{ (p-7) + (p+1) cos x \} \Delta^2] sin^{p-7} \tfrac{1}{2} x . E - 2 sin^{p-7} \tfrac{1}{2} x . sin x . \Delta^3 \Big\} .$$

$$\int \frac{dx}{sin \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x} E = 2 \beta_1 . \qquad \int \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} E = \zeta_1 . \qquad \int sin \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \beta_1 - \delta_1 .$$

$$\int sin^2 \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \zeta_1 - 2 sin \tfrac{1}{2} x . E - \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,y) + (1-k)F(l,y) + \frac{1-k+k cos x}{1+k+k cos x} cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\} .$$

$$\int sin^3 \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{2} cos x . E - \frac{1}{4k} Bg\, sin\, (k\, sin\, x) - \frac{1}{4} sin\, x . \Delta .$$

$$\int sin^4 \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \zeta_1 - \frac{1}{3} (7 - cos x) sin \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1-k)(1-12k) 3 F(l,y) - (1+12k^2) 6 E(l,y) -$$

$$- \Big[(1+44k+4k^2) - 4(1+k) k\, cos\, x - \frac{2(4+5k+40k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k+k\, cos\, x} \Big] cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\} .$$

$$\int sin^5 \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{24 k^2} \{ [4 - (1 - 9 cos x) 2k^2 - 3 \Delta^2] E -$$

$$- (1-k^2) F - 9k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) - (9 - cos x) k^2 sin\, x . \Delta \} .$$

$$\int sin^6 \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{cos \tfrac{1}{2} x} = \zeta_1 - \frac{1}{30} (73 - 16 cos x + 3 cos^2 x) sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{315 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 26k - 180k^2)(1-k) 3 F(l,y) - (5 + 36k^2) 30 k E(l,y) +$$

$$+ \Big[(-3 + 26k + 728k^2 + 104k^3) + 104(1+k) k^2 cos x + 9 \Delta^2 -$$

$$- 2k \frac{(68 + 95k - 364k^2) - (1+4k) 13 \Delta^2}{1+k+k\, cos\, x} \Big] cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\} .$$

TAFEL 94.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+2)\,4pk^2} \Big\{ (p-1)\,8pk^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx -$$

$$- [(p-4)^2 + (p-1)(p-3)4k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx + (p-4)(p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx -$$

$$- [\,6(1-k^2) - 6k^2 \cos x - (p+2)\Delta^2\,] \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, \sin x \,.\, E - 4 + 4 \cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} E = 2 \Big\{ \tan \tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 - k\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} E = \zeta_1. \qquad \int E dx = \varepsilon_1.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = 2\sin \tfrac{1}{2}x \,.\, E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k)F(l,y) + 2k\,E(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x} \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+8k)(1-k)\,3F(l,y) -$$

$$- (1-8k^2)\,6E(l,y) - \Big[(1 - 16k + 4k^2) - 4(1+k)\cos x -$$

$$- \frac{2(4 + 5k + 20k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1 + k + k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{24k^2} \Big\{ 9k^2 \varepsilon_1 + (4 + \cos x)\,3k^2 \sin x \,.\, E +$$

$$+ 6k(1-k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 1 - 6k^2 + 6k^2 \cos x \,.\, \Delta + \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{6}(43 + 14\cos x + 3\cos^2 x) \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, E + \frac{1}{63k^2\sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2)\,3(1-k)F(l,y) -$$

$$- (17 - 96k^2)\,6kE(l,y) - 9 - \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) + 64(1+k)k^2 \cos x -$$

$$- 2k\frac{67 + 80k + 224k^2 + (1+4k)\,5\Delta^2}{1 + k + k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 95.

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^p \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{(p+1)(p+3) 4 k^2} \Big\{ (p^2 - 1) 8 k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . E dx -$$

$$- [(p-3) + (p-1) 4 k^2](p-3) \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . E dx + (p-4)(p-5) \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . E dx +$$

$$+ [6 \cos x + \{(p-5) - (p+3) \cos x\} \Delta^2] \cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x . E + 2 \sin x . \cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 \Big\} .$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} E dx = 2 \sec \tfrac{1}{2} x . E + \frac{8 k \sin \frac{1}{2} x . \Delta}{1 + k - k \cos x} - \frac{2 \sqrt{2k}}{1 + 2k} \Big\{ (1 + 2k) 2 E(l, z) -$$

$$- 2 k F(l, z) + \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, z) \Big\} - L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2 k (1 - \cos x) + \Delta^2} .$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1 .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . E dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x . E + \frac{4}{3 \sqrt{2k}} \Big\{ 2 k E(l, z) + (1 - k) F(l, z) + \frac{1 - k - k \cos x}{1 + k - k \cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\} .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = - \frac{1}{2} \cos x . E + \frac{1}{4k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{4} \sin x . \Delta .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 2k^2) 6 E(l, z) - (1 - 2k)(1 - k) 3 F(l, z) +$$

$$+ \Big[(1 + 14 k + 4 k^2) - 4 (1 + k) k \cos x - \frac{2 (4 + 5 k + 10 k^2) - (1 + 4 k) \Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\} .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ [4 - 2 k^2 (1 + 3 \cos x) - 3 \Delta^2] E -$$

$$- (1 - k^2) F + 3 k Bg \sin (k \sin x) + (3 + \cos x) k^2 \sin x . \Delta \Big\} .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{35 k^2} \Big\{ - 14 k^2 \cos^5 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{1}{3 \sqrt{2k}} \Big[(11 + 12 k^2) 2 k E(l, z) -$$

$$- (1 + 12 k - 12 k^2)(1 - k) F(l, z) + \Big[(-1 + 4 k + 44 k^2 + 16 k^3) -$$

$$- 16 (1 + k) k^3 \cos x + 3 \Delta^3 - 2 k \frac{(15 - 20 k + 28 k^2) - (1 + 4 k) 2 \Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big] \Big\} .$$

TAFEL 96.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2}\Big\{(p-1)(3p-5)\,4k^2\int \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} -$$

$$-\left[(p-5)^2+(p-3)(3p-7)\,4k^2\right]\int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}+\left[(2p^2-23p+67)+\right.$$

$$\left.+(p-3)(p-5)\,4k^2\right]\int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}-(p-6)(p-7)\int \cos^{p-8}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}-$$

$$-\left[6\cos x+\{(p-7)-(p+1)\cos x\}\Delta^2\right]\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,E-2\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,\sin x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos\frac{1}{2}x}E=2\beta_1.\qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}E=\eta_1.\qquad \int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1.$$

$$\int\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+2\cos\tfrac{1}{2}x.E-\frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1+\frac{1}{2}\cos x\,.\,E-\frac{1}{4k}Bg\sin(k\sin x)-\frac{1}{4}\sin x\,.\,\Delta\,.$$

$$\int\frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+\frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x.E-\frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+12k^2)\,6E(l,z)-(1-k)(1-12k)3F(l,z)+$$

$$+\left[(1+44k+4k^2)-(1+k)\,4k\cos x-\frac{2(4+5k+40k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\right]\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1+\frac{1}{24k^2}\Big\{\left[-4+2k^2(1-9\cos x)+3\Delta^2\right]E+$$

$$+(1-k^2)F-9k\,Bg\sin(k\sin x)-(9+\cos x)\,k^2\sin x\,.\,\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+\frac{1}{30}(73+16\cos x+3\cos^2x)\cos\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{315k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5+36k^2)30kE(l,z)-$$

$$-(1+26k-180k^2)\,3(1-k)F(l,z)+\Big[(-3+26k+728k^2+104k^3)-$$

$$-104(1+k)k^2\cos x+9\Delta^3-2k\frac{(63+95k+364k^2)-(1+4k)13\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 97.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ -[(2p^2-11p+16)-(p-3)(p-5)2k^2] 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$- [(3p^2-24p+50)-(p-3)(p-5)4k^2] 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E dx - [(2p^2-21p+56)-$$

$$-(p-3)(p-5)2k^2] 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . E dx - (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$- [3\cos x - (p-4+\cos x)\Delta^2] \frac{2\sin^{p-7}\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x} E - \frac{4\, tang^{p-6}\frac{1}{2}x}{\cos^4 \frac{1}{2}x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{tang \frac{1}{2}x} E = \beta_1 + \delta_1. \qquad \int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int tang \tfrac{1}{2}x . E dx = \beta_1 - \delta_1.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\varepsilon_1 + 2\, tang \tfrac{1}{2}x . E - 2kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 2L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + 2\Delta - 2.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2}x . E dx = \delta_1 - \beta_1 + (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2}x) E - (1-k^2)2F - 2k\, Bg\sin(k\sin x) - 2\, tang \tfrac{1}{2}x . \Delta.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \varepsilon_1 + \frac{2}{3}\Big\{ -(1+2\cos x)\frac{tang\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x} E + 2(2+k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} +$$

$$+ 6kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - (3 + 2\cos x)\frac{\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}x} + 5 \Big\}.$$

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2}x . E dx = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{6}\Big\{(1-k^2)20F - \Big[(23+8k^2) - \frac{3}{4\cos^4\frac{1}{2}x}(3 + 6\cos x - \cos^2 x)\Big]E +$$

$$+ 24k\, Bg\sin(k\sin x) + [(7+2k^2) + (4+k^2)2\cos x]\frac{\sin x}{\cos^6\frac{1}{2}x}\Delta \Big\}.$$

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\varepsilon_1 + \frac{1}{30}\Big\{[(1+12k^2) + (23+6k^2)\cos x] 2 \frac{tang\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x} E -$$

$$- 180kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - (23 + 28k^2 - 6k^4) 4L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} - 2(65+6k^2) -$$

$$-[3\cos x - (2+\cos x)\Delta^2]\frac{3}{\sin\frac{1}{2}x . \cos^5\frac{1}{2}x} - [3(13+2k^2) + (34+3k^2)2\cos x + 23\cos^2 x]\frac{\Delta}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Big\}.$$

TAFEL 98.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{p(p+1)} \Big\{ -[(3p-4)-(p-3)4k^2](p-1) \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} -$$

$$-[(3p-8)-(p-1)4k^2)](p-3) \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} -$$

$$- [\, 3 \cos x - (p - 2 + \cos x)\, \Delta^2 \,] \frac{2 \sin^{p-5} \frac{1}{2}x}{cos^{p+1} \frac{1}{2}x} - \frac{4\, tang^{p-4} \frac{1}{2}x}{cos^4 \frac{1}{2}x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 \frac{1}{2}x} E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = 2 \Big\{ - cot \tfrac{1}{2}x \, . \, E - 1 + k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1 + \Delta} + \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang \frac{1}{2}x} E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = 2 \beta_1.$$

$$\int E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = 2 \Big\{ tang \tfrac{1}{2}x \, . \, E - 1 - k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} + \Delta \Big\}.$$

$$\int tang \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = (2 + sec^2 \tfrac{1}{2}x) E - (1 - k^2)\, 2 F - 2 k \, Bg \sin (k \sin x) - 2\, tang \tfrac{1}{2}x \, . \, \Delta.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2}{3} \Big\{ tang^3 \tfrac{1}{2}x \, . \, E + 3 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} +$$

$$+ (1 + 2k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} - (1 + cos^2 \tfrac{1}{2}x) \frac{\Delta}{cos^2 \frac{1}{2}x} + 2 \Big\}.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{6} \Big\{ (1 - k^2)\, 8 F - (11 + 8k^2 - 3\, tang^4 \tfrac{1}{2}x) E +$$

$$+ 12 k \, Bg \sin (k \sin x) + [\, (1 + 2k^2) + (1 + k^2)\, 2 \cos x \,] \frac{\sin x}{cos^4 \frac{1}{2}x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1}{10} \Big\{ - [\, (3 - 4k^2) - (1 + 2k^2) \cos x \,]\, 2 \frac{tang \frac{1}{2}x}{cos^2 \frac{1}{2}x} E -$$

$$- 20 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + (1 + 6k^2 - 2k^4)\, 4 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} - 2(5 + 2k^2) -$$

$$- [3 \cos x - (2 + \cos x) \Delta^2] \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x \, . \, cos^5 \frac{1}{2}x} + [(3 + 2k^2) + (3 + k^2) 2 \cos x + cos^2 x] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2}x} \Big\}.$$

TAFEL 99.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ -[(p-6)(2p-11)-(p-7)(p-9)2k^2]2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$- [3(p-6)^2 - (p-3)(p-9)4k^2]2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx - [(p-6)(2p-13) -$$

$$-(p-3)(p-5)2k^2]\, 2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx - (p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$- [\,3\cos x - (p-6+3\cos x)\,\Delta^2\,]\,\frac{4\, tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x}{\sin x} - 4\, tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4\tfrac{1}{2}x}{tang^2\tfrac{1}{2}x} E dx = -\frac{15}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{8}[(4+\cos x+5k^2\sin x+16cos^4\tfrac{1}{2}x . cot\tfrac{1}{2}x]E + 2L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta} -$$

$$-\frac{1}{2k}(1-5k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}\{(1-36k^2)+(4-\cos x)12k^2\Delta - \Delta^3\}.$$

$$\int \frac{cos^4\tfrac{1}{2}x}{tang\tfrac{1}{2}x} E dx = \beta_1 + \delta_1 + \frac{1}{24k^2}\{[-4+2k^2(1-9\cos x)+3\Delta^2]E +$$

$$+ (1-k^2)F - 9k\, Bg\sin(k\sin x) - (9+\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{9k^2\varepsilon_1 + (4+\cos x)3k^2\sin x . E + 6k(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - 1 - 6k^2 + 6k^2\cos x . \Delta + \Delta^3\Big\}.$$

$$\int tang\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2}\{[\,4-2k^2(1+3\cos x)-3\Delta^2\,]E -$$

$$-(1-k^2)F + 3k\, Bg\sin(k\sin x) + (3+\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{8}\Big\{\varepsilon_1 - \sin x . \cos x . E + \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2}\{(1-k^2)F - [\,4-2k^2(1-3\cos x)-3\Delta^2\,]E +$$

$$+ 3k\, Bg\sin(k\sin x) + (3-\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{9k^2\varepsilon_1 - (4-\cos x)3k^2\sin x . E -$$

$$-6k(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - 1 + 6k^2 - 6k^2\cos x . \Delta + \Delta^3\Big\}.$$

$$\int tang^5\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . E dx = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{24k^2}\{[\,4-(1-9\cos x)2k^2-3\Delta^2\,]E -$$

$$-(1-k^2)F - 9k\, Bg\sin(k\sin x) - (9-\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

TAFEL 100.

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2} x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-3)(p-5)\, 4k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} E -$$

$$- (p-5)(p-6)\, 8k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} E + (p-6)(p-8)\, 4k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} E +$$

$$+ [6(1-k^2) - 6k^2 \cos x + (p-8)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} E + 4 - \frac{4\Delta^3}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, E\, dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1+8k)(1-k) 3 F(l,y) - (1-8k^2) 6 E(l,y) -$$

$$- \Big[(1 - 16k + 4k^2) - 4(1+k)k \cos x - \frac{2(4 + 5k + 20k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1 + k + k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E\, dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2} \cos x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) F(l,y) + 2k E(l,y) + \frac{1 - k + k\cos x}{1 + k + k\cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int E\, dx = \varepsilon_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E = \eta_1.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E = 2 \Big\{ \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, E - 1 - k\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L \frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2 \sin^2 x} + \Delta \Big\}.$$

TAFEL 101.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} E\, dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-3) + (p-5)\, 4k^2]\, (p-3) \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} E\, dx -$$

$$- (p-5)(p-7)\, 8k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} E\, dx + (p-7)(p-9)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} E\, dx +$$

$$+ [\, 6 \cos x - \{ (p-1) - (p-9) \cos x \}\, \Delta^2\,]\, \frac{1}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} E - \frac{2 \sin x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1+2k^2) 6 E(l,z) - (1-2k)(1-k) 3 F(l,z) +$$

$$+ \Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)\, k \cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = -\frac{1}{2} \cos x . E + \frac{1}{4k} \, Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{4} \sin x . \Delta.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . E dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2k E(l,z) + (1-k) F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E\, dx = 2 \sec \tfrac{1}{2} x . E + \frac{8k \sin \frac{1}{2} x . \Delta}{1+k-k\cos x} - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ (1+2k)\, 2 E(l,z) -$$

$$- 2k F(l,z) + \frac{1-2k}{4k} \Pi(-r, l, z) \Big\} - L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r)\, 2k\, (1-\cos x) + \Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} E dx = (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2} x)\, E - (1-k^2)\, 2F - 2k\, Bg \sin (k \sin x) - 2 \tan \tfrac{1}{2} x . \Delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} E dx = \frac{1}{6} \Big\{ (4 - 8k^2 + 3 \sec^4 \tfrac{1}{2} x) E - (1-k^2) 4F - [2(1-k^2) + (1-2k^2)\cos x] \frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^7 \frac{1}{2} x} E\, dx = \frac{1}{45} \Big\{ (16 + 24k^2 - 64k^4 + 15 \sec^6 \tfrac{1}{2} x)\, E - (1+2k^2)(1-k^2)\, 16 F -$$

$$- [4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2) 2 \cos x + 2 \cos^2 x + (3-8k^2)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

B 26

TAFEL 102.

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^p\frac{1}{2}x}E = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)(p-5)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E -$$

$$-[(p-3)^2+(p-5)(3p-17)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E +$$

$$+(p-7)(3p-19)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}E -$$

$$-[6\cos x-\{(p-1)-(p-7)\cos x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \eta_1+\frac{1}{30}(73+16\cos x+3\cos^2 x)\cos\frac{1}{2}x.E-\frac{1}{315k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5+36k^2)30kE(l,z)-$$

$$-(1+26k-180k^2)3(1-k)F(l,z)+\Big[(-3+26k+728k^2+104k^3)-$$

$$-104(1+k)k^2\cos x+9\Delta^2-2k\frac{(63+95k+364k^2)-(1+4k)13\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\frac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1+\delta_1+\frac{1}{24k^2}\{[-4+2k^2(1-9\cos x)+3\Delta^2]E+$$

$$+(1-k^2)F-9k\,Bg\sin(k\sin x)-(9+\cos x)k^2\sin x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \eta_1+\frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\frac{1}{2}x.E-\frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+12k^2)6E(l,z)-(1-k)(1-12k)3F(l,z)+$$

$$+\Big[(1+44k+4k^2)-(1+k)4k\cos x-\frac{2(4+5k+40k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\frac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1+\delta_1+\frac{1}{2}\cos x.E-\frac{1}{4k}Bg\sin(k\sin x)-\frac{1}{4}\sin x.\Delta.$$

$$\int\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \eta_1+2\cos\frac{1}{2}x.E-\frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\frac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1+\delta_1. \qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}E = \eta_1.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x}E = 2\beta_1.$$

HOOFDSTUK IV.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN NOG PRODUKTEN OF MACHTEN VAN ELLIPTISCHE INTEGRALEN BEVATTEN.

1. Wanneer men nagaat, dat in de beide laatste Hoofdstukken algemeene herleidingsformulen gevonden zijn voor integralen, die onder het integraalteeken den factor $F\frac{1}{\Delta}$ of $E.\Delta$ bevatten, dan ziet men lichtelijk in, dat men voor deze factoren ook $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.F^2$ of $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.E^2$ schrijven kan. En evenzeer bij die integralen, waar de overeenkomstige gedeeltelijke factoren $\frac{1}{\Delta}$ of Δ voorkomen, zal men deze ook kunnen vervangen door de andere $\frac{d}{dx}.F$ en $\frac{d}{dx}.E$. Uit deze opmerking blijkt verder, dat men in zoodanige gevallen de nieuwe theoremas kan afleiden.

$$\int \varphi.F\frac{dx}{\Delta} = \int \varphi\, dx\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.F^2 = \frac{1}{2}\varphi.F^2 - \frac{1}{2}\int F^2\frac{d\varphi(x)}{dx}dx\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

$$\int \varphi.F.\Delta dx = \int \varphi.F dx\frac{d}{dx}.E = \varphi.E.F - \int E dx \left\{ \frac{\varphi}{\Delta} + F\frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}, \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

$$\int \varphi.E\frac{dx}{\Delta} = \int \varphi.E dx\frac{d}{dx}.F = \varphi.E.F - \int F dx \left\{ \varphi.\Delta + E\frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}, \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

$$\int \varphi.E.\Delta\, dx = \int \varphi.dx\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.E^2 = \frac{1}{2}\varphi.E^2 - \frac{1}{2}\int E^2\frac{d\varphi(x)}{dx}dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Hier leveren nu de eerste en laatste theorema's (*e*) en (*h*) integralen, die den factor F^2 of E^2 bezitten; terwijl de beide middelste theorema's (*f*) en (*g*) integralen doen ontstaan met den factor $E.F$; indien althans de daarbij voorkomende

integralen $\int E.\varphi \frac{dx}{\Delta}$ en $\int F.\varphi.\Delta\, dx$ bij de te behandelen gevallen bekend zijn; eigenlijk zijn deze beide laatste theoremas elkanders omgekeerde, zoo als trouwens te verwachten was.

Uit dit nieuw aangegeven oogpunt ons stel Tafels 35 — 102 onderzoekende, blijkt het gereedelijk, dat onze oogst van nieuwe uitkomsten, hoe belangrijk ook, slechts zeer schraal kan zijn.

2. Beginnen wij met de algemeene herleidingsvergelijking (XIX) van Hoofdstuk II, en passen wij daarop het theorema (e) toe, dan komt er

$$p k^2 \left\{ \sin^p x . \cos x . F^2 - \int F^2 dx \left[p \sin^{p-1} x . \cos^2 x - \sin^{p+1} x \right] \right\} = - 2 \sin^{p-1} x . \Delta . F +$$

$$+ 2 \int \sin^{p-1} x\, dx + (p-1) \left\{ \sin^{p-2} x . \cos x . F^2 - \int F^2 dx \left[(p-2) \sin^{p-3} x . \cos^2 x - \sin^{p-1} x \right] \right\}.$$

Bedenken wij echter, dat algemeen

$$A \sin^{a-1} x . \cos^2 x - \sin^{a+1} x = A \sin^{a-1} x - (A + 1) \sin^{a+1} x$$

is, en vervangen wij tevens p door $p - 1$, zoo verkrijgen wij na oplossing

$$\int \sin^p x . F^2 dx = \frac{1}{(p-1)\, p k^2} \left\{ \left[(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2 \right] \int \sin^{p-2} x . F^2 dx - \right.$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . F^2 dx - \left[1 - (p-1) \Delta^2 \right] \sin^{p-3} x . \cos x . F^2 +$$

$$\left. + 2 \int \sin^{p-2} x\, dx - 2 \sin^{p-2} x . \Delta . F \right\} . \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LXXIII)}.$$

Op dezelfde wijze kunnen wij nog de algemeene herleidingsformule (XXV) van Hoofdstuk II behandelen, en daarop vooreerst het theorema (e) toepassen,

$$p k^2 \left\{ \sin x . \cos^p x . F^2 - \int F^2 dx \left[\cos^{p+1} x - p \sin^2 x . \cos^{p-1} x \right] \right\} =$$

$$= - 2 \cos^{p-1} x . \Delta . F + 2 \int \cos^{p-1} x\, dx - (p-1)(1-k^2) \left\{ \sin x . \cos^{p-2} x . F^2 - \right.$$

$$\left. - \int F^2 dx \left[\cos^{p-1} x - (p-2) \sin^2 x . \cos^{p-3} x \right] \right\};$$

en vervolgens daarbij de bekende goniometrische herleiding

$$\cos^{a+1} x - A \sin^2 x . \cos^{a-1} x = (A + 1) \cos^{a+1} x - A \cos^{a-1} x$$

gebruiken, waarna men den exponent p met de eenheid moet verminderen, om ten slotte te verkrijgen

$$\int \cos^p x . F^2 dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \Big\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)] \int \cos^{p-2} x . F^2 dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x . F^2 dx - [(1-k^2) - (p-1) \Delta^2] \sin x . \cos^{p-3} x . F^2 -$$

$$- 2 \int \cos^{p-2} x \, dx + 2 \cos^{p-2} x . \Delta . F \Big\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(LXXIV)}$$

Ten einde voor deze beide algemeene herleidingsformulen de daarbij noodige eindintegralen te vinden, ga men alzoo te werk in dergelijken zin, als bij genoemde formulen zelve; dat is, men passe het theorema (e) toe, vooreerst op de integralen (82) en (95), die dan leveren

$$2\theta = \cos x . F^2 + \int F^2 . \sin x \, dx,$$

en

$$2\lambda = \sin x . F^2 - \int F^2 . \cos x \, dx;$$

waaruit door oplossing

$$\int \sin x . F^2 dx = 2\theta - \cos x . F^2 , \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(238)}$$

$$\int \cos x . F^2 dx = - 2\lambda + \sin x . F^2 . \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(239)}$$

De integraal (80) geeft evenzoo

$$\frac{2}{k^2}(x - \Delta . F) = \sin x . \cos x . F^2 - \int F \, dx \, (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Daar echter

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

is, behoeven wij hier ter bepaling der overige integralen eerst

$$\int F^2 dx = \nu, \quad \ldots \ldots \quad (240)$$

weder eene nieuwe transcendente; daarmede echter verkrijgt men dan uit de vorige vergelijking

$$\int \sin^2 x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{k^2}(x - \Delta . F) - \frac{1}{2}\sin x . \cos x . F^2 \,, \quad \ldots \ldots \quad (241)$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{k^2}(x - \Delta . F) + \frac{1}{2}\sin x . \cos x . F^2 \ldots \ldots \quad (242)$$

Uit de integraal (77) leidt men af

$$-\frac{2\Delta}{\sin x}F + 2L\,tang\,\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos x}{\sin^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(-\frac{1}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x}\right).$$

Wanneer men hier de nieuwe transcendente

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin x} = \zeta \quad \ldots \ldots \quad (243)$$

invoert, vindt men na oplossing

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\xi - \frac{\Delta}{\sin x}F + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}F^2 \ldots \ldots \quad (244)$$

Terwijl men de integraal (93) evenzoo behandelt, komt er

$$\frac{2}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}F - L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(\frac{1}{\cos x} + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right) =$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}F^2 - \int F\,dx\left(\frac{2}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right).$$

Ook hier behoort men weder de integraal

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos x} = \varrho \quad \ldots \ldots \quad (245)$$

als eene nieuwe transcendente te beschouwen, en is alsdan in staat de integraal optelossen

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x} F - L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} F^2 \;.\;.\;. (246)$$

Van deze integralen behooren nu (240) en (241) als eindintegralen bij de herleidingsformule (LXXIII) voor evene waarden van p; terwijl bij onevene waarden van p daartoe de integralen (244), (243) en (238) dienen. De eindintegralen voor de herleidingsformule (LXXIV) worden voor het geval, dat de exponent p even is, bepaald door de integralen (240) en (242), en voor het geval, dat p oneven is, door de integralen (246), (245) en (239).

3. Voor de algemeene herleidingsformule (XX) van Hoofdstuk II geldt het tweede theorema (f); zijne toepassing levert hier

$$(p+2)k^2 \left\{ \sin^p x.\cos x.E.F - \int E dx\left[\sin^p x.\cos x\frac{1}{\Delta} + F(p\sin^{p-1}\cos^2 x - \sin^{p+1} x)\right] \right\} =$$

$$= -\sin^{p-1} x.\Delta^2.F + \int \sin^{p-1} x.\Delta^2 dx + (p-1)\left\{ \sin^{p-2} x.\cos x.E.F - \right.$$

$$\left. - \int E dx\left[\sin^{p-2} x.\cos x\frac{1}{\Delta} + F\{(p-2)\sin^{p-3} x.\cos^2 x - \sin^{p-1} x\}\right]\right\}.$$

Van de beide integralen

$$\int E.\sin^a x.\cos x\frac{dx}{\Delta},$$

die hier voorkomen, kan men er eene verdrijven door bij deze uitkomst lid bij lid optetellen de herleidingsformule (LV) uit Hoofdstuk III,

$$p k^2\int \sin^p x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta} = -\sin^{p-1}x.\Delta.E + \int \sin^{p-1}x.\Delta^2 dx + (p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta};$$

want dan is

$$(p+2)k^2\sin^p x.\cos x.E.F - 2k^2\int \sin^p x.\cos x.E\frac{dx}{\Delta} - (p+2)k^2\int E.F.dx[p\sin^{p-1}x -$$

$$-(p+1)\sin^{p+1}x] = -(\Delta^2.F + E)\sin^{p-1}x.\Delta + 2\int \sin^{p-1}x.\Delta^2 dx +$$

$$+(p-1)\sin^{p-2}x.\cos x.F.E - (p-1)\int E.F dx[(p-2)\sin^{p-3}x - (p-1)\sin^{p-1}x];$$

waaruit door oplossing volgt, indien men tevens p door $p-1$ vervangt,

$$\int sin^p x . E . F dx = \frac{1}{(p+1) p k^2} \Big\{ [(p-2)^2 + (p^2-1) k^2] \int sin^{p-2} x . E . F dx -$$

$$-(p-2)(p-3) \int sin^{p-4} x . E . F dx - (E + \Delta^2 . F) sin^{p-3} x . \Delta + 2 \int sin^{p-3} x . \Delta^2 dx +$$

$$+ 2 k^2 \int sin^{p-1} x . cos x . E \frac{dx}{\Delta} - [3 - (p+1) \Delta^2] sin^{p-3} x . cos x . E . F^2 \Big\} . . \text{(LXXV)}$$

Eindelijk kan men het tweede theorema (f) evenzeer toepassen op de algemeene herleidingsformule (XXVI) van Hoofdstuk II.

$$(p+2)k^2 \Big\{ sin x . cos^p x . E . F - \int E dx \Big[sin x . cos^p x \frac{1}{\Delta} + F(cos^{p+1} x - p sin^2 x . cos^{p-1} x) \Big] \Big\} =$$

$$= - cos^{p-1} x . \Delta^3 . F + \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \Big\{ sin x . cos^{p-2} x . E . F -$$

$$- \int E dx \Big[sin x . cos^{p-2} x \frac{1}{\Delta} + F(cos^{p-1} x - (p-2) sin^2 x . cos^{p-3} x) \Big] \Big\} .$$

Hier komen weder twee integralen van den vorm

$$\int E . sin x . cos^p x \frac{dx}{\Delta}$$

voor; eene daarvan kan men elimineeren door de algemeene herleidingsformule (LXI) van Hoofdstuk III,

$$p k^2 \int sin x . cos^p x . E \frac{dx}{\Delta} = - cos^{p-1} x . \Delta . E + \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx -$$

$$- (p-1)(1-k^2) \int sin x . cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta},$$

lid voor lid bij de verkregen uitkomst optetellen, waardoor inderdaad de volgende verkregen wordt

$$(p+2)k^2 sin x . cos^p x . E . F - 2 k^2 \int sin x . cos^p x . E \frac{dx}{\Delta} - (p+2) k^2 \int E . F dx [(p+1) cos^{p+1} x -$$

$$- p cos^{p-1} x] = - (\Delta^2 . F + E) cos^{p-1} x . \Delta + 2 \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx -$$

$$- (p-1)(1-k^2) sin x . cos^{p-2} x . E . F + (p-1)(1-k^2) \int E . F dx [(p-1) cos^{p-1} x - (p-2) cos^{p-3} x].$$

Stelt men nu daarin $p-1$ in plaats van den exponent p, zoo komt men door oplossing tot

$$\int cos^p x . E . F\, dx = \frac{1}{(p+1)pk^2}\Big\{[(p^2-1)k^2-(p-2)^2(1-k^2)]\int cos^{p-2} x . E . F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4} x . E . F\, dx + (E + \Delta^2 . F)\, cos^{p-3} x . \Delta -$$

$$- 2\int cos^{p-2} x . \Delta^2\, dx - 2\, k^2 \int sin\, x . cos^{p-1} x . E \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- [3(1-k^2) - (p+1)\Delta^2]\, sin\, x . cos^{p-3} x . E . F\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (LXXVI)$$

Hetzelfde theorema (f) zal ons hier dienst moeten bewijzen bij het afleiden der eindintegralen, noodig voor het nuttige gebruik der zoo even gevonden algemeene herleidingsformulen. Daardoor levert vooreerst de integraal (81)

$$\frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)x + k^2 sin\, x . cos\, x - 2\Delta^3 . F\} = sin x . cos x . E . F - \int E dx\Big[\frac{sin x . cos x}{\Delta} + F(cos^2 x - sin^2 x)\Big].$$

In het tweede lid dezer vergelijking komen onder het integraalteeken drie termen voor, die dus drie integralen opleveren: de eerste, die hier niet tehuis behoort, kan men elimineeren door lid voor lid de integraal (197) bij te tellen,

$$\frac{1}{2k^2}\{(2-k^2)x + k^2 sin\, x . cos\, x - 2\Delta . E\} = \int sin\, x . cos\, x . E \frac{dx}{\Delta};$$

waardoor er komt

$$\frac{1}{3k^2}\{(2-k^2)\, 2x + 2k^2 sin\, x . cos\, x - (\Delta^2 . F + 3E)\Delta\} =$$

$$= sin\, x . cos\, x . E . F - \int E . F\, dx\, (cos^2 x - sin^2 x).$$

Maar men heeft

$$cos^2 x - sin^2 x = 1 - 2\, sin^2 x = 2\, cos^2 x - 1;$$

zoodra men dus de integraal

$$\int E . F\, dx = \sigma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (247)$$

eene nieuwe transcendente wederom, invoert, leidt men uit het voorgaande af

$$\int \sin^2 x . E . F dx = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)2x + (2-3E.F)k^2 \sin x . \cos x - (\Delta^2 . F + 3E)\Delta\} \ , \ . \ . \ . \ . \ (248)$$

$$\int \cos^2 x . E . F dx = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)2x + (2-3E.F)k^2 \sin x . \cos x - (\Delta^2 . F + 3E)\Delta\} . \ . \ . \ . \ (249)$$

Verder geeft de integraal (84) evenzoo

$$-k^2\theta - \frac{\Delta}{\sin x} F + L\, tang\, \tfrac{1}{2} x = \frac{\cos x}{\sin^2 x} E . F - \int E dx \left\{\frac{\cos x}{\sin^2 x}\frac{1}{\Delta} + F\left(-\frac{1}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right)\right\}.$$

Ten einde hier de vreemde integraal, — die in het tweede lid, als eerste der drie aldaar voorkomende integralen, gevonden wordt — naar behooren te verwijderen, telle men lid voor lid de integraal (194)

$$k^2 \cos x - k^2 - \frac{\Delta}{\sin x} E + L\, tang\, \tfrac{1}{2} x = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E \frac{dx}{\Delta}$$

bij, om te verkrijgen

$$-k^2\theta + k^2 \cos x - k^2 - (E+F)\frac{\Delta}{\sin x} + 2 L\, tang\, \tfrac{1}{2} x = \frac{\cos x}{\sin^2 x} E . F - \int E . F dx \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x}\right).$$

Stel dus

$$\int E . F \frac{dx}{\sin x} = \tau \ , \ . \ (250)$$

eene nieuwe, hier noodige, transcendente, dan wordt

$$\int E . F \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\left\{\tau - k^2\theta - k^2 + 2 L\, tang \tfrac{1}{2} x - (E+F)\frac{\Delta}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}(E . F - 1 + \Delta^2)\right\} . . (251)$$

Eindelijk geeft nog de integraal (97) langs denzelfden weg door het theorema (*f*)

$$k^2\lambda + \frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} E . F - \int E dx \left\{\frac{\sin x}{\cos^2 x}\frac{1}{\Delta} + F\left(\frac{1}{\cos x} + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right)\right\},$$

waaruit nu weder in het tweede lid de eerste term, die daar onder het integraalteeken voorkomt, moet geëlimineerd worden: dit gelukt, indien men lid voor lid de integraal (210)

$$\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}E - k^2 \sin x - (1-k^2)\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \frac{dx}{\Delta}$$

bijtelt, want dan komt er

$$k^2\lambda + \frac{1}{1-k^2}\{E + (1-k^2)F\}\frac{\Delta}{\cos x} - \frac{k^2}{1-k^2}\sin x - 2\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) =$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}E\,.\,F - \int E\,.\,F\, dx\left(\frac{2}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right).$$

Men is verplicht hier wederom de integraal

$$\int E\,.\,F\frac{dx}{\cos x} = v\, , \qquad \ldots \qquad (252)$$

hoezeer eene nieuwere transcendente, in te voeren, maar erlangt dan ook

$$\int E\,.\,F\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left\{v - k^2\lambda - \frac{1}{1-k^2}\{E + (1-k^2)F\}\frac{\Delta}{\cos x} + \right.$$
$$\left. + 2\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + \left(E\,.\,F + 1 - \frac{\Delta^2}{1-k^2}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right\} \qquad \ldots \qquad (253)$$

De algemeene herleidingsformule (LXXV) gebruikt van deze uitkomsten als eindintegralen bij onevene waarden van den exponent p, de integralen (251) en (250); bij evene waarden daarentegen de integralen (247) en (248). De andere herleidingsvergelijking (LXXVI) vereischt evenzeer verschillende eindintegralen, naarmate p even of oneven is; in het laatste geval vindt men daarvoor de integralen (253) en (252), in het eerste de integralen (247) en (249).

4. Met hetzelfde recht en met dezelfde hoop op goeden, en niet minder merkwaardigen, uitslag mogen wij nu Hoofdstuk III opslaan. Vooreerst vindt men de algemeene herleidingsformule (LV), geschikt voor de toepassing van het theorema (g). Daardoor verkrijgen wij dan ook

$$p k^2 \left\{ \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - \int F dx [\sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta + E(p \sin^{p-1} x \,.\, \cos^2 x - \sin^{p+1} x)] \right\} =$$

$$= - \sin^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + (p-1) \left\{ \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - \right.$$

$$\left. - \int F dx \left[\sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta + E \{ (p-2) \sin^{p-3} x \,.\, \cos^2 x - \sin^{p-1} x \} \right] \right\}.$$

Hier komen twee integralen voor van den vorm

$$\int F dx \,.\, \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta ;$$

eene daarvan kan men gemakkelijk elimineeren, door bij deze uitkomst lid voor lid de algemeene herleidingsformule (XX) van het tweede Hoofdstuk

$$(p+2) k^2 \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F dx = - \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, F +$$

$$+ \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + (p-1) \int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F dx$$

op te tellen; deze som wordt

$$p k^2 \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F + 2 k^2 \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F dx - p k^2 \int E \,.\, F dx \{ p \sin^{p-1} x$$

$$- (p+1) \sin^{p+1} x \} = - (\Delta^2 \,.\, F + E) \sin^{p-1} x \,.\, \Delta + 2 \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx +$$

$$+ (p-1) \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - (p-1) \int E \,.\, F dx [(p-2) \sin^{p-3} x - (p-1) \sin^{p-1} x].$$

Vervangt men nu eerst p door $p-1$, dan geeft de eenvoudige oplossing

$$\int \sin^p x \,.\, E \,.\, F dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \left\{ [(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, E \,.\, F dx - \right.$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, E \,.\, F dx - (\Delta^2 F + E) \sin^{p-2} x \,.\, \Delta + 2 \int \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^2 dx -$$

$$\left. - 2 k^2 \int \sin^{p-1} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F dx - [1 - (p-1) \Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F \right\} \;.\;.\;.\;.\; (\text{LXXV}^a)$$

Vervolgens ontmoeten wij daar de algemeene herleidingsformule (LXI), waarop men evenzeer het theorema (g) toepassen kan; daardoor ontstaat de vergelijking

$$p k^2 \left\{ \sin x . \cos^p x . E . F - \int F dx \left[\sin x . \cos^p x . \Delta + E(\cos^{p+1} x - p \sin^2 x . \cos^{p-1} x)\right]\right\} =$$

$$= - \cos^{p-1} x . \Delta . E + \int \cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2)\left\{ \sin x . \cos^{p-2} x . E . F - \right.$$

$$\left. - \int F dx \left[\sin x . \cos^{p-2} x . \Delta + E \{\cos^{p-1} x - (p-2) \sin^2 x . \cos^{p-3} x\}\right]\right\}.$$

Ten aanzien van de beide integralen van den vorm $\int F dx \sin^2 x . \cos^p x . \Delta$, die hier eigenlijk niet tehuis behooren, kan men wederom op dezelfde wijze handelen, als reeds vroeger gedaan is; hier telle men bij het vorige, lid voor lid, op de algemeene herleidingsvergelijking (XXVI) uit het tweede Hoofdstuk,

$$(p+2)k^2 \int \sin x . \cos^p x . \Delta . F dx = -\cos^{p-1} x . \Delta^3 . F + \int \cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta . F dx;$$

dan verkrijgt men

$$p k^2 \sin x . \cos^p x . E . F + 2 k^2 \int \sin x . \cos^p x . \Delta . F dx - p k^2 \int E . F dx \{(p+1) \cos^{p+1} x - p \cos^{p-1} x\} =$$

$$= -(\Delta^2 F + E) \cos^{p-1} x . \Delta + 2 \int \cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \sin x . \cos^{p-2} x . E . F +$$

$$+ (p-1)(1-k^2) \int E . F dx \{(p-1) \cos^{p-1} x - (p-2) \cos^{p-3} x\}.$$

Uit deze vergelijking kan men nu, nadat men vooraf den exponent p met de eenheid verminderd heeft, de integraal oplossen, waarom het ons te doen is, als volgt

$$\int \cos^p x . E . F dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \left\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)] \int \cos^{p-2} x . E . F dx + \right.$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x . E . F dx + (\Delta^2 F + E) \cos^{p-2} x . \Delta - 2 \int \cos^{p-2} x . \Delta^2 dx +$$

$$\left. + 2 k^2 \int \sin x . \cos^{p-1} x . \Delta . F dx - [(1-k^2) - (p-1)\Delta^2] \sin x . \cos^{p-3} x . E . F \right\} . . \text{(LXXVI}^a\text{)}$$

De beide laatste, zoo even gevondene, algemeene herleidingsformulen, zijn met

voorbedacht (LXXV^a) en (LXXVI^a) genoemd, omdat zij voor de herleiding van juist dezelfde integraal dienen, als waarvoor de vroegere formulen (LXXV) en (LXXVI) bestemd waren. De uitkomsten hebben dan ook in vele opzichten eene groote overeenkomst, maar in een bijzonder punt, dat hier als hoofdzaak kan gelden, wijken zij van elkander af. Het is ons toch telkens wel gelukt, om een der hier vreemde integralen $\int sin^a x . cos^b x . E \frac{dx}{\Delta}$ of $\int sin^a x . cos^b x . \Delta . F dx$ te elimineeren, maar de andere integraal, telkens van denzelfden vorm, bleef in de vergelijking bestaan. Vandaar dat, hoezeer de beide theoremas (*f*) en (*g*) eigenlijk niet onderscheiden waren, toch de uitkomsten van hunne toepassing in zooverre anders waren, dat in de algemeene herleidingsformulen van N°. 3 de eerste der vermelde integralen, in die van dit Nummer daarentegen de tweede van die integralen overbleven; en wel in de beide herleidingsformulen (LXXV) voor $a = p-1$, $b = 1$, en voor de beide herleidingsvergelijkingen (LXXVI) voor $a = 1, b = p-1$.

Wat de praktische toepassing der beide stellen herleidingsformulen betreft, kan men in de keuze zich geheel laten leiden door omstandigheden van reeds bekende integralen, enz. Het spreekt dus ook wel van zelf, dat men hier geene nieuwe eindintegralen heeft te zoeken, omdat bij hunne opsporing in N°. 3 toch de integraal $\int sin^a x . cos^b x . E \frac{dx}{\Delta}$, die er nog in voorkwam, eerst moest verdreven worden.

5. Maar toch kunnen wij uit het derde Hoofdstuk andere herleidingsformulen nemen, en daarmede tot nieuwe, merkwaardige uitkomsten geraken, wanneer men daarop het laatste theorema (*h*) toepast. De eerste daarvan is de algemeene herleidingsvergelijking (LVI); en deze levert door de aangegeven bewerking

$$(p+2) k^2 \left\{ sin^p x . cos x . E^2 - \int E^2 dx \left[p \, sin^{p-1} x . cos^2 x - sin^{p+1} x \right] \right\} =$$

$$= -2 sin^{p-1} x . \Delta^3 . E + 2 \int sin^{p-1} x . \Delta^4 dx + (p-1) \left\{ sin^{p-2} x . cos x . E^2 - \right.$$

$$\left. - \int E^2 dx \left[(p-2) sin^{p-3} x . cos^2 x - sin^{p-1} x \right] \right\}.$$

Bedenkt men, dat hier algemeen

$$A \, sin^{a-1} x . cos^2 x - sin^{a+1} x = A \, sin^{a-1} x - (A+1) sin^{a+1} x$$

is, en vervangt men tevens p door $p-1$, zoo komt er

$$\int sin^p x \,.\, E^2 dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\Big\{\,[\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,]\int sin^{p-2} x \,.\, E^2 dx -$$

$$-(p-2)(p-3)\int sin^{p-4} x \,.\, E^2 dx - 2\,sin^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E +$$

$$+ 2\int sin^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx - [\,1-(p+1)\,\Delta^2\,]\, sin^{p-3} x \,.\, cos\, x \,.\, E^2 \Big\} \,.\,.\,.\,.\,.\, \text{(LXXVII)}$$

Ten slotte is het nog de algemeene herleidingsformule (LXII), waarop men het theorema (*h*) kan toepassen; hierdoor zal men wederom verkrijgen

$$(p+2)\,k^2\,\Big\{\, sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E^2 - \int E^2\, dx\,[\,cos^{p+1} x - p\, sin^2 x \,.\, cos^{p-1} x\,]\,\Big\} =$$

$$= -\,2\, cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + 2\int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^4 dx - (p-1)(1-k^2)\Big\{ sin\, x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E^2 -$$

$$-\int E^2\, dx\,[\,cos^{p-1} x - (p-2)\, sin^2 x \,.\, cos^{p-3} x\,]\,\Big\}.$$

Men moet in deze vergelijking telkens de goniometrische herleiding

$$cos^a x - A\, sin^2 x \,.\, cos^{a-2} x = (A+1)\, cos^a x - A\, cos^{a-2} x$$

gebruiken, en vervolgens $p-1$ voor den exponent p in de plaats stellen, ten einde ten slotte daaruit de volgende herleidingsformule af te leiden.

$$\int cos^p x \,.\, E^2\, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\Big\{\,[\,(p^2-1)\,k^2 - (p-2)^2(1-k^2)\,]\int cos^{p-2} x \,.\, E^2\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4} x \,.\, E^2 dx + 2\, cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E -$$

$$-\,2\int cos^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx - [\,3\,(1-k^2) - (p+1)\,\Delta^2\,]\, sin\, x \,.\, cos^{p-3} x \,.\, E^2 \Big\} \,.\,.\, \text{(LXXVIII)}$$

Ook voor deze beide herleidingsvergelijkingen moet men nog de eindintegralen opzoeken, hetgeen weder geschiedt door de toepassing van hetzelfde theorema (*h*) op daarvoor geschikte, reeds gevonden integralen. Vooreerst geeft langs dezen weg de integraal (198)

$$\frac{1}{12k^2}\{-8\Delta^3 E+(8-8k^2+3k^4)x+[3(2-k^2)+2\Delta^2]k^2 sin x.cos x\} = sin x.cos x.E^2-\int E^2 dx\,[cos^2 x-sin^2 x].$$

Wanneer men zich weder van eene nieuwe transcendente

$$\int E^2 . dx = \varphi \ldots\ldots (254)$$

bedient, verkrijgt men uit de vorige vergelijking, daar toch

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

is, door oplossing

$$\int \sin^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24k^2}\{-8\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4)x +$$

$$+ [3(2 - k^2) + 2\Delta^2 - 12E^2] k^2 \sin x . \cos x\}, \ldots\ldots (255)$$

$$\int \cos^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{24k^2}\{-8\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4)x +$$

$$+ [3(2 - k^2) + 2\Delta^2 - 12E^2] k^2 \sin x . \cos x\}. \ldots\ldots (256)$$

Verder komt er door middel van ons theorema uit de integraal (201)

$$2\left(-k^2\theta_1 - \frac{\Delta}{\sin x}E + k^2\cos x - k^2 + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\right) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}E^2 - \int E^2 dx\left(\frac{-1}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right).$$

Nu is wel

$$\frac{-1}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x},$$

maar men moet hier toch de integraal

$$\int E^2 \frac{dx}{\sin x} = \chi \ldots\ldots (257)$$

als eene nieuwe transcendente invoeren; eerst dan kan men ook uit het vorige afleiden

$$\int E^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\chi - k^2\theta_1 - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}(E^2 + 2\Delta^2 - 2) - \frac{\Delta}{\sin x}E - k^2 - L\,tang\,\tfrac{1}{2}x. \;. (258)$$

Ten laatste blijft ons nog de integraal (214) over, geschikt voor de toepassing van het theorema (**h**): zij geeft hier vooreerst

$$2\left\{k^2\lambda_1+\frac{\Delta}{\cos x}E-k^2\sin x-(1-k^2)L\,tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right\}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}E^2-\int E^2\,dx\left(\frac{1}{\cos x}+2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right).$$

Bedenkt men evenwel, dat $\frac{1}{\cos x}+2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}=-\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\cos^3 x}$ is, zoo is men nog eens verplicht, een nieuwe transcendente in te voeren, de integraal

$$\int E^2\frac{dx}{\cos x}=\psi\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (259)$$

en daarmede vindt men eindelijk

$$\int E^2\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\psi-k^2\lambda_1+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}\left[E^2-2(1-k^2)+2\Delta^2\right]-\frac{\Delta}{\cos x}E+(1-k^2)L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x\right)\ldots(260)$$

6. En hiermede zijn wij aan het einde van ons onderzoek gekomen, dat tot merkwaardige uitkomsten heeft gevoerd, zoowel wat algemeene herleidingsformulen betreft, als ten opzichte van hare eindintegralen, zonder welke toch de eerste weinig nut hebben. Was het wel is waar noodzakelijk eenige nieuwe transcendenten in te voeren, hetgeen bij integralen van zoo bijzonderen vorm, als de hier behandelde, niet zoo geheel vreemd is; daardoor waren wij dan ook in staat gesteld, om vele onderling zamenhangende integralen op te sporen. Menige soort van symetrie kan men daarbij tusschen deze integralen waarnemen, zooals bij eene aandachtige beschouwing der Tafels achter het 2[de] en 3[de] Hoofdstuk, zoowel als van de hier volgende, herhaaldelijk zal blijken.

Stelt men zich de vraag, of men in deze richting nog verder zoude kunnen gaan, dan schijnt deze ontkennend beantwoord te moeten worden. Immers de onderzoekingen in N°. 9, 10 en 11 van Hoofdstuk II, die aldaar tot geene geschikte uitkomsten konden voeren, snijden dus ook den weg af voor verdere onderzoekingen als in dit Hoofdstuk.

TAFELS 103—108.

VERKLARING.

$$\int = \int_0^x, \quad \Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \quad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E = \int_0^x \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

$$\theta = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}, \qquad \nu = \int F^2\, dx, \qquad \upsilon = \int E.F \frac{dx}{\cos x},$$

$$\lambda = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}, \qquad \xi = \int F^2 \frac{dx}{\sin x}, \qquad \varphi = \int E^2\, dx,$$

$$\theta_1 = \int \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta}, \qquad \varrho = \int F^2 \frac{dx}{\cos x}, \qquad \chi = \int E^2 \frac{dx}{\sin x},$$

$$\lambda_1 = \int \sin x \,.\, E \frac{dx}{\Delta}, \qquad \sigma = \int E.F dx, \qquad \psi = \int E^2 \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\tau = \int E.F \frac{dx}{\sin x},$$

TAFEL 103.

$$\int \sin^p x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, F^2 dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, F^2 dx + 2 \int \sin^{p-2} x\, dx -$$

$$- 2 \sin^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, F - [1 - (p-1)\Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\cos x \,.\, F^2 \Big\}.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\xi - \frac{\Delta}{\sin x} F - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} F^2 + L \tang \tfrac{1}{2} x. \qquad \int F^2 \frac{dx}{\sin x} = \xi.$$

$$\int F^2 dx = \nu. \qquad \int \sin x \,.\, F^2 dx = 2\theta - \cos x \,.\, F^2.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{k^2}(x - \Delta \,.\, F) - \frac{1}{2} \sin x \,.\cos x \,.\, F^2.$$

TAFEL 104.

$$\int \sin^p x \,.\, E \,.\, F dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p-2)^2 + (p^2-1)k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, E \,.\, F dx -$$

$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x \,.\, E \,.\, F dx + 2\int \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^2 dx + 2k^2 \int \sin^{p-1} x \,.\cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (E^2 + \Delta^2 \,.\, F) \sin^{p-2} x \,.\, \Delta - [3 - (p+1)\Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\cos x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$= \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, E.F\, dx - (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x.E.F\, dx +$$

$$+ 2\int \sin^{p-2} x.\Delta^2 dx - 2k^2 \int \sin^{p-1} x.\cos x.\Delta.F dx - (E + \Delta^2 F) \sin^{p-2} x.\Delta - [1 - (p-1)\Delta^2] \sin^{p-3} x.\cos x.E.F \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\Big\{ \tau - k^2\theta - k^2 + 2 L \tang \tfrac{1}{2} x - (E + F)\frac{\Delta}{\sin x} - (E \,.\, F - 1 + \Delta^2) \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\sin x} = \tau. \qquad \int E \,.\, F dx = \sigma.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, E \,.\, F dx = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{6k^2} \{ (2-k^2) 2x + (2 - 3E \,.\, F) k^2 \sin x \,.\cos x - (\Delta^2 \,.\, F + 3E)\Delta \}.$$

TAFEL 105.

$$\int \sin^p x \,.\, E^2\, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E^2\, dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, E^2\, dx + 2 \int \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^4\, dx - 2 \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E -$$

$$- [\,1 - (p+1)\,\Delta^2\,]\, \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E^2 \Big\}.$$

$$\int E^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\chi - k^2\theta_1 - (E^2 + 2\Delta^2 - 2)\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{\Delta}{\sin x} E - k^2 - l.\, tang\, \tfrac{1}{2} x.$$

$$\int {}^2 \frac{dx}{\sin x} = \chi. \qquad \int E^2\, dx = \varphi.$$

$$\int \sin^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24k^2}\{-8\,\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4)x + [3(2-k^2) + 2\Delta^2 - 12E^2]k^2 \sin x . \cos x\}.$$

TAFEL 106.

$$\int \cos^p x \,.\, F^2\, dx = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)\,] \int \cos^{p-2} x \,.\, F^2\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, F^2\, dx - 2 \int \cos^{p-2} x\, dx +$$

$$+ 2 \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, F - [\,(1-k^2) - (p-1)\,\Delta^2\,]\, \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, F^2 \Big\}.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{1-k^2} \Big\{ \frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) \Big\} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} F^2.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos x} = \varrho. \qquad \int F^2\, dx = \nu. \qquad \int \cos x \,.\, F^2\, dx = -2\lambda + \sin x \,.\, F^2.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F^2\, dx = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{k^2}(x - \Delta \,.\, F) + \frac{1}{2} \sin x \,.\, \cos x \,.\, F^2.$$

TAFEL 107.

$$\int \cos^p x \,.\, E \,.\, F\, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p^2-1)k^2 - (p-2)^2(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E \,.\, F\, dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^2\, dx -$$

$$- 2\, k^2 \int \sin x \,.\, \cos^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} + (E^2 + \Delta^2 \,.\, F) \cos^{p-2} x \,.\, \Delta -$$

$$- [3(1-k^2) - (p+1)\Delta^2] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$= \frac{1}{(p-1)pk^2} \Big\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E \,.\, F\, dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^2\, dx +$$

$$+ 2\, k^2 \int \sin x \,.\, \cos^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, F\, dx + (\Delta^2 \,.\, F + E) \cos^{p-2} x \,.\, \Delta -$$

$$- [(1-k^2) - (p-1)\Delta^2] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \Big\{ v - k^2 \lambda - \frac{1}{1-k^2} \{E + (1-k^2) F\} \frac{\Delta}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(E \,.\, F + 1 - \frac{\Delta^2}{1-k^2} \right) +$$

$$+ 2\, L \operatorname{tang} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} x \right) \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\cos x} = v. \qquad \int E \,.\, F\, dx = \sigma.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E \,.\, F\, dx = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{6\, k^2} \{(2-k^2) 2x + (2 - 3\, E \,.\, F) k^2 \sin x \,.\, \cos x - (\Delta^2 \,.\, F + 3\, E) \Delta \}.$$

TAFEL 108.

$$\int \cos^p x \,.\, E^2 dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p^2-1)\,k^2 - (p-2)^2\,(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E^2 dx +$$

$$+ (p-2)\,(p-3)\,(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E^2 dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx +$$

$$+ 2 \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E - [\,3\,(1-k^2) - (p+1)\,\Delta^2\,]\, \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E^2 \Big\}.$$

$$\int E^2 \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\psi - k^2 \lambda_1 + [E^2 - 2\,(1-k^2) + 2\,\Delta^2]\,\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{\Delta}{\cos x} E +$$

$$+ (1-k^2)\, L\, tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right).$$

$$\int E^2 \frac{dx}{\cos x} = \psi. \qquad\qquad \int E^2\, dx = \varphi.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E^2 dx = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{24k^2} \{ -8\,\Delta^3 \,.\, E + (8 - 8\,k^2 + 3\,k^4)\,x +$$

$$+ [\,3\,(2-k^2) + 2\,\Delta^2 - 12\,E^2\,]\,k^2 \sin x \,.\, \cos x \} .$$

E R R A T A.

			voor:	*lees:*
Blz.	11, reg.	2 van ond.	$\frac{\Delta}{dx}$	$\frac{dx}{\Delta}$
»	15, »	3 van ond.	$\Pi(-r, l, y) -$	$\Pi(-r, l, y) - \int$
»	16, »	1 en 11	$L \frac{}{\sqrt{}}$	L ———
»	22, »	4 van ond. (aan het einde)	$-$	$+$
»	31, »	14	$-2)$	$-2 + \Delta^2)$
»	40, »	5	$-2)$	$-2 + \Delta^2)$
»	59, »	8	$(\cos x +$	$(-\cos x +$
»	63, »	2 van ond.	$+p$	$-p$
		(aan het einde)	$+$	$-$
»	63, »	1 van ond.	$+(p-2)$ en $+(p-4)$	$-(p-2)$ en $-(p-4)$
»	64, »	9	$+\frac{1}{2}p$	$-\frac{1}{2}p$
		(aan het einde)	$+$	$-$
»	64, »	10	$+\frac{1}{2}(p-2)$ en $\frac{1}{2}(p-4)$	$-\frac{1}{2}(p-2)$ en $-\frac{1}{2}(p-4)$
»	64, »	11	$+\frac{1}{2}(p-6)$	$-\frac{1}{2}(p-6)$
»	64, »	9 van ond. (aan het einde)	$+$	$-$
»	64, »	8 van ond. (aan het begin)	$+$	.
»	66, »	3	$(p-3)^2 +$	$(p-3)^2 -$
»	130, »	6	$\sin^3 \frac{1}{2} x . E$	$\sin^3 \frac{1}{2} x . E -$
»	136, »	8	$\{[(p-3)$	$\{(p-3)[(p-3)$
»	159, »	11	$\frac{d}{\Delta^3}$	$\frac{dx}{\Delta^3}$
»	160, »	3 van ond.	$\varkappa_1$	$-\varkappa_1$
»	206, »	10	ζ	ξ

B 29